

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIORGIO TALENTI

Osservazioni sopra un'equazione integrodifferenziale di Schrödinger

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 38 (1967), p. 305-330

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__38__305_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__38__305_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

OSSERVAZIONI SOPRA UN'EQUAZIONE INTEGRODIFFERENZIALE DI SCHRÖDINGER

GIORGIO TALENTI *)

Introduzione.

In alcune questioni di meccanica quantistica si considerano potenziali « non locali » ; per un potenziale non locale la equazione di Schrödinger assume la forma integrodifferenziale :

$$(1) \quad \Delta u(x) + k^2 u(x) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} V(x, y) u(y) dy,$$

dove :

$$x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3), dy = dy_1 dy_2 dy_3, \Delta = \sum_{i=1}^3 \partial^2 / \partial x_i^2 ;$$

k^2 è l'energia complessa, $V(x, y)$ è il potenziale assegnato, u è la funzione d'onda. Per l'equazione (1) si pongono i seguenti problemi:

a) Stati legati. È un problema di autovalori, con k^2 parametro e la condizione :

$$(2) \quad \iiint_{-\infty}^{+\infty} |u(x)|^2 dx = 1 ;$$

*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di ricerca n. 23 del Comitato Nazionale per la matematica del C.N.R.

Indirizzo dell'A: Istituto di Matematica, Università, Via L. B. Alberti 4 Genova.

si tratta cioè di trovare i valori di k^2 tali che esiste una soluzione di (1) a quadrato sommabile in tutto lo spazio.

b) Scattering. Il problema quantistico dello scattering consiste nel determinare le soluzioni u di (1), definite in tutto lo spazio, tali che

$$(3) \quad u(x) = \exp\left(ik \sum_{l=0}^3 a_l x_l\right) + \Phi(x)$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 0$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}(x) - ik \Phi(x) \right) = 0,$$

dove a_1, a_2, a_3 sono le componenti di un versore assegnato ($a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$) e $r = |x| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}$. L'ultima delle (3) è la condizione di radiazione di Sommerfeld ¹⁾.

Ha interesse studiare il problema b) in ipotesi tali sul potenziale V , che le soluzioni abbiano un andamento asintotico del tipo:

$$(4) \quad u(x) \sim \exp\left(ik \sum_{l=1}^3 a_l x_l\right) + f\left(k; \frac{x}{|x|}\right) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (r \rightarrow +\infty)$$

¹⁾ Sommerfeld [28] ha considerato il problema di determinare le soluzioni della equazione $\Delta u + k^2 u = 0$, che sono definite in un aperto illimitato D a frontiera limitata, assumono valori assegnati sulla frontiera di D e verificano la condizione $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| \left(\frac{\partial u}{\partial |x|} - iku \right) = 0$. Rellich [24] ha dimostrato un teorema di unicità per il problema di Sommerfeld; il teorema di Rellich è stato esteso da Atkinson [1], Wilcox [25], Levine [18]; cfr. anche Hellwing [14], Courant-Hilbert [6]. La condizione di radiazione di Sommerfeld è stata considerata, in una opportuna formulazione, anche per certe equazioni ellittiche e per equazioni ipolelittiche di ordine superiore; cfr. Parasjuk [23], Grosin [12]. La condizione di radiazione interviene anche nella teoria del decadimento delle soluzioni della equazione delle onde, in particolare nello studio del cosiddetto principio della « limiting amplitude »; cfr. in proposito Mihailov [19], Eidus [9], Bazdyrev [2], Buchal [5], Morawetz [20]-[21], Wilcox [26], Lax-Morawetz-Phillips [17], Zachmanoglou [27], Isakova [16], Gehrmann [11].

con f funzione analitica di k : le proprietà della funzione f — « ampiezza di scattering » — sono l'oggetto della teoria quantistica dello scattering ²⁾. Nel caso di potenziali « locali », cioè nel caso che l'equazione di Schrödinger abbia forma differenziale: $\Delta u(x) + k^2 u(x) = V(x)u(x)$, i problemi degli stati legati e dello scattering sono oggetto di notissime teorie: cfr. in proposito De Alfaro-Regge [7], Newton [22], che contengono un'estesa bibliografia. Invece i problemi a) e b) per la equazione integrodifferenziale (1) non sono stati finora trattati esaurientemente.

In [3], [4] è intrapreso lo studio dei problemi suddetti. Per semplicità, si considera un caso tipico: quello di un potenziale non locale a simmetria sferica $V(|x|, |y|)$. In questa ipotesi lo studio della funzione d'onda può essere ricondotto a quello di « onde parziali », cioè di termini dello sviluppo in serie di armoniche sferiche; fra le onde parziali ha rilievo dominante, come si riconosce facilmente, la prima — la cosiddetta « onda S » — rappresentata dalla equazione:

$$(5) \quad y''(r) + k^2 y(r) = \int_0^{+\infty} V(r, s) y(s) ds,$$

assieme alle condizioni:

$$(6) \quad y(0) = 0, \quad \int_0^{+\infty} |y(r)|^2 dr = 1,$$

²⁾ Il problema b) è lo schema di un fenomeno d'urto: un fascio di particelle viene accelerato e colpisce un ostacolo, l'urto provoca una diffusione di particelle; le misure sperimentali valutano il flusso delle onde diffuse. Matematicamente l'ostacolo è rappresentato dal potenziale $V(x, y)$; la funzione $Y(x) = \exp\left(ik \sum_{l=1}^3 a_l x_l\right)$ rappresenta l'onda incidente (che si considera piana) cioè l'onda che non è disturbata dal potenziale: questo è in accordo con il fatto che $Y(x)$ è soluzione della equazione « libera » $\Delta Y(x) + k^2 Y(x) = 0$. La funzione $\Phi(x)$ è l'onda diffusa, la funzione f che compare in (4) è connessa con lo sfasamento fra l'onda incidente e l'onda diffusa, e con il flusso dell'onda diffusa (che sono i dati sperimentali).

oppure

$$(7) \quad y(r) = \frac{\operatorname{sen} kr}{k} + \Phi(r), \quad \Phi(0) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} (\Phi'(r) - ik \Phi(r)) = 0.$$

In [3], [4] sono discussi i problemi (5) - (6) e (5) - (7) nella seguente ipotesi sul potenziale :

$$\int_0^{+\infty} e^{ar} dr \int_0^{+\infty} s e^{as} |V(r, s)| ds < +\infty \quad (\alpha > 0);$$

in particolare sono stabiliti questi risultati : (i) lo spettro (in k) del problema (5) - (6) è numerabile ed è contenuto in un cerchio ; (ii) il problema (5) - (7) ha soluzione (unica, in una conveniente classe funzionale) per ogni k tale che $|\operatorname{Im} k| \leq \alpha$, fatta eccezione per quei valori di k tali che il problema (5) - (6) ha soluzione ; (iii) la soluzione di (5) - (7) ha il comportamento asintotico :

$$y(r) \sim \frac{\operatorname{sen} kr}{k} + T(k) e^{ikr} \quad (r \rightarrow +\infty)$$

con $T(k)$ funzione analitica di k .

