

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE VECCHIO

**Su certi interi associati a un ideale e le
molteplicità d'intersezione**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 37 (1967), p. 75-90

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__37__75_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__37__75_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SU CERTI INTERI ASSOCIATI A UN IDEALE E LE MOLTEPLICITÀ D'INTERSEZIONE

di GIUSEPPE VECCHIO (*a Genova*) *)

In questo lavoro riprendo lo studio, iniziato in [4] e [5], di alcune proprietà di certi interi associati a un ideale di un anello noetheriano, con lo scopo di mostrare come, sotto opportune ipotesi, essi abbiano significato di molteplicità d'intersezione.

Sia α un ideale di un anello noetheriano A ; per ogni elemento x di $\sqrt{\alpha}$ si consideri il numero intero $\varrho_x(\alpha) = \min \{r \in \mathbb{N} \mid x^r \in \alpha\}$ e si ponga $\varrho(\alpha) = \max \{\varrho_x(\alpha)\}$.

In [4] ho studiato certe proprietà degli interi $\varrho_x(\alpha)$ e $\varrho(\alpha)$ nelle ipotesi di un ideale α di classe principale in un anello di Macaulay ed ho indicato, fra l'altro, una condizione sufficiente per x affinché risulti $\varrho_x(\alpha) = \varrho(\alpha)$ ([4], teor. 2).

Siano inoltre $p_1, \dots, p_n$ i primi associati ad α . Ho considerato, sempre in [4], l'insieme delle n -ple $(x_1, \dots, x_n)$ tali che $x_i \in p_i$ e soddisfacenti a certe ulteriori condizioni; per ciascuna n -pla $(x_1, \dots, x_n)$ del tipo suddetto ho dimostrato che tra tutte le n -ple $(r_1, \dots, r_n)$ di interi naturali tali che $x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n} \in \alpha$ ne esiste una minima $(\varrho_1, \dots, \varrho_n)$ (per la quale, cioè, si abbia $\varrho_i \leq r_i$ per ogni i) che non dipende da $x_1, \dots, x_n$, ma solo da α ed ho dato una caratterizzazione di tale n -pla ([4], teor. 3,4). In [5] ho precisato ulteriormente questo risultato, dimostrando che se q_i è la componente p_i -primaria di α , si ha $\varrho_i = \varrho(q_i)$ ([5], teor. 2) ¹⁾.

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la matematica del C.N.R.

Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica Università di Genova.

¹⁾ In [5] l'intero $\varrho(q_i)$ è denotato con s_i ed è introdotto nel modo equivalente: $s_i = \min \{s_i \in \mathbb{N} \mid \text{per ogni } z \in p_i \text{ risulti } z^{s_i} \in q_i\}$.

In [5] trovasi altresì dimostrato il seguente fatto: se α è un ideale privo di componenti immerse di un anello A noetheriano, $(\varrho(q_1), \dots, \varrho(q_n))$ è sempre la minima tra le n -ple $(r_1, \dots, r_n)$ tali che $x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n} \in \alpha$ per ogni scelta degli elementi $x_i \in \mathfrak{p}_i$ ([5], ter. 1).

Lo scopo essenziale del presente lavoro è di mostrare che, sotto certe ipotesi, l'intero ϱ_i coincide con la lunghezza $\lambda(q_i)$ di q_i ed anche con la molteplicità $e(q_i)$ di q_i (cfr. teor. 1, 2, 3); e quindi se A è un anello di polinomi, ϱ_i esprime, sotto ipotesi opportune, la molteplicità d'intersezione di certe varietà algebriche lungo una componente della loro intersezione.

