Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Domenico Boccioni

Somme dirette e rappresentazioni di anelli E_s-generati

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 39 (1967), p. 123-135

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__39__123_0>

SOMME DIRETTE E RAPPRESENTAZIONI DI ANELLI E_s-GENERATI

DOMENICO BOCCIONI *)

Lo studio degli anelli E_s-generati (cioè degli anelli generati dall'insieme E_s, supposto non vuoto, dei loro elementi unità sinistri), iniziato in un precedente lavoro ([1] **)), viene qui continuato.

Nel n.^{0} 1 si studiano le somme dirette (cioè i prodotti cartesiani) di anelli E_s-generati, dimostrando alcune loro interessanti proprietà.

Nei successivi numeri 2-4, viene affrontato il problema di rappresentare un qualsiasi anello E_s-generato finito mediante un anello di matrici quadrate con elementi interi modulo un intero opportuno.

Tale problema viene risolto positivamente, dapprima per i p-anelli E_s-generati finiti (n.^{0} 3, teor. 5), e successivamente per un anello E_s-generato finito del tutto arbitrario (n.^{0} 4, teor. 6).

Le matrici che forniscono la cercata rappresentazione hanno come elementi numeri interi modulo la caratteristica dell'anello che viene rappresentato.

1. Conserviamo nel presente lavoro tutte le definizioni (e le relative notazioni) introdotte in [1].

Si verifica subito che:

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la matematica del C. N. R.

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

**) I numeri fra parentesi quadre rimandano alla bibliografia alla fine del lavoro.

I. *Se* $(A_i)(i \in J)$ *è una famiglia non vuota* [1]) *di anelli* A_i, *allora* ([1], n.⁰ 1) [2]):

(1) $$Z_s(\Pi A_i) = \Pi Z_s(A_i),$$

ed inoltre

(2) $$E_s(\Pi A_i) = \Pi E_s(A_i)$$

(il 2^0 membro della (2) denotando insieme prodotto cartesiano).

Dalla (1) risulta che (cfr. [3], pp. 53 e 166):

II. *Se valgono le stesse ipotesi della I, allora* ([1]: [9])):

$$(\Pi A_i)/Z_s(\Pi A_i) \cong \Pi(A_i/Z_s(A_i)).$$

Infatti, l'applicazione (canonica):

$$(x_i) + Z_s(\Pi A_i) \longrightarrow (x_i + Z_s(A_i)),$$

dove $(x_i) \in \Pi A_i (x_i \in A_i$ per ogni $i \in J)$, è appunto un isomorfismo (fra anelli).

Inoltre, dalla V di [2] si trae direttamente che:

III. *Se valgono le stesse ipotesi della I, allora* ([1], n.⁰ 2):

$$\text{car } \Pi A_i = \text{mcm}(\text{car } A_i).$$

Dalle precedenti II, III, e dalle IV, IX, XIII, XIV di [1], ricordando note proprietà dei prodotti (cartesiani) $\Pi(I/(m_i))$ di anelli $I/(m_i)$ [3]) (v. ad es. [6], § 84), si ottengono i seguenti teoremi 1 e 2.

TEOREMA 1: *Se è* E_s*-generato* ([1], n.⁰ 4) *l'anello prodotto* (cartesiano) ΠA_i *di una famiglia* $(A_i)(i \in J)$ *di anelli* A_i, *allora sono* E_s*-generati tutti i fattori* A_i.

---

[1]) (e non necessariamente finita)

[2]) $\Pi A_i =$ anello prodotto (cartesiano) della famiglia $(A_i)(i \in J)$, (v. [3], p 129).

[3]) $I =$ anello dei numeri interi.

