RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

DOMENICO BOCCIONI

Immersione di un anello in un anello avente un numero cardinale qualsiasi di elementi unità sinistri

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 39 (1967), p. 102-122

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__39__102_0>

IMMERSIONE DI UN ANELLO IN UN ANELLO AVENTE UN NUMERO CARDINALE QUALSIASI DI ELEMENTI UNITÀ SINISTRI

DOMENICO BOCCIONI *)

Il problema dell'immersione di un anello qualsiasi in un anello dotato di un elemento unità (bilatero) 1, risolto da Dorroh nel 1932 ([4] **)) mediante la ben nota costruzione che porta il suo nome, fu in seguito studiato in varie direzioni da diversi altri autori (e variamente generalizzato o particolarizzato) fino a tempi molto recenti (v. ad es. [7]).

Poiché notoriamente (cfr. [1], introduz.) un anello è dotato di 1 se, e solo se, esso è dotato di un unico elemento unità sinistro, è naturale pensare di generalizzare il suddetto problema (dal caso di un solo) al caso di più elementi unità sinistri.

La possibilità (facilmente verificabile) di immergere un anello qualsiasi in un anello dotato di almeno due elementi unità sinistri, è certamente nota.

Comunque l'unico accenno esplicito a tale possibilità (ed anche la sua effettiva verifica, mediante una costruzione escogitata per le particolari finalità di quel lavoro) sembra sia quello contenuto in un recente lavoro di Faith e Utumi ([5]).

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la matematica del C. N. R..

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

**) I numeri fra parentesi quadre rimandano alla bibliografia alla fine del lavoro.

Qui, sulla base di un precedente lavoro ([1]), il problema enunciato dal titolo viene studiato approfonditamente, e risolto con i risultati seguenti.

Anzitutto si son cercate (n.i 1-3), per un numero cardinale $c > 0$ e per un intero m con $0 \leq m \neq 1$, condizioni necessarie e sufficienti affinché essi possano rispettivamente essere uguali a $|E_s(A)|$ e a car A (v. n.^{0} 1), per almeno un anello A. Per ciò occorre e basta soltanto che *ogni* (eventuale) *fattore primo di c divida m, nel caso in cui c sia finito* (n.^{0} 4, lemma 2).

Successivamente si è trovato che: *Se un numero cardinale* $c > 0$ *ed un numero intero m, con* $0 \leq m \neq 1$, *son prefissati ad arbitrio, purché soddisfacenti la suddetta condizione, e se A è un qualsiasi anello tale che* (com'è necessario) car $A \mid m$, *allora A può essere immerso in un anello R contenente esattamente c elementi unità sinistri* (cioè con $|E_s(R)| = c$) *ed avente inoltre caratteristica m* (car $R = m$), (v. il lemma 2 del n.^{0} 4 per il caso $A = \{0\}$, ed il teor. 1 dello stesso n.^{0} 4 per il caso $A \neq \{0\}$; si noti che il caso escluso $m = 1$ è banale: cfr. n.^{0} 6, prova del teor. 2).

Ne risulta in particolare (per $m = 0$) che: *Dati un qualsiasi anello A ed un qualsiasi numero cardinale* $c > 0$, *è sempre possibile immergere A in un anello R contenente esattamente c elementi unità sinistri* (cioè con $|E_s(R)| = c$).

Poiché è noto (cfr. [1], introduz.) che, se si impone ad una estensione R di un dato anello A di avere esattamente $c\,(> 0)$ elementi unità sinistri e caratteristica m, l'annichilatore sinistro $Z_s(R)$ di R subisce automaticamente due restrizioni (precisamente deve avere ordine $|Z_s(R)| = c$, e la sua caratteristica deve dividere m), si è voluto poi vedere se queste sono le sole. Effettivamente è così: *Per un'estensione R di A, oltre a poter prefissare ad arbitrio* $|E_s(R)|$ $(= c)$ *e* car $R\,(= m)$ (come sopra si è visto), *si può contemporaneamente imporre ad R di avere l'annichilatore sinistro* $Z_s(R)$ *isomorfo ad un prefissato zero-anello Z* (scelto ad arbitrio purché con $|Z| = c$ e car $Z \mid m$), (si vedano le (43) del teorema 2 del n.^{0} 6).

Ma anche altre interessanti condizioni *si possono contemporaneamente imporre ad una estensione R di A, oltre le tre condizioni* (43) *del teor. 2, qui sopra nominate,* e precisamente *le sei ulteriori condizioni* (44)-(48) (v. teor. 2). *L'estensione R di A che ne risulta è univocamente determinata a meno di isomorfismi,* ed ha una struttura

molto semplice, messa in luce dallo stesso teor. 2. Si è pure constatato (v. n.^{0} 7, XI) che *tale estensione R di A contiene sottoanelli* (che coincidono con R se $c = 1$, cioè se $Z = \{0\}$) *isomorfi all'«estensione di Dorroh generalizzata» di A* (v. n.^{0} 4, X) ed inoltre che R *è composto subdiretto* (v. n.^{0} 7) *di uno* (qualsiasi) *di tali sottoanelli e del sottoanello generato dall'insieme $E_s(R)$ dei suoi elementi unità sinistri* (sottoanello che coincide con R se $A = \{0\}$).

Infine (teor. 3, n.^{0} 8): *Tale estensione R di A (soddisfacente* cioè *le* (43)-(48) *del teor.* 2) *si può anche ottenere con una semplice costruzione diretta che generalizza quella* (classica) *di Dorroh* e che a questa si riduce se in particolare $c = 1$ (cioè se $Z = \{0\}$) e se inoltre $m = 0$, oppure $m = \operatorname{car} A$.

La costruzione del teorema 3 *generalizza pure la costruzione* XX *di* [1] (n.^{0} 6) (alla quale si riduce se in particolare $A = \{0\}$).