Precisamente, nel caso in cui A sia l'anello dei polinomi in un numero finito di indeterminate sopra un campo algebricamente chiuso, pervenno ai seguenti risultati: sia $\alpha = \mathfrak{b} + (f)$ con $\mathfrak{b}$ ideale di una varietà irriducibile U , completa intersezione ed (f) l'ideale di un'ipersuperficie F non contenente U . Siano M una componente di $U \cap F$ semplice per U e G una ipersuperficie di ideale (g) che incontri U semplicemente in M . Allora, se q è la componente primaria di α relativa a M , $\varrho(q) = \varrho_v(q) = i(U \cdot F, M)$, dove $i(U \cdot F, M)$ è la molteplicità di intersezione di U, F in M , nel senso di C. CHEVALLEY, P. SAMUEL, A. WEIL (cfr. teor. 4). Siano poi $M_1, \dots, M_n$ le componenti di $U \cap F$, $G_j (1 \leq j \leq n)$ un'ipersuperficie di ideale (g_j) passante per M_j ma non passante per M_s con $s \neq j$ e $(\varrho_1, \dots, \varrho_n)$ la n -pla minima tale che $g_1^{\varrho_1} \dots g_n^{\varrho_n} \in \alpha$; allora, se per un indice j G_j incontra U semplicemente in M_j , si ha $\varrho_j = i(U \cdot F, M_j)$ (cor. al teor. 4).

Più in generale, se $\alpha = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$ con $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ ideali di due varietà irriducibili U, V , ciascuna completa intersezione e se q è la componente primaria di α corrispondente ad una componente propria M di $U \cap V$, sotto opportune ipotesi, $\varrho(q) = i(U \cdot V, M)$ (cfr. teor. 5). Se, poi, $M_1, \dots, M_n$ sono le componenti di $U \cap V$, $G_j (1 \leq j \leq n)$ un'ipersuperficie di ideale (g_j) passante per M_j ma non per M_s , con $s \neq j$, e $(\varrho_1, \dots, \varrho_n)$ è la n -pla minima tale che $g_1^{\varrho_1} \dots g_n^{\varrho_n} \in \alpha$, per ogni indice j per cui sono soddisfatte certe ipotesi, si ha $\varrho_j = i(U \cdot V, M_j)$ (cor. al teor. 5).

Il presente lavoro contiene, inoltre, qualche altro complemento alle Note menzionate [4], [5]. L'asserzione *a*) del teorema 3 del n. 4 generalizzata, infatti, il teorema 2 di [5], in quanto ne indebolisce sensibilmente le ipotesi.

Infine, il n. 6 contiene una caratterizzazione degli ideali di classe principale in un anello di polinomi, per i quali la n -pla $(\varrho_1, \dots, \varrho_n)$ è costituita da interi tutti eguali ad 1. Tale caratterizzazione è un corollario di alcune proposizioni che seguono facilmente da risultati ben noti, per

lo più dovuti a O. ZARISKI, relativi alla nozione di zero semplice di un ideale.

1. Per comodità del lettore richiamiamo in questo numero alcune nozioni ben note assieme a qualche proprietà che discende facilmente da esse.

Con A denoteremo sempre un anello commutativo con identità noetheriano.

(I) *Localizzazione*. — Sia $\mathfrak{p}$ un ideale primo di A e sia $\mathfrak{n}$ l'ideale degli elementi di A tali che se $a \in \mathfrak{n}$ esiste un elemento $t \notin \mathfrak{p}$ per cui $at = 0$. L'immagine di $A - \mathfrak{p}$ nell'omorfismo canonico $\nu: A \rightarrow A/\mathfrak{n}$ è un sottoinsieme moltiplicativamente chiuso e privo di divisori dello zero; si può allora considerare l'anello $A_{\mathfrak{p}}$ dei quozienti di $A/\mathfrak{n}$ rispetto a $\nu(A - \mathfrak{p})$, cioè l'anello degli elementi del tipo $\frac{\xi}{\tau}$ con $\xi \in A/\mathfrak{n}$, $\tau \in \nu(A - \mathfrak{p})$. $A/\mathfrak{n}$ si immerge canonicamente in $A_{\mathfrak{p}}$ e la composizione di ν con quest'immersione definisce un omomorfismo canonico $\varphi: A \rightarrow A_{\mathfrak{p}}$ il cui nucleo è $\mathfrak{n}$. Se $t \notin \mathfrak{p}$ l'elemento $\varphi(t)$ è invertibile in $A_{\mathfrak{p}}$ ed ogni elemento di $A_{\mathfrak{p}}$ si può scrivere nella forma $\frac{\varphi(x)}{\varphi(t)}$ con $x \in A$, $t \notin \mathfrak{p}$. Se $\mathfrak{a}$ è un ideale di A , con $\mathfrak{a}A_{\mathfrak{p}}$ si denota l'ideale generato da $\varphi(\mathfrak{a})$ in $A_{\mathfrak{p}}$; $\mathfrak{a}A_{\mathfrak{p}}$ risulta distinto da $A_{\mathfrak{p}}$ se e solo se $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$. L'ideale $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ è l'unico ideale massimale di $A_{\mathfrak{p}}$ ed $A_{\mathfrak{p}}$ si dice il *localizzato di A in $\mathfrak{p}$* .