TEOREMA 2: *Sia data una famiglia* $(A_i)\,(i \in J)$ *di anelli* A_i, *con* $|J| \geq 2$ ([1]: [2])). *Si supponga che tutti gli anelli* A_i *della famiglia* (A_i) *siano* E_s*-generati* ([1], n.° 4) *e non nulli* ([1]: [3])). *Allora l'anello prodotto* (cartesiano) ΠA_i *di tale famiglia* $(A_i)\,(i \in J)$ *è* E_s*-generato se, e soltanto se, sono soddisfatte le tre seguenti condizioni* α), β), γ):

α) la famiglia $(A_i)\,(i \in J)$ è finita [4]);

β) car $A_i > 0$ per ogni $i \in J$;

γ) MCD (car A_u, car A_v) $= 1 \quad \forall\, u, v \in J,\, u \neq v$ [5]).

Quest'ultima condizione γ) *è equivalente alla seguente condizione* γ') [6]):

γ') car $\Pi A_i = \Pi$ car A_i.

Diciamo (cfr. [6], p. 155) che un anello A è *irriducibile*, se da $A \cong A_1 \times A_2$ (A_1 e A_2 anelli) [7]) segue sempre che A_1 oppure A_2 è nullo.

TEOREMA 3: *Un anello* E_s*-generato e non nullo* A *è irriducibile se, e soltanto se,* car $A = 0$ *oppure* car $A = p^n$ (*p primo, n intero* ≥ 1).

Infatti, basta ragionare per assurdo, applicando per il «se» la III ed i teoremi 1 e 2, per il «soltanto se» il theorem 29 di [5], p. 120.

TEOREMA 4: *Se* A *è un anello* E_s*-generato* ([1], n.° 4) *e non nullo, allora* [7]):

$$A \cong A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_r \qquad (r \geq 1), \tag{3}$$

dove $A_1, A_2, \ldots, A_r$ *sono anelli* E_s*-generati, non nulli e irriducibili, univocamente determinati da* A *a meno dell'ordine e di isomorfismi.*

Se car $A > 0$, *nella* (3) r *è il numero dei fattori primi distinti*

$$p_1, p_2, \ldots, p_r$$

di car A; *inoltre, se*

$$\text{car } A = p_1^{h_1} p_2^{h_2} \ldots p_r^{h_r} \qquad (h_i \text{ interi} \geq 1), \tag{4}$$

---

4) (cioè è finito l'insieme J dei suoi indici)

5) MCD = massimo comun divisore; $\forall$ = per ogni.

6) Π car A_i denota il prodotto dei numeri car A_i ($i \in J$, finito per α)).

7) [2]: 4).

allora

$$\text{car } A_i = p_i^{h_i} \qquad (i = 1, 2, \dots, r). \tag{5}$$

Infatti, se A non è irriducibile, l'esistenza di $A_1, A_2, \dots, A_r$ segue dal theor. 29 di [5], p. 120, e dai teoremi 1 e 3; la loro unicità (a meno dell'ordine e di isomorfismi) segue dai teoremi 1 e 3, osservando che A_i $(i = 1, 2, \dots, r)$ è isomorfo all'ideale H_i di A costituito dagli elementi aventi ordini (additivi) uguali a potenze di p_i (con esponenti interi ≥ 0).

IV. *Se per un anello E_s-generato A valgono la* (3) *e la* (4) *del teorema* 4, *e se inoltre* $| E_s(A) |$ *è finito, quindi* (per la II di [2]) *è dato da*

$$| E_s(A) | = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r} \qquad (k_i \text{ interi} \geq 0), \tag{6}$$

allora

$$| E_s(A_i) | = p_i^{k_i} \qquad (i = 1, 2, \dots, r). \tag{7}$$

Infatti, le (7) risultano dalle (2), (3), (5), (6), per la II di [2] e per l'unicità della decomposizione in fattori primi.

2. Cercheremo adesso di rappresentare un qualsiasi anello E_s-generato finito A mediante un anello di matrici quadrate aventi come elementi numeri interi modulo car A.

Poiché A è finito, car $A > 0$, e possiamo anzi supporre car $A > 1$ ([2]: [15])). I precedenti teoremi 3 e 4 indicano qual'è il caso più semplice, dal quale conviene incominciare.