1. Se A è un anello (associativo) qualsiasi, denoteremo nel seguito con

$$\operatorname{car} A$$

la caratteristica di A, con

$$E_s(A)$$

l'insieme di tutte le identità sinistre di A [1]), e con

$$|E_s(A)|$$

il «numero cardinale delle identità sinistre di A» (cioè il numero cardinale di $E_s(A)$ [2])).

I. *Sia $E_s(A)$ finito e non vuoto. Allora ogni* (eventuale) *fattore primo p del numero $|E_s(A)|$* (delle identità sinistre dell'anello A) *è un divisore di* car A.

Infatti, ricordiamo che (v. [1], n.^{0} 2):

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{ord} x \mid \operatorname{car} A \qquad \forall\, x \in A,$$

---

[1]) Ricordiamo che un elemento e di un anello A dicesi una identità sinistra (oppure un elemento unità sinistro) di A se $ex = x$ per ogni $x \in A$.

[2]) Se M è un insieme qualsiasi, denoteremo con $|M|$ il numero cardinale (la potenza) di M.

e che (v. [1], n.^{0} 1, II)[3]:

$$|Z_s(A)| = |E_s(A)|. \tag{2}$$

In base alla (2), $Z_s(A)^+$ (= gruppo additivo di $Z_s(A)$) ha ordine $|E_s(A)|$. Perciò, se p è un numero primo che divide l'ordine $|E_s(A)|$ del gruppo finito $Z_s(A)^+$, per il teorema di Cauchy (v. ad es. [11], p. 136) deve esistere in $Z_s(A)^+$ (che è un sottogruppo del gruppo additivo A^+ dell'anello A) un elemento z il cui ordine è p:

$$p = \operatorname{ord} z \qquad (z \in Z_s(A)). \tag{3}$$

Dalle (1) e (3) segue appunto $p \mid \operatorname{car} A$, e quindi la I è provata.

II. *Se $E_s(A)$ è finito e non vuoto, e se*

$$\operatorname{car} A = p_1^{h_1} p_2^{h_2} \dots p_r^{h_r} \qquad (h_i \text{ interi} \geq 1), \tag{4}$$

dove $p_1, p_2, \dots, p_r$ sono numeri primi (a due a due) *distinti* ($r \geq 1$), *allora*

$$|E_s(A)| = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r} \qquad (k_i \text{ interi} \geq 0). \tag{5}$$

Infatti, ciò risulta immediatamente dalla I.

2. Proveremo ora (nei n.^{i} 2 e 3) l'esistenza di un anello A con $\operatorname{car} A \neq 1$ e $|E_s(A)| > 0$ prefissati ad arbitrio (purché soddisfacenti, nel caso in cui il numero cardinale $|E_s(A)|$ sia finito, la condizione necessaria stabilita dalla I).

III. *Siano dati due qualsiasi numeri interi $m > 1$ ed $n > 0$, tali che ogni* (eventuale) *fattore primo p di n sia pure un fattore di m. Allora esiste un anello A con* $\operatorname{car} A = m$ *e* $|E_s(A)| = n$.

---

[3] Se A è un anello, denoteremo con $Z_s(A)$ l'annichilatore sinistro di A ([1], n.^{0} 1).

Infatti, in base all'ipotesi, possiamo porre

$$m = p_1^{h_1} p_2^{h_2} \dots p_r^{h_r} \qquad (h_i \text{ interi} \geq 1), \tag{6}$$

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r} \qquad (k_i \text{ interi} \geq 0), \tag{7}$$

dove $p_1, p_2, \dots, p_r$ sono numeri primi distinti ($r \geq 1$). Sia allora G_i ($i = 1, 2, \dots, r$) un gruppo additivo così definito: G_i è un gruppo abeliano elementare ([11], p. 142) di ordine $p_i^{k_i}$, se $k_i > 0$; G_i è di ordine 1 ($= p_i^{k_i}$), se $k_i = 0$. Posto [4])

$$G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_r,$$

G è un gruppo abeliano additivo, con [5])

$$|G| = n, \qquad \text{esp } G \mid m. \tag{8}$$

E invero, la $(8)_1$ è evidente (v. (7)). Per la $(8)_2$, si osservi che esp $G_i = p_i$ se $k_i > 0$ ([11], p. 142), esp $G_i = 1$ se $k_i = 0$; quindi (per l'Ex. I.6.m. di [10], p. 27; cfr., qui, n° 3, V e VI): esp $G \mid p_1 p_2 \dots p_r$, donde appunto la $(8)_2$ (v. (6)). Allora, se Z è lo zero-anello (v. nota [10]) di [1]) con

$$Z^+ = G,$$

si ha (v. (8) e [1], n.° 2):

$$|Z| = n, \qquad \text{car } Z \mid m. \tag{9}$$

Da queste (9), per il teor. 3 di [1] (n.° 6), risulta appunto l'esistenza di un anello A con car $A = m$ e $|E_s(A)| = n$.

IV. *Sia dato un qualsiasi numero intero $n > 0$. Allora esiste un anello A con car $A = 0$ e $|E_s(A)| = n$.*

---

[4]) Il segno $\times$ è usato (qui e nel seguito, salvo esplicito contrario avviso) per denotare il prodotto (cartesiano) di una famiglia finita (e non vuota) di gruppi o di anelli (v. [2], pp. 73 e 129).

[5]) esp G = esponente del gruppo G (v. [1], n.° 2).

Infatti, se Z è un qualsiasi zero-anello di ordine n:

$$| Z | = n,$$

l'ipotesi (23) del teor. 3 di [1] è certo soddisfatta per $m = 0$, e tale teorema dà appunto direttamente la IV.