La corrispondenza $\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a}A_{\mathfrak{p}}$ è biunivoca tra l'insieme degli ideali primi (primari) di A contenuti in $\mathfrak{p}$ e l'insieme degli ideali primi (primari) di $A_{\mathfrak{p}}$. Inoltre, se $\mathfrak{P}$ è un primo contenuto in $\mathfrak{p}$ e $\mathfrak{Q}$ è un ideale $\mathfrak{P}$ -primario, l'ideale $\mathfrak{Q}A_{\mathfrak{p}}$ è $\mathfrak{P}A_{\mathfrak{p}}$ -primario (cfr. [8], vol. I, cap. IV §§ 9-11).

LEMMA 1: Siano $\mathfrak{b}$ un ideale ed x un elemento di A tali che $\mathfrak{b}:x = \mathfrak{b}$. Allora, per ogni ideale primo $\mathfrak{p}$ contenente $\mathfrak{b} + (x)$, si ha $\mathfrak{b}A_{\mathfrak{p}}:xA_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{b}A_{\mathfrak{p}}$.

Basta ovviamente provare che se $\eta \in A_{\mathfrak{p}}$ è tale che $\eta\varphi(x) = \beta \in \mathfrak{b}A_{\mathfrak{p}}$ allora $\eta \in \mathfrak{b}A_{\mathfrak{p}}$. Gli elementi η, β si possono scrivere nella forma $\eta = \frac{\varphi(y)}{\varphi(s)}$, $\beta = \frac{\varphi(b)}{\varphi(t)}$ con $y \in A$, $b \in \mathfrak{b}$, $s, t \notin \mathfrak{p}$ e quindi si ha $\varphi(xyt - bs) = 0$. Esiste perciò un elemento $z \notin \mathfrak{p}$ tale che $(xyt - bs)z = 0$ e quindi si ha $xytz \in \mathfrak{b}$. Essendo, per ipotesi, $\mathfrak{b}:x = \mathfrak{b}$, deve essere $ytz = c \in \mathfrak{b}$. Ne segue perciò $\eta = \frac{\varphi(y)}{\varphi(s)} = \frac{\varphi(c)}{\varphi(stz)} \in \mathfrak{b}A_{\mathfrak{p}}$, come volevasi.

LEMMA 2: Siano $\mathfrak{p}$ un ideale primo di A e $\mathfrak{q}$ un ideale $\mathfrak{p}$ -primario.

Allora se $\bar{x}$ è l'immagine di x nell'omomorfismo canonico $\varphi: A \rightarrow A_{\mathfrak{p}}$ ed r è un intero positivo, si ha $\bar{x}^r \in \mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}$ se e solo se $x^r \in \mathfrak{q}$.

È chiaro che se $x^r \in \mathfrak{q}$ si ha $\bar{x}^r \in \mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}$. Viceversa, supponiamo che sia $\bar{x}^r \in \mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}$; allora si può scrivere $\bar{x}^r = \frac{\varphi(y)}{\varphi(t)}$ con $y \in \mathfrak{q}$, $t \notin \mathfrak{p}$ e quindi si ha $\varphi(x^r t - y) = 0$. Esiste perciò un elemento $t' \notin \mathfrak{p}$ tale che $(x^r t - y)t' = 0$ e quindi $x^r t t' \in \mathfrak{q}$. Ed allora, essendo $t t' \notin \mathfrak{p}$, deve essere $x^r \in \mathfrak{q}$.