Nel presente lavoro si discutono i problemi (5) - (6) e (5) - (7) nella ipotesi :

$$\left[\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} |V(r, s)|^p dr \right)^{\frac{q}{p}} ds \right]^{\frac{1}{q}} < +\infty \quad \left(1 < p < +\infty; 1 \leq q \leq \frac{p}{p-1} \right).$$

1. Enunciato dei risultati.

Sia $V(r, s)$ una funzione misurabile tale che :

$$(8) \quad A = \left[\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} |V(r, s)|^p dr \right)^{\frac{q}{p}} ds \right]^{\frac{1}{q}} < +\infty$$

$$\left(1 < p < +\infty, 1 \leq q \leq p' = \frac{p}{p-1} \right);$$

sia k un numero complesso tale che $\operatorname{Im} k \neq 0$.

Consideriamo i seguenti problemi:

$$(a) \quad \begin{cases} \Phi''(r) + k^2 \Phi(r) = \int_0^{+\infty} V(r, s) \Phi(s) ds + f(r) & (r > 0) \\ \Phi(0) = 0, \lim_{r \rightarrow +\infty} (\Phi'(r) - ik \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k) \Phi(r)) = 0 \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} \chi''(r) + k^2 \chi(r) = \int_0^{+\infty} V(r, s) \chi(s) ds & (r > 0) \\ \chi(0) = 0, \left(\int_0^{+\infty} |\chi(r)|^{q'} dr \right)^{\frac{1}{q'}} = 1 & \left(q' = \frac{q}{q-1} \right). \end{cases}$$

Le soluzioni del problema (a) o del problema (b) che si considerano in questo lavoro sono funzioni con derivata prima assolutamente continua. Il problema (a) coincide con il problema (5) - (7) enunciato nell'introduzione, nel caso che:

$$\operatorname{Im} k > 0, f(r) = \int_0^{+\infty} V(r, s) \frac{\operatorname{sen} ks}{k} ds.$$

Sussistono questi teoremi:

TEOREMA 1. *Una delle seguenti due possibilità si verifica necessariamente ed esclude l'altra:*

1) *qualunque sia $f \in L^p(0, +\infty)$, esiste una ed una sola soluzione del problema (a) tale che:*

$$(a') \quad \left(\int_0^{+\infty} |\Phi(r)|^{q'} dr \right)^{\frac{1}{q'}} < +\infty;$$

2) *esiste una soluzione del problema (b).*

Le soluzioni Φ e χ dei problemi (a) - (a') e (b) hanno inoltre questa proprietà:

$$(9) \quad \left[\begin{array}{l} \Phi, \frac{\Phi}{x}, \Phi' \\ \chi, \frac{\chi}{x}, \chi' \end{array} \right] \in L^m(0, +\infty) \text{ per ogni } m \geq p.$$

Se $|\operatorname{Im} k| > (2A)^{pq(3pq-p-q)^{-1}}$, non esiste soluzione del problema (b) (dunque esiste soluzione del problema (a) - (a')).

Osservazione. A norma del teorema 1, se $p \leq 2$ le soluzioni del problema (b) hanno la proprietà:

$$0 < \int_0^{+\infty} |\chi(r)|^2 dr < +\infty;$$

dunque tali soluzioni, moltiplicate per un conveniente fattore di normalizzazione, sono soluzioni del problema (5) - (6) enunciato nella introduzione. Osserviamo anche che, se $p \leq 2$ e $q' = 2$, il problema (b) coincide con (5) - (6) (la condizione $p \leq 2$ segue dall'ipotesi $q \leq p'$ e dalla condizione $q' = 2$, che implicano: $p \leq q' = 2$).

TEOREMA 2. Sia Ω l'insieme dei numeri complessi k (con $\operatorname{Im} k \neq 0$) tali che il problema (a) - (a') ammette soluzione per ogni $f \in L^p(0, +\infty)$; sia $k \rightarrow f(k, \cdot)$ una funzione a valori in $L^p(0, +\infty)$, olomorfa in Ω^3 ; sia, per ogni $k \in \Omega$, $\Phi(k, \cdot)$ la soluzione del problema:

$$\frac{d^2}{dr^2} \Phi(k, r) + k^2 \Phi(k, r) = f(k, r) + \int_0^{+\infty} V(r, s) \Phi(k, s) ds,$$

³⁾ Questo significa: per ogni $k \in \Omega$, esiste una funzione $f'(k, \cdot) \in L^p(0, +\infty)$ tale che

$$\left\| \frac{f(k+h, \cdot) - f(k, \cdot)}{h} - f'(k, \cdot) \right\|_{L^p(0, +\infty)} \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0);$$

cfr. Hille-Phillips [15].

$$\Phi(k, 0) = 0, \lim_{r \rightarrow +\infty} \left[\frac{d}{dr} \Phi(k, r) - ik \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k) \Phi(k, r) \right] = 0,$$

$$\left(\int_0^{+\infty} |\Phi(k, r)|^{q'} dr \right)^{\frac{1}{q'}} < +\infty.$$

Si hanno queste proprietà:

1) Ω è aperto;

2) $k \rightarrow \frac{d^2}{dr^2} \Phi(k, \cdot) + k^2 \Phi(k, \cdot)$ è una funzione olomorfa in Ω ,

a valori in $L^2(0, +\infty)$;

3) per ogni fissato $r > 0$, $\Phi(\cdot, r)$ è olomorfa in Ω ;

$$4) k \rightarrow T(k) = - \int_0^{+\infty} \frac{\exp(ikt \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k))}{2ki \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)} (\Phi''(k, r) + k^2 \Phi(k, r)) dr$$

è funzione olomorfa in Ω e si ha:

$$\Phi(k, r) \sim T(k) e^{ikr \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)} \quad (r \rightarrow +\infty).$$

2. Lemmi.

LEMMA 1. Sia $h > 0$, $f(r) \in L^\lambda(-\infty, +\infty)$ ($1 \leq \lambda \leq +\infty$). *Sussistono le disegualianze:*

$$(1.1) \quad \left[\begin{array}{l} \|Tf\|_{L^\mu(-\infty, +\infty)} \\ \|T^*f\|_{L^\mu(-\infty, +\infty)} \end{array} \right] \leq h^{-1 + \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu}} \|f\|_{L^\lambda(-\infty, +\infty)} \quad (1 \leq \lambda \leq \mu \leq +\infty),$$

dove T, T^* sono gli operatori definiti dalle equazioni:

$$Tf(r) = e^{-hr} \int_{-\infty}^r e^{ht} f(t) dt, \quad T^*f(r) = e^{hr} \int_r^{+\infty} e^{-ht} f(t) dt^4)$$