3. Consideriamo ora il caso in cui $E_s(A)$ è infinito (e di potenza qualsiasi). Premettiamo alcune osservazioni.

Sulla base delle considerazioni esposte nel n.° 2 di [1], si verifica facilmente che

V. *Se* (G_i) $(i \in J)$ [6] *è una famiglia* (non vuota) *di gruppi* G_i (qualsiasi, non necessariamente abeliani) *allora* [7] [8]:

$$\text{esp } \Pi G_i = \text{mcm } (\text{esp } G_i).$$

Nelle stesse ipotesi (e con le stesse notazioni) della V ed usando per i gruppi G_i la notazione additiva, chiameremo (*gruppo*) *prodotto* (cartesiano) *discreto* della famiglia (G_i) $(i \in J)$, e lo denoteremo col simbolo

$$\Pi_d\, G_i,$$

il sottogruppo di ΠG_i costituito da quei particolari elementi (x_i) di ΠG_i, $(x_i \in G_i \ \forall i \in J)$, tali che $x_i = 0_i$ (= zero di G_i) tranne che per un numero finito (eventualmente vuoto) di indici $i \in J$ [9].

Ricordando che l'esponente di un gruppo è un multiplo dell'esponente di un suo qualsiasi sottogruppo ([11], p. 108, ex. 4), e che G_i è isomorfo ad un sottogruppo di $\Pi_d\, G_i$ $\forall i \in J$ ([8], p. 160), dalla V risulta subito che

$$\text{esp } \Pi_d\, G_i = \text{esp } \Pi G_i,$$

---

[6]) J denota un insieme (di indici) non vuoto qualsiasi (non necessariamente finito).

[7]) ΠG_i = gruppo prodotto (cartesiano) della famiglia (G_i) $(i \in J)$, (v. [2], p. 73).

[8]) mcm (esp G_i) = minimo comune multiplo ≥ 0 degli esp G_i (≥ 0), $(i \in J)$; (cfr. [1], n.° 2, (3) e (3')).

[9]) $\Pi_d\, G_i$ è chiamato « direct sum » dei G_i in [8] (p. 161, nota *) e « discrete direct sum » in [6] (p. 19).

cioè che:

VI. *Se valgono le stesse ipotesi della* V, *allora:*

$$\operatorname{esp} \Pi_d G_i = \operatorname{mcm} (\operatorname{esp} G_i).$$

Si osservi che se, in particolare, J è finito (nel qual caso notoriamente $\Pi_d G_i = \Pi G_i$) e se inoltre $\operatorname{esp} G_i > 0 \ \forall i \in J$, allora le V e VI coincidono con l'ex. I.6.m. di [10] (p. 27), usato sopra nella prova della III.

Ricordiamo ora che (cfr. [6], p. 20, 3° capov.):

VII. *Se valgono le stesse ipotesi della* V, *e se inoltre*: 1°) J *è infinito*, 2°) $|G_i| > 1$ *per ogni* $i \in J$, *allora* [10]):

$$|\Pi_d G_i| = \Sigma |G_i| .$$

Ciò premesso proviamo che:

VIII. *Siano dati un qualsiasi numero intero* $m > 1$, *ed un qualsiasi numero cardinale infinito* c. *Allora esiste un anello* A *con* $\operatorname{car} A = m$ *e* $|E_s(A)| = c$.

Infatti, se J è un insieme (infinito) tale che

$$|J| = c,$$

poniamo [11]):

$$G_i = (I/(m))^+ \qquad \forall i \in J;$$

quindi $|G_i| = m \ \forall i \in J$. La famiglia $(G_i)(i \in J)$ così definita soddisfa dunque tutte le ipotesi della VII. Posto

$$G = \Pi_d G_i ,$$

G è un gruppo abeliano additivo con

$$|G| = c, \qquad \operatorname{esp} G = m.$$

([10]) $\Sigma |G_i|$ = somma (cardinale) della famiglia di numeri cardinali ($|G_i|$) ($i \in J$), ([3], p. 58).

[11]) [1]: note [4]) e [7]).

E invero, per la VII si ha ([3], pp. 59, 60, 65, 95): $|G| = \Sigma |G_i| = m|J| = mc = c$, ed inoltre, poichè esp $G_i = m \; \forall i \in J$, dalla VI risulta appunto esp $G = m$. Dunque, per lo zero-anello Z con $Z^+ = G$, si ha ([1], n.^{0} 2):

$$|Z| = c, \qquad \text{car } Z = m. \tag{10}$$

Da queste (10), per il teor. 3 di [1], risulta appunto la tesi della VIII.

IX. *Sia dato un qualsiasi numero cardinale infinito c. Allora esiste un anello A con* car $A = 0$ *e* $|E_s(A)| = c$.

Infatti, sia Z un qualsiasi zero-anello di ordine c: $|Z| = c$. Un tale Z è ad es. quello considerato nella prova della VIII, oppure (più semplicemente) quello il cui gruppo additivo Z^+ è il gruppo additivo dell'anello (booleano) F di tutti i sottoinsiemi finiti di un insieme (infinito) M, con $|M| = c$ (v. [9], p. 7 e [3], p. 96, Prop. 5). Dal teor. 3 di [1], certo applicabile per $m = 0$, risulta allora appunto la tesi della IX. Si osservi che, poiché (cfr. [9], pp. 141, 143):

$$|F^+| = c, \qquad \text{esp } F^+ = 2,$$

per tale zero-anello Z (con $Z^+ = F^+$) si ha

$$|Z| = c, \qquad \text{car } Z = 2,$$

e quindi esso può servire pure a dare un'altra prova della VIII, limitatamente però al caso in cui m sia pari (poiché, in tal caso, vale appunto l'ipotesi (23) del teor. 3 di [1]).