Supponiamo perciò, d'ora in poi, in questo n.⁰, che A sia un anello E_s-generato e finito, la cui caratteristica m sia una potenza di un numero primo. Poniamo perciò

$$m = \text{car } A = p^h \qquad (p \text{ primo, } h \text{ intero} \geq 1). \tag{8}$$

Ne segue (per la II di [2]), chiamando n il numero $| E_s(A) |$ delle identità sinistre di A, che supporremo ≥ 2:

$$n = | E_s(A) | = p_k \qquad (k \text{ intero} \geq 1), \tag{9}$$

e quindi (v. il 6^0 capov. dell'introduzione di [1]):

(10) $$|A| = mn = p^{h+k}.$$

In base alla (10), il gruppo additivo A^+ dell'anello A è un p-gruppo abeliano finito, e ciò si può ricordare dicendo (cfr. [8]) che A è un *p-anello* finito. Certe rappresentazioni dei p-anelli finiti sono studiate in [7] e [8].

Si osservi che h e k nelle (8) e (9) possono assumere (indipendentemente l'uno dall'altro) qualsiasi valore (intero ≥ 1). Ciò risulta subito dal lemma 1 del n.^{0} 4 di [2] (leggendovi n invece di c), e dal teor. 3 del n.^{0} 6 di [1]. Inoltre, da questo stesso teor. 3 di [1], risulta che l'annichilatore sinistro $Z_s(A)$ di A, il quale deve esser tale che (v. II di [1]):

(11) $$|Z_s(A)| = n = p^k,$$

può essere un qualsiasi zero-anello di ordine $n = p^k$, purché naturalmente tale che

(12) $$\operatorname{car} Z_s(A) \mid m.$$

Quest'ultima affermazione equivale a dire che, se il p-gruppo abeliano finito $Z_s(A)^+$ (v. (11)) è di tipo (cfr. [4], pp. 107-108):

(13) $$(p^{t_1}, p^{t_2}, \dots, p^{t_r}),$$

gli interi $t_1, t_2, \dots, t_r$ possono essere qualsiasi, purché tali da soddisfare le seguenti (14) e (15):

(14) $$t_1 + t_2 + \dots + t_r = k,$$

(15) $$h \geq t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_r \geq 1.$$

Infatti, si ricordi che la (13) esprime che $Z_s(A)^+$ è isomorfo al gruppo prodotto (cartesiano) di r (≥ 1) gruppi ciclici di ordini $p^{t_1}, p^{t_2}, \dots, p^{t_r}$. Eguagliando gli ordini, si vede appunto che la (11) equivale alla (14). Inoltre (per la V del n.^{0} 3 di [2]) le diseguaglianze (15) diverse dalla prima (le quali valgono sempre per definizione di tipo) implicano che tale gruppo prodotto (e quindi anche $Z_s(A)^+$) ha esponente p^{t_1}. Ne risulta, poiché (v. [1], n.^{0} 2) $\operatorname{esp} Z_s(A)^+ = \operatorname{car} Z_s(A)$, che la prima diseguaglianza (15) equivale appunto alla (12) (si ricordi la (8)).

Ricordiamo ora che gli ideali dell'anello $I/(m)$ [3]) $(2 \leq m \in I)$ sono le immagini, nell'omomorfismo canonico di I sopra $I/(m)$, degli ideali (d) di I $(0 < d \in I)$ che contengono (m) (quindi con $d \mid m$), la relativa corrispondenza:

$$(16) \qquad (d) \longrightarrow (d)/(m) \qquad (d \mid m)$$

risultando biunivoca. Ricordiamo inoltre che, come risulta dal ben noto isomorfismo

$$(I/(m))/((d)/(m)) \cong I/(d),$$

l'ordine dell'ideale $(d)/(m)$ di $I/(m)$ è dato da

$$(17) \qquad |\ (d)/(m)\ | = m/d \qquad (d \mid m).$$

3. Pensiamo fissati ad arbitrio un numero primo p, e due numeri interi h, k, entrambi ≥ 1.

Pensiamo pure fissata una qualsiasi r-upla (ordinata)

$$(18) \qquad T = (t_1, t_2, \dots, t_r)$$

di numeri interi t_i soddisfacenti entrambe le relazioni (14) e (15) $(1 \leq r \leq k)$.