4) Si può osservare che T^* è l'operatore aggiunto di T , nel senso che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(r) T^* v(r) dr = \int_{-\infty}^{+\infty} v(r) T u(r) dr.$$

Inoltre se $\lambda < +\infty$:

$$(1.3) \quad \lim_{r \rightarrow \pm\infty} Tf(r) = \lim_{r \rightarrow \pm\infty} T^*f(r) = 0.$$

Dimostrazione. Per via della relazione:

$$(T^*f)(-r) = e^{-hr} \int_{-\infty}^r e^{ht} f(-t) dt$$

è sufficiente riferirsi all'operatore T . Supponiamo $\lambda < +\infty$, la disuguaglianza (1.1) essendo evidente nel caso $\lambda = +\infty$. Si ha:

$$(1.4) \quad |Tf(r)| \leq h^{-1+\frac{1}{\lambda}} \left(e^{-hr} \int_{-\infty}^r e^{ht} |f(t)|^\lambda dt \right)^{\frac{1}{\lambda}}.$$

(1.4) è evidente se $\lambda = 1$; se $\lambda > 1$, si applica Hölder $\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} = 1\right)$:

$$\begin{aligned} |Tf(r)| &\leq e^{-hr} \int_{-\infty}^r e^{\frac{1}{\lambda'}ht + \frac{1}{\lambda}ht} |f(t)| dt \leq \\ &\leq e^{-hr} \left(\int_{-\infty}^r e^{ht} dt \right)^{\frac{1}{\lambda'}} \left(\int_{-\infty}^r e^{ht} |f(t)|^\lambda dt \right)^{\frac{1}{\lambda}} = \\ &= h^{-\frac{1}{\lambda'}} e^{-hr + \frac{1}{\lambda'}hr} \left(\int_{-\infty}^r e^{ht} |f(t)|^\lambda dt \right)^{\frac{1}{\lambda}}. \end{aligned}$$

Segue subito da (1.4):

$$(1.5) \quad |Tf(r)| \leq h^{-1+\frac{1}{\lambda}} \left(\int_{-\infty}^r |f(t)|^\lambda dt \right)^{\frac{1}{\lambda}} \leq h^{-1+\frac{1}{\lambda}} \|f\|_{L^\lambda(-\infty, +\infty)},$$

che implica (1.1) per $\mu = +\infty$.

Segue da (1.4) integrando per parti :

$$\begin{aligned}
 (1.6) \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} |Tf(r)|^\lambda dr \leq h^{1-\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} dr e^{-hr} \int_{-\infty}^r e^{ht} |f(t)|^\lambda dt = \\
 & = -h^{-\lambda} e^{-hr} \int_{-\infty}^r e^{ht} |f(t)|^\lambda dt \Big|_{-\infty}^{+\infty} + h^{-\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(r)|^\lambda dr \leq \\
 & \leq h^{-\lambda} \lim_{r \rightarrow -\infty} e^{-hr} \int_{-\infty}^r e^{ht} |f(t)|^\lambda dt + h^{-\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(r)|^\lambda dr \leq \\
 & \leq h^{-\lambda} \lim_{r \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^r |f(t)|^\lambda dt + h^{-\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(r)|^\lambda dr = h^{-\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(r)|^\lambda dr,
 \end{aligned}$$

che implica (1.1) per $\mu = \lambda$. Per (1.5) - (1.6), se $\lambda < \mu < +\infty$:

$$\begin{aligned}
 & \|Tf\|_{L^\mu(-\infty, +\infty)} \leq \|Tf\|_{L^\lambda(-\infty, +\infty)}^{\frac{\lambda}{\mu}} \|Tf\|_{L^\infty(-\infty, +\infty)}^{1-\frac{\lambda}{\mu}} \leq \\
 & \leq h^{-\frac{\lambda}{\mu} - (1-\frac{\lambda}{\mu})(-\frac{1}{\lambda}+1)} \|f\|_{L^\lambda(-\infty, +\infty)} = h^{-1+\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\mu}} \|f\|_{L^\lambda(-\infty, +\infty)}.
 \end{aligned}$$

Abbiamo così provato (1.1). Per provare (1.3) integriamo per parti l'integrale a secondo membro di (1.4) :

$$\begin{aligned}
 (1.8) \quad & e^{-hr} \int_{-\infty}^r e^{ht} |f(t)|^\lambda dt = e^{-h(r-t)} \int_{-\infty}^t |f(s)|^\lambda ds \Big|_{-\infty}^r + \\
 & - h e^{-hr} \int_{-\infty}^r e^{ht} \left(\int_{-\infty}^t |f(s)|^\lambda ds \right) dt = \\
 & = \int_{-\infty}^r |f(s)|^\lambda ds - h \frac{\int_{-\infty}^r e^{ht} \left(\int_{-\infty}^t |f(s)|^\lambda ds \right) dt}{e^{hr}} ;
 \end{aligned}$$

nei passaggi precedenti abbiamo tenuto conto della relazione :

$$e^{-h(r-t)} \int_{-\infty}^t |f(s)|^\lambda ds \leq \int_{-\infty}^t |f(s)|^\lambda ds \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow -\infty).$$

Per la regola dell'Hôpital :

$$\begin{aligned} (1.9) \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\int_{-\infty}^r e^{ht} \left(\int_{-\infty}^t |f(s)|^\lambda ds \right) dt}{e^{hr}} &= \\ &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{h} \int_{-\infty}^r |f(s)|^\lambda ds = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(s)|^\lambda ds. \end{aligned}$$

Da (1.4) - (1.8) - (1.9) segue :

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} Tf(r) = 0 ;$$

si ha poi, per (1.4) :

$$|Tf(r)| \leq h^{-1 + \frac{1}{\lambda}} \left(\int_{-\infty}^r |f(t)|^\lambda dt \right)^{\frac{1}{\lambda}} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow -\infty),$$

dunque (1.3) è provata.