4. In base ai risultati fin qui ottenuti valgono i due lemmi seguenti.

LEMMA 1: *Siano dati un qualsiasi numero cardinale*

$$c > 0 \tag{11}$$

ed un qualsiasi numero intero m, con

$$0 \leq m \neq 1. \tag{12}$$

Allora la seguente condizione (13):

(13) ogni [12]) fattore primo di c divide m, se c è finito

è necessaria e sufficiente affinché esista (almeno) *uno zero-anello* ([1]: nota [10])) Z *tale che* (n.° 1; [1]: nota [5])):

$$|Z| = c, \qquad \operatorname{car} Z \mid m. \tag{14}$$

Infatti, la sufficienza della (13) è stata provata nel corso delle dimostrazioni delle III, IV, VIII e IX. Per quanto riguarda la necessità, supponiamo che esista uno zero-anello Z soddisfacente le (14), che c sia finito, e che p sia un fattore primo di c, cioè che (v. $(14)_1$):

$$p \mid |Z^+|.$$

Ma allora, per il teor. di Cauchy (cfr. n.° 1), esiste uno $z \in Z$ tale che $p = \operatorname{ord} z$. Ma ([1], n.° 2) $\operatorname{ord} z \mid \operatorname{car} Z$, e quindi (v. $(14)_2$) $p \mid m$, cioè vale appunto la (13).

Lemma 2: *Siano dati un qualsiasi numero cardinale c ed un qualsiasi numero intero m soddisfacenti le* (11) *e* (12). *Allora la condizione* (13) *è necessaria e sufficiente affinché esista* (almeno) *un anello A tale che* (n.° 1):

$$|E_s(A)| = c, \qquad \operatorname{car} A = m. \tag{15}$$

Infatti, ciò è stato appunto provato nei n.i 1, 2, e 3.

Facciamo ora un'osservazione riguardante la ben nota costruzione (dovuta a Dorroh: [4]) mediante la quale un anello qualsiasi A può essere immerso in un anello dotato di identità (bilatera). Di solito, in tale costruzione, si adopera l'anello I degli interi (come ad es. in [8], p. 84), oppure (quando si vuole conservare la caratteristica) l'anello $I/(\operatorname{car} A)$ (come ad es. in [9], p. 87). La caratteristica dell'estensione di A così ottenuta è nel 1^0 caso $= 0$, nel 2^0 caso $= \operatorname{car} A$. Ebbene, 0 e car A son due particolari multipli (interi ≥ 0)

---

[12]) (eventuale)

di car A. È dunque naturale pensare al caso generale di una estensione di A dotata di identità ed avente caratteristica $= m$, con m multiplo (com'è necessaro: v. [1], VII), arbitrariamente prefissato, di car A:

$$\text{car } A \mid m.$$

In realtà, adoperando nella costruzione di Dorroh l'anello $I/(m)$ invece di I o di $I/(\text{car } A)$, nulla cambia, neanche la verifica dell'univocità della moltiplicazione (cfr. [9], p. 87, e [1], prova della XX). Concludendo:

X. (Costruzione di Dorroh generalizzata.) *Sia A un anello qualsiasi, ed $m \geq 0$ sia un qualsiasi multiplo (intero) della sua caratteristica:*

$$\text{car } A \mid m. \tag{16}$$

Allora l'insieme prodotto cartesiano $(I/(m) =$ anello degli interi modulo $m)$:

$$(I/(m)) \times A \tag{17}$$

è un anello, che denoteremo con $A\{1, m\}$, *rispetto alle seguenti addizione e moltiplicazione* $(q_i \in I, \overline{q_i} = q_i + (m) \in I/(m),\ a_i \in A;\ i = 1, 2)$:

$$(\overline{q_1}, a_1) + (\overline{q_2}, a_2) = (\overline{q_1} + \overline{q_2},\ a_1 + a_2), \tag{18}$$

$$(\overline{q_1}, a_1)(\overline{q_2}, a_2) = (\overline{q_1}\,\overline{q_2},\ q_1 a_2 + q_2 a_1 + a_1 a_2). \tag{19}$$

Questo anello $A\{1, m\}$ *è dotato di una identità* (bilatera), *contiene un ideale* (bilatero) A' *isomorfo all'anello* A [13]), *ed ha caratteristica m:*

$$\text{car } A\{1, m\} = m. \tag{20}$$

Ciò premesso, proviamo il seguente

---

[13]) Si noti che l'identità $(\overline{1}, 0)$ di $A\{1, m\}$ non appartiene all'ideale A' se, e solo se, $m \neq 1$.

TEOREMA 1: *Sia A un qualsiasi anello non nullo* [14]):

$$A \neq \{0\}, \tag{21}$$

ed $m \geq 0$ sia un qualsiasi multiplo (intero) della sua caratteristica:

$$\operatorname{car} A \mid m. \tag{22}$$

Allora A può essere immerso ([8], p. 84) *in un anello R contenente esattamente c identità sinistre* (n.° 1) *ed avente caratteristica m,* cioè tale che (n.° 1):

$$|E_s(R)| = c, \qquad \operatorname{car} R = m, \tag{23}$$

c essendo un numero cardinale > 0 prefissato ad arbitrio, con l'unica (necessaria: v. n.° 1, I) *restrizione, nel caso in cui c sia finito, che ogni* (eventuale) *fattore primo di c sia un divisore di m.*

Infatti (identificando A con la sua immagine isomorfa $A' \subseteq A\{1,m\}$: cfr. [8], pp. 86, 91) possiamo pensare che A sia un sottoanello dell'anello $A\{1, m\}$ considerato nella X, il quale è dotato di una identità (bilatera) 1 $(= (\overline{1}, 0))$ ed ha caratteristica m:

$$A \subseteq A\{1, m\}, \qquad \operatorname{car} A\{1, m\} = m. \tag{24}$$

Poiché $0 \leq m \neq 1$ ($m \neq 1$ in base alle ipotesi (22) e (21) [15])), per il lemma 2 esiste un anello B tale che

$$|E_s(B)| = c, \qquad \operatorname{car} B = m. \tag{25}$$

Poniamo allora [4]:

$$R = A\{1, m\} \times B. \tag{26}$$

Poiché notoriamente $A\{1, m\}$ è isomorfo ad un sottoanello di R, A è appunto immerso in R (v. $(24)_1$). È poi chiaro che un elemento (a, b) di R ($a \in A\{1, m\}$, $b \in B$) è una identità sinistra di R se, e solo

---

[14]) [1]: nota [3]).