(II) *Lunghezza di un ideale primario.* Sia $\mathfrak{q}$ un ideale primario di A e sia $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$. Si dice lunghezza di $\mathfrak{q}$, e si denota con $\lambda(\mathfrak{q})$, il numero di termini di una serie di composizione di ideali $\mathfrak{p}$ -primari congiungente $\mathfrak{p}$ con $\mathfrak{q}$, cioè una serie

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_1 \supset \mathfrak{q}_2 \supset \dots \supset \mathfrak{q}_r = \mathfrak{q}$$

tale che $\mathfrak{q}_i \neq \mathfrak{q}_{i+1}$ ($1 \leq i < r$) e tale che non esistano ideali propriamente compresi tra $\mathfrak{q}_i$ e $\mathfrak{q}_{i+1}$. L'esistenza d'una serie siffatta è garantita dalla noetherianità di A .

In virtù della corrispondenza biunivoca tra l'insieme degli ideali primari di A contenuti in $\mathfrak{p}$ e l'insieme degli ideali primari di $A_{\mathfrak{p}}$, si ha $\lambda(\mathfrak{q}) = \lambda(\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}})$ (cfr. [2], cap. III, n. 3.3).

(III) *Altezza di un ideale.* — Sia $\mathfrak{p}$ un ideale primo di A . Si dice che $\mathfrak{p}$ ha altezza h se esiste almeno una catena $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_h = \mathfrak{p}$ di ideali primi distinti e se non esistono di siffatte catene con più di h termini.

Se $\mathfrak{a}$ è un ideale di A , si dice altezza di $\mathfrak{a}$ la minima delle altezze dei primi associati ad $\mathfrak{a}$.

Se $\mathfrak{a}$ è generato da r elementi, ogni primo isolato di $\mathfrak{a}$ ha altezza $\leq r$ ([8], vol. I, cap. IV, § 14).

(IV) *Molteplicità di un ideale primario.* — Sia A un anello locale di ideale massimale $\mathfrak{m}$ e sia $\mathfrak{q}$ un ideale $\mathfrak{m}$ -primario di A . La lunghezza $\lambda(\mathfrak{q}^n)$ di $\mathfrak{q}^n$ è, per n grande, un polinomio $P_{\mathfrak{q}}(n)$ in n a coefficienti razionali. Se d è il grado del polinomio $P_{\mathfrak{q}}(n)$, il coefficiente del termine di grado massimo è della forma $\frac{e(\mathfrak{q})}{d!}$, con $e(\mathfrak{q})$ intero > 0 . L'intero $e(\mathfrak{q})$ si dice la *molteplicità* di $\mathfrak{q}$.

Sia ora A un anello noetheriano qualsiasi e siano $\mathfrak{q}$ un ideale primario di A e $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$. Chiameremo molteplicità di $\mathfrak{q}$, e la denoteremo ancora con $e(\mathfrak{q})$, la molteplicità di $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}$ (cfr. [8], vol. II, cap. VII, § 12 e cap. VIII, § 8).

(V) *Alcune proprietà degli anelli locali.* — Sia A un anello locale di ideale massimale $\mathfrak{m}$ e siano $\sigma: A \rightarrow A/\mathfrak{m}$, $\tau: \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ gli omomorfismi canonici; se per ogni $\alpha \in A/\mathfrak{m}$, $\xi \in \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ si definisce il prodotto $\alpha\xi$ ponendo $\alpha\xi = \tau(ax)$, dove a, x sono tali che $\sigma a = \alpha$, $\tau x = \xi$, $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ risulta uno spazio vettoriale sopra $A/\mathfrak{m}$.

(i) *Gli elementi $x_1, \dots, x_d$ costituiscono una base di $\mathfrak{m}$ (cioè un sistema minimale di generatori di $\mathfrak{m}$) se e solo se $\tau x_1, \dots, \tau x_d$ costituiscono una base per lo spazio vettoriale $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ ([2], cap. IV, n. 4.5, prop. 6).*

La dimensione di un anello locale A è, per definizione, l'altezza del suo ideale massimale $\mathfrak{m}$. Dunque, se $x_1, \dots, x_d$ costituiscono una base di $\mathfrak{m}$ e se denotiamo con $\dim A$ la dimensione di A e con $\dim(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ la dimensione sopra $A/\mathfrak{m}$ dello spazio vettoriale $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, si ha $\dim A \leq \dim(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$. Se vale l'eguaglianza, A si dice *regolare*.