Consideriamo allora la r-upla $(Q_1, Q_2, \dots, Q_r)$ di ideali Q_i dell'anello $I/(p^h)$, così definiti:

$$(19) \qquad Q_i = (p^{h-t_i})/(p^h) \qquad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Poiché, in virtù della (15):

$$(20) \qquad h > h - t_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, r),$$

p^{h-t_i} è un divisore di p^h $(i = 1, 2, \dots, r)$, quindi le (19) hanno senso (n.^{0} 2). Per la (17), dalle (19) si trae:

$$(21) \qquad |\ Q_i\ | = p^{t_i} \qquad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Poiché Q_i^+ è un sottogruppo del gruppo additivo di $I/(p^h)$, che è ciclico, Q_i^+ è dunque un gruppo ciclico di ordine p^{t_i} $(i = 1, 2, \dots, r)$.

Consideriamo allora le matrici quadrate di ordine $1 + r$ con elementi in $I/(p^h)$, tali che tutti gli elementi non appartenenti alla prima riga siano nulli e tali inoltre che l'$(1 + i)$-esimo elemento $\overline{q}_i$ $(q_i \in I, \overline{q}_i = q_i + (p^h))$ della prima riga appartenga a $Q_i (i = 1, 2, \dots, r)$:

$$
(22) \qquad \begin{bmatrix} \overline{q} & \overline{q}_1 & \overline{q}_2 & \cdots & \overline{q}_r \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \dots & \overline{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \dots & \overline{0} \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} (\overline{q} \in I/(p^h)) \\ (\overline{q}_i \in Q_i \subseteq I/(p^h)) \end{matrix}
$$

(naturalmente $q \in I$, $\overline{q} = q + (p^h)$). Ricordando che Q_i è un ideale di $I/(p^h)$ $(i = 1, 2, \dots, r)$, è chiaro che queste matrici (22) costituiscono un sottoanello dell'anello di tutte le $(1 + r) \times (1 + r)$ matrici (quadrate) con gli elementi in $I/(p^h)$, sottoanello che denoteremo col simbolo

$$
(22') \qquad M(p, h, k, T).
$$

Consideriamo lo zero anello Z con ([2] : [4]) :

$$
(23) \qquad Z^+ = Q_1^+ \times Q_2^+ \times \dots \times Q_r^+ ,
$$

i cui elementi son dunque le r-uple

$$
(24) \qquad (\overline{q}_1 , \overline{q}_2 , \dots , \overline{q}_r) \qquad (\overline{q}_i \in Q_i).
$$

In base alle (14), (21), (23) è chiaro che

$$
(25) \qquad | Z | = p^k.
$$

Inoltre car Z = esp Z^+ = mcm (esp $Q_1^+, \dots,$ esp Q_r^+) (v. [2], n.º 3, V). Essendo Q_i^+ ciclico, esp $Q_i^+ = | Q_i | = p^{t_i}$ (v. (21)), e perciò (v. (15)): car $Z = p^{t_1}$, donde (v. ancora (15)):

$$
(26) \qquad \text{car } Z \mid p^h.
$$

Poiché $\overline{0}$ è l'unico annullatore sinistro di $I/(p^h)$ (v. [1], II), è chiaro che l'annichilatore sinistro dell'anello (22') è costituito dalle matrici (22) con $\overline{q} = \overline{0}$, donde evidentemente (v. (23), (24)):

$$Z_s(M(p, h, k, T)) \cong Z. \tag{27}$$

È pure chiaro che le identità sinistre dell'anello (22') sono le matrici (22) con $\overline{q} = \overline{1}$. Ricordando la VIII del n.^{0} 2 di [1], ne segue evidentemente che

$$\operatorname{car} M(p, h, k, T) = p^h. \tag{28}$$

Ne segue pure, per le (25), (27) (e per la II di [1]):