[15]) Si noti che (cfr. [1], n.° 2), per un anello A: $\operatorname{car} A = 1$ se e solo se A è nullo

se, $a = 1$ e $b \in E_s(B)$, cioè che

$$E_s(R) = \{1\} \times E_s(B)$$

($\times$ denotando qui insieme prodotto cartesiano); quindi evidentemente

$$| E_s(R) | = | E_s(B) | ,$$

e perciò (v. $(25)_1$) vale appunto la $(23)_1$. Infine (poiché evidentemente $R^+ = A\{1, m\}^+ \times B^+$), per la V risulta (v. [1], n.° 2):

$$\text{car } R = \text{mcm}(\text{car } A\{1, m\}, \text{car } B),$$

quindi (v. $(24)_2$ e $(25)_2$) vale appunto la $(23)_2$, e il teorema 1 è provato.

5. Supponiamo ancora valide tutte le ipotesi e le notazioni del teorema 1, *supponiamo inoltre che l'anello B soddisfacente le* (25) *sia* E_s*-generato* (tale era effettivamente l'anello fornito dal lemma 1, per mezzo del teor. 3 di [1], nella prova del lemma 2), ed esaminiamo nuovamente l'anello R definito dalla (26).

In base alla (26), R è composto diretto ([2], p. 131) di due sottoanelli risp. isomorfi ad $A\{1, m\}$ e a B. Pensando questi ultimi risp. identificati a quei sottoanelli (cfr. [8], pp. 86, 91), denotando inoltre con e_0 *una fissata identità sinistra di* B, l'anello R si presenta allora come l'insieme di tutte le somme

$$q1 + a + q'e_0 + z \qquad (q, q' \in I,\ a \in A,\ z \in Z_s(B)). \tag{27}$$

E invero $q1 + a$ è appunto l'espressione di ogni elemento dell'anello $A\{1, m\}$, poiché quest'ultimo è somma diretta gruppale (cfr. [2], p. 131) del suo sottoanello $I1$ [16]) (generato dalla sua identità 1 ed isomorfo ad $I/(m)$) e del suo ideale A, (v. X, ricordando che A è già stato identificato ad A', e la formula finale di [1], leggendovi a invece di z); inoltre $q'e_0 + z$ è appunto l'espressione di ogni elemento di B

---

[16]) [1]: [11]).

per il teor. 2 di [1] (n.° 5). Nell'anello R risulta dunque ($q_i, q_i' \in I$, $a_i \in A$, $z_i \in Z_s(B)$; $i = 1, 2$):

$$q_1 1 + a_1 + q_1' e_0 + z_1 = q_2 1 + a_2 + q_2' e_0 + z_2 \tag{28}$$

se, e solo se, valgono le quattro seguenti (28′):

$$q_1 \equiv q_2 \pmod m,\ a_1 = a_2,\ q_1' \equiv q_2' \pmod m,\ z_1 = z_2\,. \tag{28'}$$

Ricordando ora un'osservazione fatta nella prova del teor. 1 a proposito di $E_s(R)$, e facendone una analoga a proposito di $Z_s(R)$, si vede subito che

$$Z_s(R) = Z_s(B) \tag{29}$$

(si noti che lo zero è l'unico annullatore sinistro di $A\{1, m\}$: v. [1], II), e quindi che (v. [1], I):

$$E_s(R) = (1 + e_0) + Z_s(B), \tag{30}$$

cioè che le identità sinistre di R sono le somme del tipo

$$1 + e_0 + z \qquad (z \in Z_s(B)). \tag{31}$$

Si osservi che nessuna identità sinistra di R appartiene ad A:

$$E_s(R) \cap A = \varnothing, \tag{32}$$

poiché $1 + e_0 + z = a \in A$ implicherebbe (v. (28′)) $1 \equiv 0 \pmod m$, quindi $m = 1$, mentre sappiamo che $m \neq 1$.

Ricordando ([2], p. 131) come si moltiplicano gli elementi $(q1 + a) + (q'e_0 + z)$ dell'anello R, composto diretto dei suoi sottoanelli $A\{1, m\}$ e B, possiamo subito verificare che ogni identità sinistra $1 + e_0 + z$ (v. 31)) di R è permutabile con ogni elemento a di A:

$$(1 + e_0 + z)\, a = a\,(1 + e_0 + z) = a. \tag{33}$$

E invero $(1 + (e_0 + z))\,(a + 0) = 1a + (e_0 + z)\,0 = a$, $(a + 0)\,(1 + (e_0 + z)) = a\,1 + 0\,(e_0 + z) = a$, poiché 1 è l'identità bilatera

di $A\{1, m\}$ (si ricordi la $(24)_1$). Per lo stesso motivo (v. (29), (26), $(24)_1$), ogni annullatore sinistro z di R ($z \in Z_s(R)$) è permutabile con ogni elemento a di A:

$$za = az = 0; \tag{34}$$

e si osservi pure (v. (29), (26), $(24)_1$) che lo zero è l'unico annullatore sinistro di R che appartenga ad A:

$$Z_s(R) \cap A = \{0\}. \tag{35}$$

Sempre per le proprietà moltiplicative del composto diretto R, poiché A è un ideale (bilatero) di $A\{1, m\}$ (v. X, ricordando che A è stato identificato ad A'), allora (cfr. [2], p. 130):

(36) A è un ideale (bilatero) di R.

