Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Antonio Chiffi

Sulla rappresentazione delle correnti piane e chiuse

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 38 (1967), p. 80-85

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__38__80_0>

SULLA RAPPRESENTAZIONE DELLE CORRENTI PIANE E CHIUSE

ANTONIO CHIFFI *)

È noto [1]) che, se $T \in E_1(R^2)$ è una corrente intera, detta $\| T \|$ la misura variazione totale di T e detto $\vec{T}(x)$ il vettore tangente a T nel punto x, esiste una famiglia numerabile $\mathcal{F}$ di curve di R^2 di classe C^1 tale che per ogni $x \in R^2$, eccetto un insieme di punti x di misura $\| T \|$ nulla, $\vec{T}(x)$ è un vettore tangente in x ad una curva di $\mathcal{F}$ e si ha per ogni forma differenziale $\omega \in E^1(R^2)$:

$$T(\omega) = \int \omega(x) [\vec{T}(x)] \, \theta^1(\| T \|, x) \, dH^1(x) \tag{1}$$

dove $\theta^1(\| T \|, x)$ è la uno-densità, rispetto alla misura $\| T \|$ di R^n, nel punto x e H^1 è la misura uno-dimensionale di Hausdorff in R^2.

Dimostriamo (teorema 3) che, se $T \in E_1(R^2)$ è intera e chiusa, esiste una successione $\{\mathcal{C}_i\}$, eventualmente finita, di curve continue, chiuse, semplici e rettificabili, tali che per ogni forma $\omega \in E^1(R^2)$ si abbia:

$$T(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\mathcal{C}_i} \omega \tag{2}$$

---

*) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica Applicata - Università di Padova.

[1]) Cfr. [F F] teor. 8.16 a pag. 500. Ci riferiamo a questo lavoro per la terminologia e i simboli che useremo nel seguito.

e tali che, detta L_i la lunghezza della curva $\mathcal{C}_i$, si abbia:

$$M(T) = \sum_{i=1}^{\infty} L_i.$$

Si noti che la rappresentazione (2) è data mediante integrali curvilinei di forme differenziali, mentre la (1) è data mediante un integrale orientato su un insieme $(H^1, 1)$-rettificabile.

Indichiamo con $Z_1(R^2)$ la famiglia delle correnti di $I_1(R^2)$ chiuse; rimandiamo a [DG 1] e [DG 2] per la definizione di perimetro di un insieme e a [C 3] per la definizione di corrente irriducibile.

TEOREMA 1. *Sia $T \in Z_1(R^2)$ una corrente irriducibile. Esiste una curva $\mathcal{C}$ continua, chiusa, rettificabile e semplice, tale che per ogni forma differenziale $\omega \in E^1(R^2)$ si abbia:*

$$T(\omega) = \int_{\mathcal{C}} \omega \tag{3}$$

e tale che, detta L la lunghezza di $\mathcal{C}$, si abbia:

$$M(T) = L. \tag{4}$$

Nelle ipotesi dette esiste [2] un insieme E aperto, limitato, di perimetro finito, semplicemente connesso, con $R^2 - (E \cup \mathcal{F}E)$ connesso, tale che per ogni forma $\omega \in E^1(R^2)$ si abbia:

$$T(\omega) = \int_E d\omega, \qquad \text{oppure:} \quad T(\omega) = -\int_E d\omega \tag{5}$$

$$M(T) = H^1(\mathcal{F}E) = P(E). \tag{6}$$

Siano $N_x(t, \mathcal{F}E)$, $N_y(t, \mathcal{F}E)$ le funzioni definite nell'insieme R dei numeri reali associando ad ogni $t \in R$ il numero (finito, infinito o

[2] [C 4], teorema 4.4.

nullo) dei punti di intersezione di $\mathcal{F}E$ con le rette di equazione $x = t$ e $y = t$ rispettivamente. Le due funzioni di t: $N_x(t, \mathcal{F}E)$ e $N_y(t, \mathcal{F}E)$ sono misurabili; infatti se l'insieme $\mathcal{F}E$ si proietta ortogonalmente nell'intervallo $[a, b)$ dell'asse delle x, fissato l'intero $p > 0$ dividiamo $[a, b)$ in 2^p intervalli uguali semiaperti $\delta_{k,p}$, intersechiamo $\mathcal{F}E$ con la striscia dei punti di R^2 che si proiettano in $\delta_{k,p}$ e poi proiettiamo tale intersezione sull'asse delle y: otterremo un insieme misurabile del quale indichiamo con $\varphi_{k,p}(y)$ la funzione caratteristica. Si vede facilmente che è:

$$N_y(t, \mathcal{F}E) = \lim_{p \to \infty} \sum_k \varphi_{k,p}(t)$$

e la funzione $N_y(t, \mathcal{F}E)$ risulta misurabile. In modo analogo si vede che $N_x(t, \mathcal{F}E)$ è misurabile.