LEMMA 2. Sia : $h > 0$; $f(r) \in L^\lambda(0, +\infty)$ ($1 \leq \lambda \leq +\infty$) ;

$$g(r) = \int_0^{+\infty} e^{-h|r-t|} f(t) dt.$$

Risulta :

$$\|g\|_{L^\mu(0, +\infty)} \leq 2h^{-1 + \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu}} \|f\|_{L^\lambda(0, +\infty)} \quad (1 \leq \lambda \leq \mu \leq +\infty) ;$$

inoltre, se $\lambda < +\infty$:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} g(r) = 0.$$

Dimostrazione. Segue immediatamente dal Lemma 1, perchè :

$$g(r) = e^{-hr} \int_0^r e^{ht} f(t) dt + e^{hr} \int_r^{+\infty} e^{-ht} f(t) dt. \quad (5)$$

LEMMA 3. Sia $v(r) \in L^p(0, +\infty)$ ($1 \leq p \leq +\infty$); sia k tale che $\operatorname{Im} k \neq 0$. Esiste una ed una sola soluzione (con derivata prima assolutamente continua) del problema :

$$(3.1) \quad \begin{aligned} y''(r) + k^2 y(r) + v(r) &= 0 & (r > 0) \\ y(0) = 0, \lim_{r \rightarrow +\infty} (y'(r) - ik \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k) y(r)) &= 0. \end{aligned}$$

La soluzione di (3.1) ha la rappresentazione :

$$(3.2) \quad y(r) = \int_0^{+\infty} G(k; r, t) v(t) dt,$$

dove $G(k; r, t)$ è la funzione di Green :

$$(3.3) \quad G(k; r, t) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} kr}{k} e^{ikt \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)} & (r \leq t) \\ e^{ikr \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)} \frac{\operatorname{sen} kt}{k} & (r > t); \end{cases}$$

si hanno inoltre queste proprietà ;

$$(i) \quad \begin{aligned} |k| \|y\|_{L^m(0, +\infty)}, \left\| \frac{1}{r} y \right\|_{L^m(0, +\infty)}, \frac{2}{3} \|y'\|_{L^m(0, +\infty)} &\leq \\ &\leq 2 |\operatorname{Im} k|^{-1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{m}} \|v\|_{L^p(0, +\infty)} \text{ per ogni } m \geq p; \end{aligned}$$

⁵⁾ Il Lemma 2 potrebbe facilmente dedursi dalla disuguaglianza di Young sul « faltung » e dalle proprietà del prodotto di composizione; cfr. [13], teor. 280; [10], pagg. 350-351.

$$(ii) \quad y(r) \sim e^{ikr \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{ikt \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)}}{2ki \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)} v(t) dt \quad (r \rightarrow +\infty).$$

Dimostrazione. Esistenza. Proviamo che :

$$z(r) = \int_0^{+\infty} G(k; r, t) v(t) dt$$

è una soluzione di (3.1). Si trovano facilmente le disuguaglianze :

$$(3.4) \quad |G(k; r, t)| \leq \frac{1}{|k|} e^{-|\operatorname{Im} k| |r-t|}$$

$$(3.5) \quad |G(k; r, t)| \leq r e^{-|\operatorname{Im} k| |r-t|};$$

ne segue :

$$(3.6) \quad |z(r)| \leq \frac{1}{|k|} \int_0^{+\infty} e^{-|\operatorname{Im} k| |r-t|} |v(t)| dt,$$

$$\frac{1}{r} |z(r)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-|\operatorname{Im} k| \cdot |r-t|} |v(t)| dt,$$

dunque, per il Lemma 2, le prime due delle disuguaglianze (i) sono verificate. La condizione iniziale $z(0) = 0$ è evidentemente verificata; si ha poi :

$$(3.7) \quad \begin{aligned} z'(r) &= \frac{d}{dr} \left(e^{ikr \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)} \int_0^r \frac{\operatorname{sen} kt}{k} v(t) dt + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\operatorname{sen} kr}{k} \int_r^{+\infty} e^{ikt \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)} v(t) dt \right) = \\ &= ik \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k) z(r) + e^{-ikr \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)} \int_r^{+\infty} e^{ikt \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)} v(t) dt, \end{aligned}$$

⁶⁾ Ricordiamo che : $|\operatorname{sen}(\alpha + i\beta)| = (\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sh}^2 \beta)^{\frac{1}{2}} \leq (1 + \operatorname{sh}^2 \beta)^{\frac{1}{2}} = \operatorname{ch} \beta \leq e^{|\beta|}$; $\left| \frac{\operatorname{sen} z}{z} \right| = \frac{1}{2} \left| \int_{-1}^{+1} e^{izs} ds \right| \leq \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} e^{-s \operatorname{Im} z} ds \leq e^{|\operatorname{Im} z|}.$

dunque, per il Lemma 1:

$$|z'(r) - ik \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k) z(r)| \leq e^{r|\operatorname{Im} k|} \int_r^{+\infty} e^{-t|\operatorname{Im} k|} |v(t)| dt \rightarrow 0$$

($r \rightarrow +\infty$)

inoltre, per (3.6) - (3.7):

$$\begin{aligned} |z'(r)| &\leq |k| |z(r)| + e^{r|\operatorname{Im} k|} \int_r^{+\infty} e^{-t|\operatorname{Im} k|} |v(t)| dt \leq \\ &\leq \int_0^{+\infty} e^{-|\operatorname{Im} k| |r-t|} |v(t)| dt + e^{r|\operatorname{Im} k|} \int_0^{+\infty} e^{-t|\operatorname{Im} k|} |v(t)| dt, \end{aligned}$$

quindi, per i Lemmi 1 e 2, anche la terza delle (i) è verificata. Da (3.7) segue che $z'(r)$ è assolutamente continua; derivando, si verifica facilmente che l'equazione differenziale è soddisfatta. Per dimostrare (ii), rappresentiamo $z(r)$ nella forma seguente, che si deduce con facili calcoli dall'espressione della funzione di Green:

$$\begin{aligned} z(r) = e^{ikr \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)} &\int_0^{+\infty} \frac{e^{ikt \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)}}{2ki \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)} v(t) dt + \\ &- \frac{\operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)}{2ki} \left(e^{ikr \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)} \int_0^r e^{-ikt \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)} v(t) dt + \right. \\ &\left. + e^{-ikr \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)} \int_r^{+\infty} e^{ikt \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)} v(t) dt \right); \end{aligned}$$

il termine entro () non supera in modulo:

$$e^{-r|\operatorname{Im} k|} \int_0^r e^{t|\operatorname{Im} k|} |v(t)| dt + e^{r|\operatorname{Im} k|} \int_r^{+\infty} e^{-t|\operatorname{Im} k|} |v(t)| dt \rightarrow 0$$

($r \rightarrow +\infty$)

per il Lemma 1.

