RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

BENEDETTO SCIMEMI

Gruppi finiti dotati di automorfismi di ordine *pq* privi di coincidenze

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 38 (1967), p. 174-179

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__38__174_0>

GRUPPI FINITI DOTATI DI AUTOMORFISMI DI ORDINE pq PRIVI DI COINCIDENZE

BENEDETTO SCIMEMI *)

Un gruppo finito G dotato di un automorfismo φ privo di coincidenze è necessariamente risolubile? Il problema è aperto e non sembra di facile soluzione. La risposta è affermativa se l'ordine di φ è un numero primo (allora G è addirittura nilpotente, per un noto teorema di Thompson, [4]), oppure una potenza di 2 (nel qual caso G è di ordine dispari). Recentemente Fischer ha studiato il caso in cui φ ha ordine $2p$ (p primo dispari) e ha stabilito ([1], teor. 1) che G è risolubile se si verifica una delle seguenti ipotesi supplementari:

I) $G(p)$ è un 2-gruppo

II) $G(p)$ contiene un 2-Sylow-sottogruppo di G,

indicando $G(n)$ il sottogruppo « delle coincidenze » di φ^n in G.

In questa nota si studia un problema più generale: si suppone cioè che G sia un gruppo finito dotato di un automorfismo φ di ordine pq (p, q numeri primi distinti) privo di coincidenze. I risultati si riferiscono all'esistenza di complementi normali per certi Sylow-sottogruppi di G e all'esistenza di due sottogruppi nilpotenti « abbastanza grandi » di G. Se ne possono dedurre condizioni di risolubilità; si prova, in particolare, che *G è risolubile se*

1) *$G(p)$ è un 2-gruppo,* oppure *$G(q)$ è un 2-gruppo.*

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

Indirizzo dell'Autore: Seminario Matematico, Università, Padova.

Un'altra condizione sufficiente per la risolubilità è la seguente:

2) *gli ordini di* $G(p)$ *e* $G(q)$ *sono relativamente primi e i* 2-*Sylow-sottogruppi di* G *sono abeliani.*

Quest'ultima restrizione non è necessaria nel caso $q = 2$; si prova cioè che è sufficiente la condizione

3) $q = 2, \quad (|G(p)|, |G(2)|) = 1.$

La 1) e la 3) generalizzano la I) di Fischer.

Sia G un gruppo finito e φ un suo automorfismo privo di coincidenze. È noto allora (per le proprietà generali di tali automorfismi si veda ad es. [3]) che per ogni numero primo r divisore dell'ordine di G esiste uno ed un solo r-Sylow-sottogruppo di G che è φ-invariante. Esso si dirà «canonico» e si indicherà con G_r.

LEMMA 1. *G_r contiene tutti gli r-sottogruppi φ-invarianti di G.*

DIM. Sia $R = \varphi(R)$ un r-sottogruppo di G ed M un massimale tra gli r-sottogruppi φ-invarianti di G contenenti R. Se M è di Sylow per G, il Lemma è vero perchè allora è $M = G_r$ per l'unicità. Supponiamo dunque che sia $M \neq G_r$ e proviamo che ciò porta una contraddizione. Sia $N = N_G(M)$ il normalizzante di M in G. N è φ-invariante ed r divide l'ordine del gruppo N/M. φ induce su N/M un automorfismo $\bar{\varphi}$ privo di coincidenze, sicchè N/M possiede un r-Sylow-sottogruppo $\bar{\varphi}$-invariante non identico $(N/M)_r = M'/M$. Ora M' è un r-sottogruppo φ-invariante di G che contiene propriamente M. Ciò contraddice la massimalità di M.

Il risultato precedente non dipende dall'ordine di φ. Nel seguito supporremo invece che l'ordine di φ sia pq (dove p, q sono numeri primi distinti). Se n è un numero intero ed H un sottogruppo di G, indicheremo con $H(n)$ il sottogruppo «delle coincidenze» di φ^n in H. Porremo cioè:

$$H(n) = \{g \in H \mid \varphi^n(g) = g\} = H \cap G(n).$$

Per il teorema di Thompson, $G(q)$ e $G(p)$ sono nilpotenti, dato che risulta: $[G(q)](p) = 1 = [G(p)](q)$. Più generalmente, è nilpotente e di ordine $|H| \equiv 1 \pmod p$ ogni sottogruppo H φ^q-invariante con $H(q) = 1$ (e analogamente scambiando q con p).