Dalla (6) e precisamente dall'essere $H^1(\mathcal{F}E) < \infty$ si deduce, per note relazioni riguardanti le misure delle sezioni di insiemi [3]), che le funzioni $N_x(t, \mathcal{F}E)$ e $N_y(t, \mathcal{F}E)$ sono sommabili. Esiste allora [4]) una curva $\mathcal{C}$ continua, chiusa e rettificabile, tale che sia:

$$[\mathcal{C}] = \mathcal{F}E \tag{7}$$

$$\int_E d\omega = \int_{\mathcal{C}} \omega \tag{8}$$

per ogni forma differenziale $\omega \in E^1(R^2)$.

Dalle proprietà di E e da risultati noti [5]) si deduce facilmente che tra le curve $\mathcal{C}$ verificanti le (7) e (8) ve ne è una semplice.

Se è: $T = \partial E$, dalla (8) e (5) segue la (3); se invece è: $-T = \partial E$, basta prendere in considerazione la curva $-\mathcal{C}$ e sostituirla alla $\mathcal{C}$ nella (3). La (4) segue dalle uguaglianze:

$$L = H^1([\mathcal{C}]) = H^1(\mathcal{F}E) = P(E)$$

---

[3]) [F 2], teor. 3.2 a pag. 243.

[4]) [C 1], teor. 1.III a pag. 12 e 2.1 a pag. 14.

[5]) [C 2], teorema 5.1 e definizioni 1.2, 1.3; infatti si verifica immediatamente che gli insiemi E_{ih} di quel teorema sono, nel caso presente, tutti vuoti ad eccezione di E_{11} che è uguale all'insieme E.

per la prima delle quali si può vedere [F 1], teor. 5.9 a pag. 144 e le altre seguono dalle (7) e (6).

OSSERVAZIONE 2. Abbiamo anche dimostrato che se l'insieme E è aperto, di perimetro finito, semplicemente connesso, con $R^2 - (E \cup \mathcal{F} E)$ connesso, esiste una curva continua $\mathcal{C}$ rettificabile, chiusa e semplice, tale che per le forme $\omega \in E^1(R^2)$ vale la formula di Green (8).

TEOREMA 3. *Sia $T \in Z_1(R^2)$; esiste una successione $\{\mathcal{C}_i\}$, eventualmente finita, di curve continue, chiuse, semplici e rettificabili, tali che per ogni forma $\omega \in E^1(R^2)$ si abbia:*

$$T(\omega) = \sum_i \int_{\mathcal{C}_i} \omega \tag{9}$$

e tale che, detta L_i la lunghezza della curva $\mathcal{C}_i$, si abbia:

$$M(T) = \sum_{i=1}^{\infty} L_i . \tag{10}$$

Nelle ipotesi poste esiste [6]) una successione $\{T_i\}$, eventualmente finita, di correnti rettificabili, chiuse e irriducibili, tali che:

$$T = \sum_i T_i$$

$$M(T) = \sum_i M(T_i).$$

Da queste uguaglianze, per il teorema 1, seguono le (9) e (10).

TEOREMA 4. *Sia E un insieme misurabile, limitato e di perimetro finito; esiste una successione $\{\mathcal{C}_i\}$, eventualmente finita, di curve continue, chiuse, semplici e rettificabili, tali che per ogni*

---

[6]) [C 3], teorema 7.

forma $\omega \in E^1(R^2)$ *si abbia:*

$$\int_E d\omega = \sum_i \int_{\mathcal{C}_i} \omega$$

e tali che, detta L_i *la lunghezza della curva* $\mathcal{C}_i$*, si abbia:*

$$P(E) = \sum_i L_i .$$

Il teorema 4 segue subito dal teorema 3, quando si identifichi il bordo di E con una corrente chiusa $T \in E_1(R^2)$, che risulta intera [7]).

---

[7]) [F F], teorema 8.14 a pag. 499.

BIBLIOGRAFIA

[C 1] A. CHIFFI: *Sulla formula di Green nel piano.* Ricerche di Matematica, vol. 9 (1960), pp. 3-17.

[C 2] A. CHIFFI: *La formula di Green per curve rettificabili.* Annali Scuola Norm. Sup. di Pisa, vol. 19 (1965) pp. 207-232.

[C 3] A. CHIFFI: *Correnti irriducibili.* Annali Scuola Norm. Sup. di Pisa, vol. 21 (1967).

[C 4] A. CHIFFI: *Correnti irriducibili e insiemi di perimetro finito.* Rendiconti Sem. Mat. Padova, vol. 37 (1966).

[DG 1] E. DE GIORGI: *Su una teoria generale della misura* $(r-1)$*-dimensionale in uno spazio a r dimensioni.* Annali di Matematica, vol. 36 (1954), pp. 191-213.

[DG 2] E. DE GIORGI: *Nuovi teoremi relativi alle misure* $(r-1)$*-dimensionali in uno spazio a r dimensioni.* Ricerche di Matematica, vol. 4 (1955), pp. 95-113.

[F 1] H. FEDERER: *The* (Φ, k) *rectifiable subsets of n space.* Trans. Am. Math. Soc., vol. 62 (1947), pp. 114-192.

[F 2] H. FEDERER: *Some integralgeometric theorems.* Trans. Am. Math. Society, vol. 77 (1954), pp. 238-261.

[F F] H. FEDERER and W. FLEMING: *Normal and integral currents.* Annals of Mathematics, vol. 72 (1960) pp. 458-520.

Manoscritto pervenuto in redazione il 3 novembre 1966.