$$| E_s(M(p, h, k, T)) | = p^k. \tag{29}$$

L'applicazione che associa all'elemento (22) dell'anello (22') l'elemento $\overline{q}$ di $I/(p^h)$ è evidentemente un omomorfismo suriettivo il cui nucleo è $Z_s(M(p, h, k, T))$; quindi

$$I/(p^h) \cong M(p, h, k, T)/Z_s(M(p, h, k, T)),$$

donde (per le (28), (29), e per la XIV di [1]):

$$M(p, h, k, T) \text{ è } E_s\text{-generato.} \tag{30}$$

Si osservi poi che, essendo Q_i^+ ciclico di ordine p^{t_i} (v. (21)), allora (v. (23)) Z^+ è di tipo $(p^{t_1}, p^{t_2}, \dots, p^{t_r})$, quindi (v. (27)):

$$Z_s(M(p, h, k, T))^+ \quad \text{è di tipo} \quad (p^{t_1}, p^{t_2}, \dots, p^{t_r}). \tag{31}$$

Ricordando (si veda l'inizio di questo n.^{0}) che p, h, k, T son stati fissati a piacere (con le restrizioni dette), i risultati (28)-(31) confermano intanto le affermazioni fatte nel n.^{0} 2 sull'arbitrarietà (dato p) di h, k, T.

Inoltre, se A è un qualsiasi p-anello E_s-generato finito soddisfacente le (8), (9), e il cui annichilatore sinistro $Z_s(A)$ ha gruppo additivo $Z_s(A)^+$ di tipo (13) (con $t_1, t_2, \dots, t_r$ soddisfacenti dunque necessariamente le (14) e (15): v. n.^{0} 2), allora (per il coroll. del n.^{0} 5 di [1]) A è isomorfo a $M(p, h, k, T)$ (v. (28) e (31)). D'altra parte è chiaro che, variando anche uno solo dei quattro enti p, h, k, T, si ottiene un $M(p, h, k, T)$ non isomorfo al precedente.

In definitiva abbiamo dimostrato (n.^{i} 2 e 3) il seguente

TEOREMA 5: *Siano p un numero primo, h, k due numeri interi entrambi ≥ 1, e*

$$T = (t_1, t_2, \dots, t_r)$$

una r-upla (con $1 \leq r \leq k$) *di numeri interi t_i soddisfacenti le due condizioni* (14) *e* (15). *Allora, per ogni quaderna* (ordinata):

$$(p, h, k, T),$$

esiste uno e, a meno di isomorfismi, un solo p anello (n.^{0} 2) *E_s-generato* ([1], n.^{0} 4) *finito A tale che* ([1], n.^{i} 1 e 2):

$$\text{car } A = p^h, \qquad | E_s(A) | = p^k$$

e tale inoltre che

$$Z_s(A)^+ \quad \text{è di tipo} \quad (p^{t_1}, p^{t_2}, \dots, p^{t_r}).$$

Tale p-anello E_s-generato finito A è isomorfo all'anello

$$M(p, h, k, T)$$

di $(1 + r) \times (1 + r)$ *matrici* (quadrate) *con gli elementi nell'anello* $I/(\text{car } A)$ (degli interi modulo car A) *definito dalle* (19), (22). *Al variare della quaderna* (p, h, k, T), *gli anelli di matrici $M(p, h, k, T)$ esauriscono, a meno di isomorfismi, tutti i p-anelli E_s-generati finiti contenenti almeno due identità sinistre* (distinte). *L'ordine dell'anello $M(p, h, k, T)$ è p^{h+k}.*

4. Passiamo ora al caso generale della rappresentazione di un qualsiasi anello E_s-generato finito.

Pensiamo fissati ad arbitrio $\nu\,(\geq 1)$ numeri primi p_i (a due a due) distinti:

(32) $$p_1 > p_2 > \dots > p_\nu,$$

ed inoltre altrettante coppie

$$(h_1, k_1), (h_2, k_2), \dots, (h_\nu, k_\nu) \tag{33}$$

di numeri interi h_i, k_i, con

$$h_i \geq 1, \qquad k_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, \nu) \tag{34}$$

e con la seguente ulteriore condizione:

$$\text{esiste un} \quad i \in \{1, 2, \dots, \nu\} \quad \text{con} \quad k_i \geq 1. \tag{34'}$$