Unicità. Se $y'' + k^2 y + v = 0$, $y(0) = 0$, si ha necessariamente:

$$(3.9) \quad y(r) = C \frac{\operatorname{sen} kr}{k} + z(r),$$

dove C è una costante arbitraria. Allora:

$$\begin{aligned} y'(r) - ik \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k) y(r) &= C e^{-ikr \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)} + \\ &+ (z'(r) - ik \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k) z(r)); \end{aligned}$$

pertanto, la condizione per $r \rightarrow +\infty$ implica $C = 0$, quindi $y = z$.

LEMMA 4. *Medesime ipotesi del Lemma 3; fissiamo $m, p \leq m \leq +\infty$. Esiste una ed una sola soluzione del problema:*

$$\begin{aligned} \chi''(r) + k^2 \chi(r) + v(r) &= 0 \\ \chi(0) &= 0, \left(\int_0^{+\infty} |\chi(r)|^m dr \right)^{\frac{1}{m}} < +\infty; \end{aligned}$$

la soluzione di (4.1) è uguale alla soluzione di (3.1).

Dimostrazione. L'esistenza segue dal Lemma 3; l'unicità da (3.9).

LEMMA 5. *Sia*

$$U(r, t) = \int_0^{+\infty} e^{-h|s-t|} |V(r, s)| ds \quad (h > 0).$$

Risulta (cfr. (8)):

$$\left[\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} U(r, t)^p dr \right)^{\frac{p'}{p}} dt \right]^{\frac{1}{p'}} \leq 2Ah^{-1 - \frac{1}{p'} + \frac{1}{q}}.$$

Dimostrazione. Per la disegualianza di Minkowski:

$$\|U(\cdot, t)\|_{L^{p(0, +\infty)}} \leq \int_0^{+\infty} e^{-h|s-t|} \|V(\cdot, s)\|_{L^{p(0, +\infty)}} ds;$$

allora, per il Lemma 2 (ricordiamo che per ipotesi $p' \geq q$):

$$\begin{aligned} \left(\int_0^{+\infty} \|U(\cdot, t)\|_{L^{p(0, +\infty)}}^{p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} &\leq 2h^{-1 - \frac{1}{p'} + \frac{1}{q}} \left(\int_0^{+\infty} \|V(\cdot, s)\|_{L^{p(0, +\infty)}}^q ds \right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= 2Ah^{-1 - \frac{1}{p'} + \frac{1}{q}} \end{aligned}$$

che equivale all'asserto.

3. Dimostrazione del teorema 1.

1) Sia $\Phi(r)$ una soluzione del problema (a) - (a'). Osserviamo che:

$$\int_0^{+\infty} V(\cdot, s) \Phi(s) ds \in L^p(0, +\infty);$$

infatti per le diseguaglianze di Minkowski e Hölder:

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^{+\infty} V(\cdot, s) \Phi(s) ds \right\|_{L^p(0, +\infty)} &\leq \int_0^{+\infty} \|V(\cdot, s)\|_{L^{p(0, +\infty)}} |\Phi(s)| ds \leq \\ &\leq \left(\int_0^{+\infty} \|V(\cdot, s)\|_{L^{p(0, +\infty)}}^q ds \right)^{\frac{1}{q}} \|\Phi\|_{L^{q'}(0, +\infty)} = A \|\Phi\|_{L^{q'}(0, +\infty)}. \end{aligned}$$

Allora dall'equazione segue $v = \Phi'' + k^2 \Phi \in L^p(0, +\infty)$. Per il Lemma 3, Φ ha le proprietà (9) e risulta:

$$(12) \quad \Phi(r) = - \int_0^{+\infty} G(k; r, t) v(t) dt,$$

dove $G(k; r, t)$ è definito da (3.3). Per (12) e per l'equazione integrodifferenziale (a), v è soluzione della equazione integrale:

$$v(r) = f(r) - \int_0^{+\infty} V(r, s) ds \int_0^{+\infty} G(k; s, t) v(t) dt$$

che si può anche scrivere :

$$(13) \quad v(r) = f(r) - \int_0^{+\infty} N(k; r, t) v(t) dt,$$

dove :

$$(14) \quad \begin{aligned} N(k; r, t) &= \int_0^{+\infty} G(k; s, t) V(r, s) ds = \\ &= e^{ikt \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)} \int_0^t \frac{\operatorname{sen} ks}{k} V(r, s) ds + \frac{\operatorname{sen} kt}{k} \int_t^{+\infty} e^{iks \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)} V(r, s) ds. \end{aligned}$$

Inversamente, sia v una soluzione di classe $L^p(0, +\infty)$ della equazione integrale (13). Definiamo $\Phi(r)$ per mezzo di (12): si verifica immediatamente, in base al Lemma 3, che Φ è soluzione del problema (a) - (a').

2) Sia $\chi(r)$ una soluzione del problema (b). Come precedentemente si osserva che $\int_0^{+\infty} V(\cdot, s) \chi(s) ds \in L^p(0, +\infty)$, dunque

$$w = \chi'' + k^2 \chi \in L^p(0, +\infty).$$

Allora per il Lemma 4, $\chi(r)$ ha le proprietà (9); inoltre, come precedentemente, si riconosce che $w(r)$ è soluzione dell'equazione integrale omogenea :

$$(15) \quad w(r) = - \int_0^{+\infty} N(k; r, t) w(t) dt.$$

Inversamente, sia $w(r)$ una soluzione di classe $L^p(0, +\infty)$, non nulla, della equazione (15); definiamo :

$$\chi(r) = \int_0^{+\infty} G(k; r, t) w(t) dt \left\| \int_0^{+\infty} G(k; \cdot, t) w(t) dt \right\|_{L^{q'}(0, +\infty)}^{-1};$$

per il Lemma 4, $\chi(r)$ così definita è soluzione di (b).

3) Per (14) - (3.4),

$$|N(k; r, t)| \leq \frac{1}{|k|} \int_0^{+\infty} e^{-|\operatorname{Im} k| |s-t|} |V(r, s)| ds;$$

allora per il Lemma 5:

$$\begin{aligned} (18) \quad \left[\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} |N(k; r, t)|^p dr \right)^{\frac{1}{p'}} dt \right]^{\frac{1}{p'}} &\leq \frac{1}{|k|} 2A |\operatorname{Im} k|^{-1 - \frac{1}{p'} + \frac{1}{q}} \leq \\ &\leq 2A |\operatorname{Im} k|^{-2 - \frac{1}{p'} + \frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Consideriamo l'operatore $L(k)$ che compare in (13) - (15), cioè l'operatore definito dalla equazione:

$$(19) \quad L(k) u(r) = \int_0^{+\infty} N(k; r, t) u(t) dt.$$

Per (18), $L(k)$ è un operatore compatto in $L^p(0, +\infty)$ e si ha ⁷⁾:

$$(20) \quad \|L(k)\| \leq 2A |\operatorname{Im} k|^{-2 - \frac{1}{p'} + \frac{1}{q}}.$$

Il teorema 1 segue pertanto da quanto osservato in 1)-2), dal teorema dell'alternativa di Riesz-Schauder, e dal principio di Banach Caccioppoli sulle contrazioni.