Chiamiamo H il sottinsieme di R costituito da quelle particolari somme (27) con

$$q \equiv q' \pmod{m}.$$

È chiaro (poiché allora $qe_0 = q'e_0$) che H è l'insieme delle somme del tipo

$$q(1 + e_0) + z + a \qquad (q \in I, z \in Z_s(B), a \in A). \tag{37}$$

Se $h_1, h_2 \in H$, allora $h_1 - h_2 \in H$ (ciò è evidente) ed $h_1 h_2 \in H$ (ciò si verifica subito, ricordando che $1 + e_0 \in E_s(R)$, che $z \in Z_s(R)$, e che ciascuno di questi due elementi è permutabile con ogni elemento di A: v. (33) e (34)). Dunque H è un sottoanello di R. Evidentemente (v. (37), (29) e (31)) H contiene A, $Z_s(R)$ e $E_s(R)$. Il fatto che il sottoanello H di R contenga $E_s(R)$ implica (per la XI di [1], n.° 3, poiché $E_s(R) \neq \varnothing$) che

$$E_s(H) = E_s(R), \quad Z_s(H) = Z_s(R). \tag{38}$$

Inoltre la (36) implica che:

(39) A è un ideale (bilatero) di H.

Se poniamo

$$e = 1 + e_0 , \tag{40}$$

allora (v. (31) e $(38)_1$): $e \in E_s(H) = E_s(R)$, quindi $\operatorname{car} H = \operatorname{ord} e = \operatorname{car} R$ (v. [1], n.° 2, VIII), donde (per la $(23)_2$):

$$\operatorname{car} H = m. \tag{41}$$

6. In base alle considerazioni del n.° 5, vale il seguente

TEOREMA 2 [17]: *Sia dato un qualsiasi anello A. Siano dati inoltre:*

1°) un numero cardinale $c > 0$,

2°) un numero intero $m \geq 0$,

3°) uno zero-anello Z,

del tutto arbitrari purché soddisfacenti le seguenti necessarie [18] *condizioni* (42) [19]:

$$\operatorname{car} A \mid m, \quad \operatorname{car} Z \mid m, \quad |Z| = c. \tag{42}$$

Allora esiste un sopraanello R di A tale che:

$$|E_s(R)| = c, \quad \operatorname{car} R = m, \quad Z_s(R) \cong Z, \tag{43}$$

e tale inoltre che:

$$A \text{ è un ideale (bilatero) di } R, \tag{44}$$

$$E_s(R) \cap A = \varnothing \text{ se } m \neq 1\ ^{15}), \quad Z_s(R) \cap A = \{0\}, \tag{45}$$

$$e \in E_s(R) \text{ implica } ea = ae = a \ \forall\, a \in A, \tag{46}$$

$$z \in Z_s(R) \text{ implica } za = az = 0 \ \forall\, a \in A, \tag{47}$$

$$R^+ = [[E_s(R)]]^+ \oplus A^+. \tag{48}$$

---

[17]) Per le locuzioni e i simboli qui usati, si vedano i primi quattro numeri di [1] e la nota [12]) di [1].

[18]) Si vedano la II del n.° 1 di [1], e la VII del n.° 2 di [1], ricordando che $Z_s(R)$ è un sottoanello di R.

[19]) Si noti (v. n.° 4, lemma 1) che le $(42)_2$ e $(42)_3$ implicano la (13).

Fissata una qualsiasi identità sinistra e di R:

$$e \in E_s(R), \tag{49}$$

è dunque [20]:

$$R^+ = [[e]]^+ \oplus Z_s(R)^+ \oplus A^+, \tag{48'}$$

quindi [21] *l'anello R è l'insieme di tutte le somme:*

$$qe + z + a \qquad (q \in I, z \in Z_s(R), a \in A), \tag{50}$$

per le quali si hanno [22] *le seguenti regole di calcolo* ($q_i \in I, z_i \in Z_s(R)$, $a_i \in A$; $i = 1, 2$):

$$q_1 e + z_1 + a_1 = q_2 e + z_2 + a_2 \tag{51}$$

se, e solo se, valgono le seguenti (51'):

$$q_1 \equiv q_2 \pmod m,\ z_1 = z_2,\ a_1 = a_2; \tag{51'}$$

$$(q_1 e + z_1 + a_1) + (q_2 e + z_2 + a_2) = (q_1 + q_2) e + (z_1 + z_2) + (a_1 + a_2); \tag{52}$$

$$(q_1 e + z_1 + a_1)(q_2 e + z_2 + a_2) = (q_1 q_2) e + q_1 z_2 + (q_1 a_2 + q_2 a_1 + a_1 a_2). \tag{53}$$

Tale sopraanello R di A soddisfacente le (43)-(48) *è univocamente determinato, a meno di isomorfismi, dai dati A, c, m, Z.*

Prova del teorema 2.

Se $m = 1$, il teor. 2 è vero, ma è banale, poiché allora R deve essere nullo [15] (v. $(43)_2$) al pari di A e di Z (quindi $c = 1$). Supponiamo perciò nel resto di questa prova

$$m \neq 1. \tag{54}$$

---

[20]) Si vedano la XI del n.° 3 di [1], l'inizio del n.° 4 di [1], e la XVII del n.° 5 di [1].

[21]) Si veda la XVI del n.° 5 di [1].

[22]) Per la $(51')_1$, si vedano la VIII del n.° 2 di [1], la $(43)_2$, e la (2) del n.° 2 di [1]. Per la (53), si veda la (10) del n.° 5 di [1], e si ricordino la (49), la definizione di $Z_s(R)$ (n.° 1 di [1]) e le (46), (47).