Per ciascun $i \in \{1, 2, \dots, \nu\}$ con $k_i \geq 1$, pensiamo inoltre arbitrariamente fissata una r_i-upla (ordinata)

$$T_i = (t_{i1}, \dots, t_{ir_i}) \tag{35}$$

di numeri interi t_{ij} soddisfacenti entrambe le relazioni seguenti:

$$t_{i1} + \dots + t_{ir_i} = k_i, \tag{36}$$

$$h_i \geq t_{i1} \geq \dots \geq t_{ir_i} \geq 1. \tag{37}$$

Fissato tutto ciò, poniamo:

$$m = p_1^{h_1} p_2^{h_2} \dots p_\nu^{h_\nu}, \tag{38}$$

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_\nu^{k_\nu}. \tag{39}$$

Per ciascun $i \in \{1, 2, \dots, \nu\}$ tale che $k_i \geq 1$, consideriamo allora la r_i-upla di ideali $(Q_{i1}, \dots, Q_{ir_i})$ dell'anello $I/(m)$ così definiti

$$Q_{ij} = (m/p_i^{t_{ij}})/(m) \qquad (j = 1, 2, \dots, r_i). \tag{40}$$

Queste (40) hanno senso (n.° 2) poiché (v. (37)):

$$h_i > h_i - t_{ij} \geq 0,$$

e quindi $m/p_i^{t_{ij}}$ è un divisore di m.

Per la (17), dalle (40) si trae

$$|Q_{ij}| = p_i^{t_{ij}} \qquad (j = 1, 2, \dots, r_i), \tag{41}$$

ed i gruppi Q_{ij}^+ sono ciclici.

Consideriamo allora le matrici quadrate di ordine [8]) $1 + r_1 + r_2 + \dots + r_\nu$ con gli elementi in $I/(m)$, tali che tutti gli elementi non appartenenti alla prima riga siano nulli e tali inoltre che, se $r_i > 0$, l'$(1 + r_1 + \dots + r_{i-1} + j)$-esimo elemento della prima riga $(j = 1, 2, \dots, r_i)$ appartenga a Q_{ij}, $(i = 1, 2, \dots, \nu)$. È chiaro che tutte queste matrici quadrate costituiscono un sottoanello dell'anello di tutte le matrici quadrate aventi il medesimo ordine con gli elementi in $I/(m)$, sottoanello che denoteremo col simbolo [9])

$$M = M(p_1, h_1, k_1, T_1; \dots; p_\nu, h_\nu, k_\nu, T_\nu). \tag{42}$$

Con ragionamenti analoghi a quelli del n.⁰ 3, si vede allora che [10]):

$$\operatorname{car} M = m, \qquad |E_s(M)| = n, \tag{43}$$

$$M \text{ è } E_s\text{-generato}, \tag{44}$$

$$Z_s(M)^+ \text{ è di tipo } (p_1^{t_{11}}, \dots, p_1^{t_{1r_1}}; \dots; p_\nu^{t_{\nu 1}}, \dots, p_\nu^{t_{\nu r_\nu}}). \tag{45}$$

E si riconosce pure che vale la seguente generalizzazione del teorema 5, che risolve positivamente il problema considerato all'inizio del n.⁰ 2.

TEOREMA 6: *Siano* $p_1, p_2, \dots, p_\nu$ $(\nu \geq 1)$ *numeri primi distinti soddisfacenti la* (32), $h_1, k_1, h_2, k_2, \dots, h_\nu, k_\nu$ *numeri interi soddisfa-*

---

[8]) Per ogni eventuale $i \in \{1, 2, \dots, \nu\}$ tale che $k_i = 0$, poniamo $r_i = 0$.

[9]) Si pensino non scritte le T_i delle eventuali quaderne p_i, h_i, k_i, T_i con $i \in \{1, 2, \dots, \nu\}$ tale che $k_i = 0$.