⁷⁾ Ricordiamo la seguente proposizione: se $N(r, t)$ è una funzione misurabile tale che:

$$B = \left[\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} |N(r, t)|^p dr \right)^{\frac{1}{p'}} dt \right]^{\frac{1}{p'}} < +\infty,$$

l'operatore L definito dalla equazione

$$Lu(r) = \int_0^{+\infty} N(r, t) u(t) dt$$

è un operatore compatto in $L^p(0, +\infty)$, tale che:

$$\|L\| \leq B.$$

Cfr. [8], pagg. 517-518, es. nn. 51-52-53.

4. Dimostrazione del Teorema 2.

1) Proviamo che $k \rightarrow L(k)$ [$L(k)$ è l'operatore definito da (19)] è funzione olomorfa nell'aperto $\{k: \operatorname{Im} k \neq 0\}$, a valori operatori limitati in $L^p(0, +\infty)$; inoltre:

$$(21) \quad \left\| \frac{dL}{dk}(k) \right\| \leq 2A \left(\frac{1}{2} |\operatorname{Im} k| \right)^{-3 - \frac{1}{p'} + \frac{1}{q}}.$$

A tale scopo, definiamo l'operatore $L_0(k)$ ponendo:

$$L_0(k) u(r) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial N}{\partial k}(k; r, t) u(t) dt,$$

dove:

$$\frac{\partial N}{\partial k}(k; r, t) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial G}{\partial k}(k; s, t) V(r, s) ds^8).$$

In base a (3.4) e alla formula integrale di Cauchy:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial G}{\partial k}(k; s, t) \right| &= \left| \frac{1}{2\pi\varrho} \int_0^{2\pi} G(k + \varrho e^{i\vartheta}; s, t) e^{-i\vartheta} d\vartheta \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\varrho} \max_{\vartheta} \frac{e^{-|\operatorname{Im} k + \varrho \operatorname{sen} \vartheta| |s-t|}}{|\operatorname{Im} k + \varrho \operatorname{sen} \vartheta|} = \\ &= \frac{4}{|\operatorname{Im} k|^2} e^{-\frac{1}{2} |\operatorname{Im} k| \cdot |s-t|} \left(\varrho = \frac{1}{2} |\operatorname{Im} k| \right); \end{aligned}$$

quindi:

$$\left| \frac{\partial N}{\partial k}(k; r, t) \right| \leq \frac{4}{(\operatorname{Im} k)^2} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} |\operatorname{Im} k| \cdot |s-t|} |V(r, s)| ds.$$

⁸⁾ Osserviamo che il nucleo $N(k; r, t)$, definito da (14), è funzione olomorfa di k nell'aperto $\{k: \operatorname{Im} k \neq 0\}$, per r e t fissati: questo segue dalla olomorfia di $G(k; r, t)$ e dalla maggiorazione (3.4).

Per il Lemma 5 :

$$\left[\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \left| \frac{\partial N}{\partial k}(k; r, t) \right|^p dr \right)^{\frac{p'}{p}} dt \right]^{\frac{1}{p'}} \leq 2A \left(\frac{1}{2} |\operatorname{Im} k| \right)^{-3 - \frac{1}{p'} + \frac{1}{q}},$$

dunque (cfr. nota (7)) $L_0(k)$ è un operatore limitato in $L^p(0, +\infty)$ tale che :

$$(24) \quad \|L_0(k)\| \leq 2A \left(\frac{1}{2} |\operatorname{Im} k| \right)^{-3 - \frac{1}{p'} + \frac{1}{q}}.$$

La differenza fra $L_0(k)$ e il rapporto incrementale di $L(k)$ è l'operatore rappresentato dalla equazione :

$$\left(\frac{L(k+h) - L(k)}{h} - L_0(k) \right) u(r) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{N(k+h; r, t) - N(k; r, t)}{h} - \frac{\partial N}{\partial k}(k; r, t) \right) u(t) dt;$$

si ha :

$$\begin{aligned} (25) \quad & \left| \frac{N(k+h; r, t) - N(k; r, t)}{h} - \frac{\partial N}{\partial k}(k; r, t) \right| \leq \\ & \leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{G(k+h; s, t) - G(k; s, t)}{h} - \frac{\partial G}{\partial k}(k; s, t) \right| |V(r, s)| ds \leq \\ & \leq \frac{|h|}{\frac{1}{2} |\operatorname{Im} k| - |h|} \frac{4}{(\operatorname{Im} k)^2} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} |\operatorname{Im} k| \cdot |s-t|} |V(r, s)| ds \\ & \quad \left(|h| \leq \frac{1}{2} |\operatorname{Im} k| \right); \end{aligned}$$

(25) si deduce dalla seguente maggiorazione, che discende da (3.4) e dalla formula integrale di Cauchy :

$$\left| \frac{G(k+h; s, t) - G(k; s, t)}{h} - \frac{\partial G}{\partial k}(k; s, t) \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{h}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{G(k + \varrho e^{i\vartheta}; s, t)}{e^{i\vartheta}(\varrho e^{i\vartheta} - h)} d\vartheta \right| \leq \\
&\leq \frac{|h|}{\varrho} \max_{\vartheta} \frac{e^{-|\operatorname{Im} k + \varrho \operatorname{sen} \vartheta| |s-t|}}{|\varrho e^{i\vartheta} - h| |\operatorname{Im} k + \varrho \operatorname{sen} \vartheta|} \leq \frac{|h| e^{-\frac{1}{2} |\operatorname{Im} k| \cdot |s-t|}}{\left(\frac{1}{2} |\operatorname{Im} k| - |h|\right) \left(\frac{1}{2} |\operatorname{Im} k|\right)^2} \\
&\quad \left(\varrho = \frac{1}{2} |\operatorname{Im} k|\right).
\end{aligned}$$

Per (25) e il Lemma 5 si ha :

$$\begin{aligned}
&\left[\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \left| \frac{N(k+h; r, t) - N(k; r, t)}{h} - \frac{\partial N}{\partial k}(k; r, t) \right|^p dr \right)^{\frac{p'}{p}} dt \right]^{\frac{1}{p'}} \leq \\
&\leq 2A \frac{|h|}{\frac{1}{2} |\operatorname{Im} k| - |h|} \left(\frac{1}{2} |\operatorname{Im} k| \right)^{-3 - \frac{1}{p'} + \frac{1}{q}} \left(|h| \leq \frac{1}{2} |\operatorname{Im} k| \right);
\end{aligned}$$

ne segue (cfr. nota (7)) :

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{L(k+h) - L(k)}{h} - L_0(k) \right\| &\leq 2A \frac{|h|}{\frac{1}{2} |\operatorname{Im} k| - |h|} \left(\frac{1}{2} |\operatorname{Im} k| \right)^{-3 - \frac{1}{p'} + \frac{1}{q}} \\
&\rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0).
\end{aligned}$$

Abbiamo così provato che $L(k)$ è derivabile e $\frac{dL(k)}{d} = L_0(k)$;

(21) segue da (24).