Se A è nullo, l'esistenza e l'unicità (a meno di isomorfismi) di un tale R sono assicurate dal teor. 3 di [1] (n.^{0} 6). Si noti che la $(42)_1$ è soddisfatta poiché car $A = 1$ [15]), che la $(45)_1$ è vera per la III del n.^{0} 1 di [1] (R non è nullo per le $(43)_2$, (54) [15])), e che le regole di calcolo (51)-(53) coincidono, per $a_i = 0$, con le regole (17)-(19) del teor. 2 del n.^{0} 5 di [1].

Se A non è nullo, l'anello R del teor. 2 non è altro che l'anello H la cui esistenza è stata provata nel n.^{0} 5 (basandosi sul teor. 1), purché naturalmente ora si pensi che l'anello E_s-generato B ivi usato in partenza (v. n.^{0} 5, 1^0 capov.) sia l'anello ottenuto dal dato zero-anello Z (si vedano le ipotesi del teor. 2) per mezzo del teor. 3 del n.^{0} 6 di [1], e quindi tale da soddisfare, oltre le (25), anche (v. $(24)_1$ di [1]) la seguente (55):

$$Z_s(B) \cong Z. \tag{55}$$

È appunto da questa (55) e dalle (29), $(38)_2$ che ora risulta anche $Z_s(H) \cong Z$, come vuole la $(43)_3$. Per quanto poi riguarda le altre affermazioni $(43)_1$, $(43)_2$ e (44)-(48) del teor. 2, esse sono appunto esplicitamente enunciate per l'anello H nel n.^{0} 5, oppure si ricavano subito (in modo evidente) da quanto ivi detto. Dunque l'esistenza dell'anello R è provata anche in questo caso. Per provarne infine l'unicità (a meno di isomorfismi), supponiamo che per due sopraanelli R ed R' di A siano vere le (43)-(48) del teor. 2. Allora, in base alle (43), è

$$\text{car } R = \text{car } R' = m, \quad Z_s(R) \cong Z_s(R'). \tag{56}$$

Quindi, se f è un isomorfismo di $Z_s(R)$ sopra $Z_s(R')$, fissati a piacere $e \in E_s(R)$ ed $e' \in E_s(R')$, la corrispondenza

$$qe + z + a \longrightarrow qe' + f(z) + a \qquad (q \in I, z \in Z_s(R))$$

risulta appunto (in virtù delle (50)-(53) del teor. 2 e della $(56)_1$) un isomorfismo di R sopra R' (che subordina l'identità su A). Il teorema 2 è dunque completamente dimostrato.

OSSERVAZIONE. *Se in particolare* $c = 1$, *e quindi se* (v. $(42)_3$) Z *è nullo*, il sopraanello R di A dato dal teorema 2 è evidentemente isomorfo (cfr. n.^{0} 5, 2^0 capov.) all'*« estensione di Dorroh generalizzata »* $A\{1, m\}$ di A (v. X, $(43)_1$ e il 2^0 capov. dell'introduzione di [1]), la quale poi coincide con l'estensione di Dorroh usuale se, inoltre, $m = 0$ oppure $m = \operatorname{car} A$ (cfr. n.^{0} 4). Le regole di calcolo (51)-(53) coincidono appunto, per $z_i = 0$, con quelle (ben note) che valgono in tale estensione.

7. Diremo che un anello A è *composto subdiretto* di due anelli A_1 e A_2, e scriveremo

$$A = A_1 \oplus_s A_2 \tag{57}$$

se A contiene due ideali (bilateri) Q_1 e Q_2 tali che

$$Q_1 \cap Q_2 = \{0\} \tag{58}$$

e tali inoltre che

$$A/Q_1 \cong A_1\,, \quad A/Q_2 \cong A_2\,. \tag{59}$$

Ciò equivale a dire, con la terminologia di Jacobson (v. [8′], p. 14, 6^0 capov.), che A è isomorfo ad una « subdirect sum » di A_1 e A_2 (la quale, si ricordi, è un sottoanello di tipo particolare dell'anello prodotto cartesiano $A_1 \times A_2$).

Per facilitarne la citazione, denoteremo nel seguito con

$$\{c, m\}\, Z \tag{60}$$

l'anello E_s-generato (ivi denotato con A) definito dalle (26), (27), (28) del n.^{0} 6 di [1]. Si ricordi che $\{c, m\}\, Z$ ha esattamente

$$c = |\, Z\,| \tag{60′}$$

elementi unità sinistri, che esso ha caratteristica m, e che il suo annichilatore sinistro è isomorfo a Z.

Ricordando che abbiamo denotato con

$$A\{1, m\} \tag{61}$$

l' « estensione di Dorroh generalizzata » dell'anello A (dotata di 1 ed avente caratteristica m) definita dalle (17), (18), (19) del n.^{0} 4, osserviamo allora che:

XI. *L'anello R del teorema* 2 (n.^{0} 6) *contiene due sottoanelli S_1 e S_2 isomorfi agli anelli $A\{1, m\}$ e $\{c, m\}Z$:*

$$R \supseteq S_1 \cong A\{1, m\}, \quad R \supseteq S_2 \cong \{c, m\}Z, \tag{62}$$

ed è, inoltre, composto subdiretto di questi stessi due anelli:

$$R = A\{1, m\} \oplus_s \{c, m\}Z. \tag{63}$$

Infatti, in base alle regole (51)-(53), S_1 e S_2 sono risp. costituiti dalle somme (50) con $z = 0$ (cfr. n.^{0} 5, 2^0 capov.) e da quelle con $a = 0$ (v. le regole (17)-(19) del n.^{0} 5 di [1]), e ciò prova appunto le (62). Per quanto poi riguarda la (63), basta osservare che le due applicazioni

$$qe + z + a \to qe + a, \qquad qe + z + a \to qe + z$$

sono risp. un omomorfismo di R sopra S_1 con nucleo $Z_s(R)$ ed un omomorfismo di R sopra S_2 con nucleo A. Ricordando gli isomorfismi (62) risulta quindi

$$R/Z_s(R) \cong A\{1, m\}, \quad R/A \cong \{c, m\}Z. \tag{64}$$

Queste (64) e la $(45)_2$ provano appunto la (63) (v. (57)-(59)).