LEMMA 2. *Sia G_r normale in G, e sia $G_r(q) = 1 = G_r(p)$. Allora G_r è un fattore diretto di G.*

DIM. G_r possiede un complemento K in G che si può supporre φ-invariante, dato che i complementi di G_r in G sono tutti coniugati (cfr. [3]). Si proceda per induzione sull'ordine di G. Se K possiede un sottogruppo M non identico, φ-invariante e normale in G, allora φ induce sul gruppo $\overline{G} = G/M$ un automorfismo $\overline{\varphi}$ di ordine pq, privo di coincidenze. Si ha (con evidente significato dei simboli): $\overline{G}_r = G_r M/M$; $\overline{G}_r$ è normale in $\overline{G}$, e ancora $\overline{G}_r(q) = \overline{1} = \overline{G}_r(p)$. Ma allora, per l'ipotesi induttiva, è $\overline{G} = \overline{G}_r \times \overline{K}$, e quindi anche $G = G_r \times K$. Siamo così ricondotti al caso in cui ogni sottogruppo φ-invariante di K che sia normale in G è identico. Tale è dunque il centralizzante $C_K(G_r)$. Si osservi ora che φ^q è privo di coincidenze sul sottogruppo $K(p)\,G_r$. Allora $K(p)\,G_r = K(p) \times G_r$ e infine $K(p) = 1 = G(p)$. Ma allora G risulta nilpotente.

LEMMA 3. *Se G_r è abeliano e $G_r(q) = 1 = G_r(p)$, G_r è dotato di complemento normale in G.*

DIM. Ciò segue subito dal teorema di Burnside, tenendo conto del fatto che il normalizzante $N_G(G_r)$ è φ-invariante e quindi, per il Lemma 2, G_r sta nel suo centro.

Si osservi che l'ipotesi di abelianità è certamente soddisfatta nel caso che sia $q = 2$, perchè allora φ^p è involutorio (cfr. [3]). Si ritrova così un risultato di Fischer (Lemma 3.3 in [1]).

LEMMA 4. *Se $r \neq 2$ e $G_r(q) = 1 = G_r(p)$, G_r è dotato di complemento normale in G.*

DIM: Si proceda per induzione sull'ordine di G. Per il recente teorema di Thompson sui complementi normali (cfr. [3]), basterà provare che per ogni sottogruppo caratteristico R di G_r il quoziente $N_G(R)/C_G(R)$ è un r-gruppo. Ora R è φ-invariante e tale è il suo normalizzante $N = N_G(G_r)$. Se è $N \neq G$, per induzione $N_r = G_r$ è dotato di complemento normale H in N, sicchè risulta $RH = R \times H$. Se invece è $N = G$, allora su $\overline{G} = G/R$ si ereditano le ipotesi fatte su G. Allora, per induzione, $\overline{G}_r$ è dotato in $\overline{G}$ di complemento normale $\overline{K} = KR/R$. KR è φ-invariante, e per il Lemma 2 risulta $RK = R \times K$.

LEMMA 5. *Siano r,s due numeri primi dispari distinti, e sia $G_r(q) = 1 = G_s(q)$ oppure $G_r(p) = 1 = G_s(p)$. Allora è $G_r\, G_s = G_r \times G_s$.*

DIM: Procediamo ancora per induzione sull'ordine di G. Sia ad esempio $G_r(q) = 1 = G_s(q)$. Sarà sufficiente provare che G_r e G_s sono permutabili, perchè in tal caso φ^q risulta privo di coincidenze su $G_r\, G_s$. Ciò è senz'altro vero se è anche $G_r(p) = 1$ (ovvero $G_s(p) = 1$). Infatti in questo caso G_r è dotato di complemento normale, per il Lemma 4; ma allora (argomento di Frattini) G_r normalizza un s-Sylow-sottogruppo di G. Ne segue che il normalizzante $N_G(G_s)$ contiene un r-Sylow-sottogruppo di G; anzi, essendo φ-invariante, contiene proprio G_r, per l'unicità dei canonici. Potremo dunque supporre $G_r(p) \neq 1 \neq G_s(p)$. Per la nilpotenza di $G(p)$, risulta $G_r(p)\, G_s(p) = G_r(p) \times G_s(p)$.

Siano ora M_r ed M_s due sottogruppi di G massimali rispetto alle proprietà:

$$G_r(p) \subseteq M_r = \varphi(M_r) \subseteq G_r\,; \quad G_s(p) \subseteq M_s = \varphi(M_s) \subseteq G_s\,; \quad M_r M_s = M_s M_r\,.$$

Se M_r ed M_s sono entrambi di Sylow per G, l'asserto è vero.