2) A norma del teorema 1, l'insieme Ω è l'insieme dei k tali che $R(k) = (1 + L(k))^{-1}$ esiste (segue dalla teoria di Riesz-Schauder, che, per ogni $k \in \Omega$, $R(k)$ è limitato e il dominio di $R(k)$ coincide con $L^p(0, +\infty)$).

Proviamo che Ω è aperto. Questo segue da (21) e dal fatto che l'insieme degli operatori in $L^p(0, +\infty)$, lineari limitati ed invertibili, è aperto nell'algebra degli operatori lineari limitati in $L^p(0, +\infty)$. Più precisamente, procediamo così. Ricordiamo che se

A è un operatore (lineare limitato) invertibile, ogni operatore B , tale che $\|B - A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$, è invertibile e si ha :

$$(27) \quad B^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} [A^{-1}(A - B)]^n A^{-1} \quad (\|B - A\| < 1/\|A^{-1}\|),$$

la serie convergendo nella norma degli operatori.

Fissiamo $k \in \Omega$ e applichiamo l'osservazione precedente all'operatore $A = 1 + L(k)$, al suo inverso $A^{-1} = R(k)$, e all'operatore $B = 1 + L(k + h)$. Per (21) si ha :

$$\|L(k + h) - L(k)\| \leq |h| 2A \left(\frac{|\operatorname{Im} k| - |h|}{2} \right)^{-3 - \frac{1}{p'} + \frac{1}{q}} \quad (|h| < |\operatorname{Im} k|);$$

se fissiamo δ ($0 < \delta < |\operatorname{Im} k|$) in modo che :

$$2A \left(\frac{|\operatorname{Im} k| - \delta}{2} \right)^{-3 - \frac{1}{p'} + \frac{1}{q}} = \frac{1}{\delta \|R(k)\|} \quad ^9),$$

risulta :

$$(28) \quad \|L(k + h) - L(k)\| \leq \frac{|h|}{\delta \|R(k)\|} \quad (|h| \leq \delta),$$

quindi :

$$\|B - A\| = \|L(k + h) - L(k)\| < \frac{1}{\|R(k)\|} = \frac{1}{\|A^{-1}\|} \quad \text{per } |h| < \delta.$$

Vuol dire che $R(h + h) = B^{-1}$ esiste per ogni h tale che $|h| < \delta$: pertanto Ω è aperto.

Proviamo che $k \rightarrow R(k)$ è funzione olomorfa in Ω , a valori operatori limitati in $L^p(0, +\infty)$. Per (27)-(28), se $|h| < \delta$:

$$R(k + h) = \sum_{n=0}^{+\infty} [R(k)(L(k) - L(k + h))]^n R(k),$$

⁹⁾ La funzione di δ : $\delta \left(|\operatorname{Im} k| - \delta \right)^{-3 - \frac{1}{p'} + \frac{1}{q}}$ è crescente per $0 \leq \delta < |\operatorname{Im} k|$, nulla per $\delta = 0$, tende a $+\infty$ per $\delta \rightarrow |\operatorname{Im} k|$.

$$\begin{aligned}
\frac{R(k+h) - R(k)}{h} &= -R(k) \frac{L(k+h) - L(k)}{h} R(k) + \\
&\quad + h \sum_{n=2}^{+\infty} h^{n-2} \left[R(k) \frac{L(k) - L(k+h)}{h} \right]^n R(k), \\
\left\| \sum_{n=2}^{+\infty} h^{n-2} \left(R(k) \frac{L(k) - L(k+h)}{h} \right)^n R(k) \right\| &\leq \\
&\leq \sum_{n=2}^{+\infty} |h|^{n-2} \|R(k)\|^{n+1} \left\| \frac{L(k+h) - L(k)}{h} \right\|^n \leq \\
&\leq \frac{\|R(k)\|}{\delta^2} \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{|h|}{\delta} \right)^{n-2} = \frac{\|R(k)\|}{\delta^2} \frac{1}{1 - |h|/\delta};
\end{aligned}$$

ne segue :

$$\left\| \frac{R(k+h) - R(k)}{h} + R(k) \frac{dL(k)}{dk} R(k) \right\| \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0).$$

3) Poniamo : $v(k, r) = \Phi''(k, r) + k^2 \Phi(k, r)$. Per quanto è provato nella dimostrazione del teorema 1, $v(k, \cdot)$ è, per ogni $k \in \Omega$, la soluzione di classe $L^p(0, +\infty)$ della equazione integrale :

$$v(k, r) = f(k, r) - L(k) v(k, r);$$

pertanto :

$$v(k, \cdot) = R(k) f(k, \cdot).$$

Di qui segue, per la dimostrata olomorfia di $R(k)$, che

$$\Omega \ni k \rightarrow v(k, \cdot) \in L^p(0, +\infty)$$

è funzione olomorfa.

L'andamento asintotico di $\Phi(k, r)$ è provato nel Lemma 3; per completare la dimostrazione del punto 4) dell'enunciato basta provare che :

$$T_0(k) = \int_0^{+\infty} e^{ikt \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)} v(k, t) dt$$

è funzione olomorfa in Ω . Allo scopo definiamo :

$$T_0'(k) = \int_0^{+\infty} e^{ikt \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)} v'(k, t) dt + i \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k) \int_0^{+\infty} t e^{ikt \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)} v(k, t) dt,$$

dove v' è la derivata della funzione $k \rightarrow v(k, \cdot)$; se $|h| < |\operatorname{Im} k|$ si ha:

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{T_0(k+h) - T_0(k)}{h} - T_0'(k) \right| = \\
 & = \left| \int_0^{+\infty} e^{ikt \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)} \left(\frac{v(k+h, t) - v(k, t)}{h} \right) - v'(k, t) \right| dt + \\
 & + \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{iht \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)} - 1}{iht \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)} - 1 \right) it \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k) e^{ikt \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)} v(k, t) dt + \\
 & + \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{iht \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)} - 1}{ih \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)} - 1 \right) it \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k) e^{ikt \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)} \left[\frac{v(k+h, t) - v(k, t)}{h} - \right. \\
 & \quad \left. - v'(k, t) \right] dt \leq \\
 & \leq \int_0^{+\infty} e^{-t|\operatorname{Im} k|} \left| \frac{v(k+h, t) - v(k, t)}{h} - v'(k, t) \right| dt + \\
 & \quad + \frac{1}{2} |h| \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(|\operatorname{Im} k| - |h|)t} |v(k, t)| dt + {}^{10)} \\
 & + \frac{1}{2} |h| \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(|\operatorname{Im} k| - |h|)t} \left| \frac{v(k+h, t) - v(k, t)}{h} - v'(k, t) \right| dt \leq \\
 & \leq \left\| \frac{v(k+h, \cdot) - v(k, \cdot)}{h} - v'(k, \cdot) \right\|_{L^p(0, +\infty)} \left[\left(\int_0^{+\infty} e^{-p' t |\operatorname{Im} k|} dt \right)^{\frac{1}{p'}} + \right.
 \end{aligned}$$

${}^{10)} \left| \frac{e^z - 1}{z} - 1 \right| = \left| z \int_0^1 (1-s) e^{sz} ds \right| \leq |z| \int_0^1 (1-s) e^{s \operatorname{Re} z} ds \leq \frac{1}{2} |z| e^{|\operatorname{Re} z|}.$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} |h| \left(\int_0^{+\infty} t^{2p'} e^{-p'(|\operatorname{Im} k| - |h|)t} dt \right)^{\frac{1}{p'}} + \\
& + \frac{1}{2} |h| \|v(k, \cdot)\|_{L^{p(0, +\infty)}} \left(\int_0^{+\infty} t^{2p'} e^{-p'(|\operatorname{Im} k| - |h|)t} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0).
\end{aligned}$$

Pertanto, $T_0(k)$ è derivabile e $T'_0(k)$ è la sua derivata. Il punto 3) dell'enunciato, e cioè l'olomorfia di $\Phi(\cdot, r)$ per ogni r fissato, segue (con un ragionamento analogo a quello fatto a proposito di $T_0(k)$) dalla rappresentazione :

$$\Phi(k, r) = - \int_0^{+\infty} G(k; r, t) v(k, t) dt.$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] F. V. ATKINSON: *On Sommerfeld's « radiation condition »* (The philosophical Magazine 40, 1949).
- [2] V. D. BAZDYREV: *Equivalenza dei principi della « Limiting amplitude » e « limiting input »* (in russo) (Izv. Vyss. Uchebn. Zaved. Matematika, 1 (32) (1963).
- [3] M. BERTERO - G. TALENTI - G. A. VIANO: *The Born series for nonlocal potentials (S-wave)* (Nuovo Cimento 46, 1966).
- [4] M. BERTERO - G. TALENTI - G. A. VIANO: *Scattering and bound-states solutions for a class of nonlocal potentials (S-wave)*. (In corso di stampa).
- [5] R. N. BUCHAL: *The approach to steady state of solutions of exterior boundary value problems for the wave equation* (J. Math. Mech. 12, 1963).
- [6] COURANT - HILBERT: *Methods of mathematical physics* (Interscience, New York, 1962), vol. 2, pagg. 312-320.
- [7] V. DE ALFARO - T. REGGE: *Potential scattering* (Amsterdam, 1965).
- [8] N. DUNFORD - J. SCHWARTZ: *Linear operators* (Interscience, New York, 1958).
- [9] D. M. EIDUS: *Sul principio della « limiting amplitude »* (in russo) (Dokl. Akad. Nauk SSSR 158, 1964).
- [10] H. G. GARNIR: *Fonctions de variables réelles*, vol. 2 (Louvain - Paris, 1965).
- [11] M. M. GEHTMANN: *« Sul principio della « limiting amplitude »* (Dokl. Akad. Nauk SSSR 153, 1963).
- [12] V. V. GROSIN: *Condizioni del tipo di Sommerfeld per una classe di equazioni alle derivate parziali* (in russo) (Mat. Sb. (N. S.) 61 (103), (1963).
- [13] HARDY-LITTLEWOOD-PÓLYA: *Inequalities* (Cambridge, 1964).
- [14] G. HELLWIG: *Eine Bemerkung zum Ausstrahlungsproblem* (Math. Z. 78, 1962).
- [15] HILLE-PHILLIPS: *Functional analysis and semi-groups* (Amer. Math. Soc. Coll. Publ. XXXI).
- [16] E. K. ISAKOVA: *Sul principio della « limiting amplitude » per certi problemi al contorno nel piano* (trad. in: Soviet. Math. Dokl. 6, 1965).
- [17] P. D. LAX-C. MORAWETZ-R. S. PHILLIPS: *The exponential decay of the solutions of the wave equation in the exterior of a star-shaped obstacle* (Bull. Amer. Math. Soc. 68, 1962).
- [18] L. LEVINE: *A uniqueness theorem for the reduced wave equation* (Comm. Pure Appl. Math. 17, 1964).
- [19] V. P. MIHAÏLOV: *Sul principio della « limiting amplitude »* (in russo) (Dokl. Akad. Nauk. SSSR 159, 1964).
- [20] C. MORAWETZ: *The limiting amplitude principle* (Comm. Pure Appl. Math. 15, 1962).

- [21] C. MORAWETZ : *The decay of solutions of the exterior initial-boundary value problem for the wave equation* (Comm. pure Appl. Math. 14, 1961).
- [22] R. NEWTON : *Scattering theory of waves and particles* (Mc Graw-Hill Company, New York, 1966).
- [23] L. S. PARASJUK : *Condizioni di radiazione per certe equazioni ellittiche che degenerano alla frontiera* (in ucraino) (Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn RSR, 1963).
- [24] F. RELICH : *Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + ku = 0$ in unendlichen Gebieten* (Jber. Deutschen Mat. Verein 53, 1943).
- [25] C. H. WILCOX : *A Generalisation of theorems of Rellich and Atkinson* (Proc. Amer. Math. Soc. 7, 1956).
- [26] C. H. WILCOX : *The initial-boundary value problem for the wave equation in an exterior domain with spherical boundary* (Amer. Math. Soc. Not. Abstract 564-20, vol. 6, 1959).
- [27] E. C. ZACHMANOGLU : *The decay of solutions of the initial-boundary value problem for hyperbolic equations* (J. Math. Anal. Appl. 13, 1966).
- [28] A. SOMMERFELD : *Partial Differential Equations in Physics* (Academic Press, 1964), pagg. 188-200.

Manoscritto pervenuto in redazione il 21 aprile 1967.