[10]) Si pensino non scritte le eventuali r_i-uple $p_i^{t_{i1}}, \dots, p_i^{t_{ir_i}}$ con $i \in \{1, 2, \dots, \nu\}$ tale che $k_i = 0$.

centi le (34)-(34′), *e*

$$T_i = (t_{i1}, \ldots, t_{ir_i}) \qquad (i \in \{1, 2, \ldots, \nu\},\ k_i \geq 1)$$

r_i-uple di numeri interi t_{ij} soddisfacenti le due condizioni (36) *e* (37).

Allora, per ogni sequenza di quaderne (ordinate):

$$(46) \qquad (p_1, h_1, k_1, T_1; \ldots; p_\nu, h_\nu, k_\nu, T_\nu)$$

(nella quale, per ogni eventuale $i \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$ con $k_i = 0$, la T_i della quaderna p_i, h_i, k_i, T_i si deve pensare non scritta), *esiste uno e, a meno di isomorfismi, un solo anello E_s-generato* ([1], n.⁰ 4) *finito A tale che* ([1], n.ⁱ 1 e 2):

$$(47) \qquad \operatorname{car} A = p_1^{h_1} p_2^{h_2} \ldots p_\nu^{h_\nu}, \qquad |E_s(A)| = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_\nu^{k_\nu},$$

e tale inoltre che

$$(48) \qquad Z_s(A)^+ \text{ è di tipo } (p_1^{t_{11}}, \ldots, p_1^{t_{1r_1}}; \ldots; p_\nu^{t_{\nu 1}}, \ldots, p_\nu^{t_{\nu r_\nu}})$$

(dove la r_i-upla $p_i^{t_{i1}}, \ldots, p_i^{t_{ir_i}}$ si deve intendere non scritta per ogni eventuale $i \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$ con $k_i = 0$).

Tale anello E_s-generato finito A è isomorfo all'anello

$$(49) \qquad M = M(p_1, h_1, k_1, T_1; \ldots; p_\nu, h_\nu, k_\nu, T_\nu)$$

(anche qui, per ogni eventuale $i \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$ con $k_i = 0$, la T_i della quaderna si deve pensare non scritta) *di matrici quadrate con gli elementi nell'anello $I/(\operatorname{car} A)$* (degli interi modulo car A) *definito dalle* (40), (42), (l'ordine di tali matrici è $1 + r_1 + r_2 + \ldots + r_\nu$, dove $r_i = 0$ per ogni eventuale $i \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$ tale che $k_i = 0$).

Al variare della sequenza di quaderne (46), *gli anelli di matrici* (49) *esauriscono, a meno di isomorfismi, tutti gli anelli E_s-generati finiti contenenti almeno due identità sinistre* (distinte).

L'ordine $|M|$ dell'anello (49) *è dato da*:

$$|M| = p_1^{h_1+k_1} p_2^{h_2+k_2} \ldots p_\nu^{h_\nu+k_\nu}.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] BOCCIONI, D.: *Struttura degli anelli generati dai loro elementi unità sinistri*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 39.

[2] BOCCIONI, D.: *Immersione di un anello in un anello avente un numero cardinale qualsiasi di elementi unità sinistri*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 39.

[3] BOURBAKI, N.: *Algèbre, Chap. 1*, Hermann (1958).

[4] KOCHENDÖRFFER, R.: *Lehrbuch der Gruppentheorie*, Akad. Verlagsg. (1966).

[5] MCCOY, N. H.: *Rings and ideals*, The Math. Assoc. of America (1948).

[6] RÉDEI, L.: *Algebra, Teil* 1, Akad. Verlagsg. (1959).

[7] SHODA, K.: *Über die Automorphismen einer endlichen Gruppe*, Math. Annalen, vol. 100, pp. 674-686 (1928).

[8] SZELE, T.: *Ein Satz über die Struktur der endlichen Ringe*, Acta Sci. Math. (Szeged), vol. 11, pp. 246-250 (1948).

Manoscritto pervenuto in Redazione il 22 luglio 1967.