Supponiamo dunque, per assurdo, che sia $G_r \neq M_r$ e poniamo $N = N_G(M_r)$. Allora N è φ-invariante, ed r divide l'ordine di N/M_r. Inoltre risulta $M_r M_s = M_r \times M_s$, sicchè è $M_s \subseteq N$. Ricordando il Lemma 1 si ha allora: $M_s \subseteq N_s$; $M_r \subset N_r$. Se è $N \neq G$, il Lemma si può supporre vero in N, sicchè si ha $N_r N_s = N_r \times N_s$ e quindi, a maggior ragione, è $M_s N_r = N_r M_s$, che contraddice la massimalità di M_r. Se invece $N = G$, le ipotesi si ereditano sul quoziente $\overline{G} = G/M_r$; si prova cioè che risulta: $\overline{G}_r(q) = \overline{1} = \overline{G}_s(q)$. Ma allora, per induzione, è $\overline{G}_r\, \overline{G}_s = \overline{G}_r \times \overline{G}_s$. Ne segue che G_s normalizza G_r e in definitiva risulta addirittura $G_r\, G_s = G_r \times G_s$.

Evidentemente la dimostrazione rimane valida scambiando i ruoli dei numeri r ed s, e quelli dei numeri q e p.

Tenendo conto del Lemma 3, si osservi che nell'enunciato del Lemma 5 si può togliere la restrizione « dispari » purchè i 2-Sylow-sottogruppi di G siano abeliani. La stessa cosa è vera se è $q = 2$, perchè in tal caso $G_2(p) = 1$ implica $G_2 = 1$. Come immediata conseguenza si ottiene il

TEOREMA. *Sia φ un automorfismo di ordine pq, privo di coincidenze sul gruppo finito G. Sia $G(p)$ (rispett. $G(q)$) il sottogruppo delle coincidenze di φ^p (rispett. φ^q) in G. Allora l'unione dei Sylow-sottogruppi canonici di ordine dispari di G che non intersecano $G(p)$ (rispett. $G(q)$) è un gruppo nilpotente.*

La restrizione « dispari » si può togliere se è $q = 2$, oppure i 2-Sylow-sottogruppi di G sono abeliani.

Il risultato si presta a fornire criteri di risolubilità. Sfruttando i noti teoremi di Wielandt-Kegel (cfr. ad es. [3]) sui gruppi che sono il prodotto di due sottogruppi nilpotenti, si ottiene, ad esempio, il seguente

COROLLARIO. *Siano G, φ, $G(q)$ e $G(p)$ come nel teorema precedente. G è risolubile se è verificata una delle seguenti condizioni:*

1) *$G(p)$ è un 2-gruppo, ovvero $G(q)$ è un 2-gruppo*

2) *G_2 è abeliano;* $(|G(p)|, |G(q)|) = 1$

3) $q = 2$; $(|G(p)|, |G(2)|) = 1$.

DIM: Nel caso 1), G_2 è dotato di un complemento nilpotente. Nei casi 2) e 3), G è il prodotto dei due sottogruppi nilpotenti del teorema precedente.

Si può osservare che la I) di Fischer si ottiene dalla 1) per $q = 2$. Anche la 3) generalizza la I), perchè in ogni caso 2 non divide l'ordine di $G(2)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] B. FISCHER. *Finite groups admitting a fixed-point-free automorphism of order 2p.* Journal of Algebra, **3** (1966), 99-114.

[2] D. GORENSTEIN, I. N. HERSTEIN. *Finite groups admitting a fixed-point-free automorphism of order 4.* Amer. Jour. Math., **83** (1961), 71-78.

[3] E. SCHENKMAN. *Group Theory.* D. Van Nostrand Co. Inc. (1965).

[4] J. G. THOMPSON. *Finite groups admitting a fixed-point-free automorphism of prime order.* Proc. Natl. Acad. Sci., **45** (1959), 578-581.

Aggiunta fatta mentre la nota era in corso di stampa :

In un lavoro apparso nel Journal of Algebra, 5 (Gennaio 1967), 20-40, con lo stesso titolo di [1], B. Fischer prova che un gruppo G finito è risolubile se ammette un automorfismo di ordine $2p$ privo di coincidenze e i q-Sylow-sottogruppi di G sono abeliani per ogni primo q che divide l'ordine di G (2). È facile vedere che questo risultato, ottenuto con metodi alquanto differenti, comprende la nostra 3).

Manoscritto pervenuto in redazione il 7 dicembre 1966.