Il risultato (63) ricorda il modo nel quale è stato trovato (v. n.^{0} 5) l'anello R del teor. 2 (isomorfo, appunto, ad un particolare sottoanello dell'anello prodotto cartesiano $A\{1, m\} \times \{c, m\}Z$).

8. È interessante osservare che la semplice struttura dell'anello R del teorema 2 (n.^{0} 6), messa in luce da quel teorema, suggerisce, in modo evidente (v. le formule (50)-(53)), la seguente costruzione diretta, altrettanto semplice, di R.

TEOREMA 3: *Sia dato un qualsiasi anello A. Siano dati inoltre*:
1⁰) un numero cardinale $c > 0$,
2⁰) un numero intero $m \geq 0$,
3⁰) uno zero-anello Z,
del tutto arbitrari purché soddisfacenti le necessarie condizioni (42). *Allora l'insieme prodotto cartesiano* $(I/(m)$ = anello degli interi modulo $m)$:

$$(I/(m)) \times Z \times A \tag{65}$$

è un anello, che denotiamo con R, rispetto alle seguenti addizione e moltiplicazione $(q_i \in I,\ \bar{q}_i = q_i + (m) \in I/(m),\ z_i \in Z,\ a_i \in A;\ i = 1, 2)$:

$$(\bar{q}_1, z_1, a_1) + (\bar{q}_2, z_2, a_2) = (\bar{q}_1 + \bar{q}_2, z_1 + z_2, a_1 + a_2), \tag{66}$$

$$(\bar{q}_1, z_1, a_1)(\bar{q}_2, z_2, a_2) = (\bar{q}_1 \bar{q}_2, q_1 z_2, q_1 a_2 + q_2 a_1 + a_1 a_2). \tag{67}$$

Questo anello R contiene un sottoanello isomorfo al dato anello A, sottoanello che denoteremo ancora con

$$A,$$

e soddisfa le condizioni (43), (44), (45), (46), (47) *e* (48).

Dopo quanto si è già detto in precedenza e nella prova della XX di [1] (n.⁰ 6), la prova di questo teorema 3 non presenta più alcuna difficoltà, e perciò viene omessa.

OSSERVAZIONE. Da questo teorema 3 viene ulteriormente (v. n.⁰ 4, X) generalizzata la ben nota « costruzione di Dorroh » (che si riottiene — con un'ovvia identificazione di terne a coppie — dal teor. 3 se in particolare $c = 1$, cioè se $Z = \{0\}$, e se inoltre $m = 0$ oppure $m = \operatorname{car} A$), e viene contemporaneamente generalizzata la costruzione XX del n.⁰ 6 di [1] (che si riottiene dal teor. 3 se in particolare $A = \{0\}$).

Per ricordare questi due fatti, si può denotare con

$$A\,\{c, m\}\,Z \qquad (c = |Z|) \tag{68}$$

l'anello (ivi denotato con R) definito dalle (65), (66), (67) del teor. 3. Il simbolo (68) si riduce (convenendo di non scrivere gli zeri esterni alle parentesi) ad $A\{1, m\}$ per $c = 1$ e $Z = 0$, e a $\{c, m\} Z$ per $A = 0$, simboli già usati (v. n.^{0} 7) per denotare appunto gli anelli ottenuti con le suddette due costruzioni. In base alla XI (n.^{0} 7), si può scrivere allora:

$$A\{c, m\} Z = A\{1, m\} \oplus_s \{c, m\} Z. \tag{69}$$

La (69) si può ora verificare direttamente, osservando che $A\{c, m\} Z$ è isomorfo al sottoanello dell'anello prodotto (cartesiano) $A\{1, m\} \times \{c, m\} Z$ costituito dalle particolari coppie $((\overline{q_1}, a), (\overline{q_2}, z))$ con $\overline{q_1} = \overline{q_2}$, e che questo sottoanello è appunto una « subdirect sum » (cfr. n.^{0} 7, 2^0 capov.) di $A\{1, m\}$ e $\{c, m\} Z$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Boccioni, D.: *Struttura degli anelli generati dai loro elementi unità sinistri,* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 39.

[2] Bourbaki, N.: *Algèbre, Chap. I,* Hermann (1958).

[3] Bourbaki, N.: *Théorie des ensembles, Chap. III,* Hermaun (1956).

[4] Dorroh, J. L.: *Concerning adjunctions to algebras,* Bull. Amer. Math. Soc., vol. 38, pp. 85-88 (1932).

[5] Faith, C. and Utumi, Y.: *Baer modules,* Archiv Math., vol. 15, pp. 266-270 (1964).

[6] Fuchs, L.: *Abelian groups,* Hung. Acad. Sci. (1958).

[7] Fuchs, L. and Halperin, I.: *On the imbedding of a regular ring in a regular ring with identity,* Fundamenta Math., vol. 54, pp. 285-290 (1964).

[8] Jacobson, N.: *Lectures in abstract algebra, Vol. I,* Van Nostrand (1951).

[8'] Jacobson, N.: *Structure of rings,* Amer. Math. Soc. (1956).

[9] McCoy, N. H.: *Rings and ideals,* The Math. Assoc. of America (1948).

[10] Schenkman, E.: *Group theory,* Van Nostrand (1965).

[11] Zassenhaus, H. J.: *The theory of groups,* Chelsea (1958).

Manoscritto pervenuto in Redazione il 20 luglio 1967.