Sia A di dimensione d ; si dice che gli elementi $a_1, \dots, a_d$ costituiscono un *sistema di parametri* di A se l'ideale $(a_1, \dots, a_d)$ è $\mathfrak{m}$ -primario. Se A è regolare, ogni base di $\mathfrak{m}$ si dice un *sistema regolare* di parametri.

(ii) *Sia A un anello locale regolare e sia $x_1, \dots, x_d$ un sistema regolare di parametri di A . Allora, l'ideale $(x_1, \dots, x_i)$ è primo per ogni i ($1 \leq i \leq d$) ([2], cap. IV, n. 4.6, teor. 6).*

(VI) *Anelli di Macaulay.* — Si dice che un anello noetheriano A è un *anello di Macaulay* se vale in esso la proprietà: ogni ideale di A generato da h elementi ed avente altezza h è puro (cioè tutti i primi associati ad a hanno la stessa altezza e di conseguenza sono isolati).

1) *Un anello locale regolare è di Macaulay* (cfr. [8], vol. II, app. 6, pag. 297 es. (1)).

2) *Un anello locale A è di Macaulay se e solo se per ogni ideale $\mathfrak{q}$, generato da un sistema di parametri, si ha $e(\mathfrak{q}) = \lambda(\mathfrak{q})$ (cfr. [8], vol. II, app. 6, teor. 3).*

2. Sia sempre A un anello commutativo con identità noetheriano. Sia $\mathfrak{a}$ un ideale di A ; per ogni $x \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ si consideri il numero intero $\varrho_x(\mathfrak{a})$ così definito:

$$\varrho_x(\mathfrak{a}) = \min \{r \in \mathbb{N} \mid x^r \in \mathfrak{a}\}.$$

Essendo A noetheriano esiste un intero m tale che $(\sqrt{\mathfrak{a}})^m \subset \mathfrak{a}$ e dunque si ha $\varrho_x(\mathfrak{a}) \leq m$. Esiste, pertanto, finito il $\max_{x \in \sqrt{\mathfrak{a}}} \{\varrho_x(\mathfrak{a})\}$. Porremo, sempre,

nel seguito

$$\varrho(\mathfrak{a}) = \max_{x \in \sqrt{\mathfrak{a}}} \{\varrho_x(\mathfrak{a})\}.$$

Se A è un anello di Macaulay ed α è un ideale di classe principale, in [4] abbiamo dato una condizione sufficiente perchè risulti $\varrho_x(\alpha) = \varrho(\alpha)$ (cfr. [4] teor. 2).

Ci occorre per il seguito dare una condizione analoga nel caso in cui A sia un anello noetheriano ed α un ideale primario o, più generalmente, una componente primaria di un dato ideale.

Cominciamo col dimostrare la seguente

PROPOSIZIONE 1: *Siano $\mathfrak{q}$ un ideale primario di A e $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$. Siano $\mathfrak{b}$ un ideale di A contenuto in $\mathfrak{q}$ ed x un elemento di A tali che $\mathfrak{p} = \mathfrak{b} + (x)$. Si ha allora: $\varrho_x(\mathfrak{q}) = \varrho(\mathfrak{q})$.*

Per definizione, esiste un elemento $y \in \mathfrak{p}$ tale che $y\varrho(\mathfrak{q})^{-1} \notin \mathfrak{q}$; d'altra parte, si può scrivere

$$y = b + ax, \quad b \in \mathfrak{b}, \quad a \in A,$$

da cui risulta $y\varrho_x(\mathfrak{q}) \in \mathfrak{q}$. Dunque $\varrho_x(\mathfrak{q}) \geq \varrho(\mathfrak{q})$ e, perciò, $\varrho_x(\mathfrak{q}) = \varrho(\mathfrak{q})$.

PROPOSIZIONE 2: *Sia $\mathfrak{q}$ un ideale primario di A e sia $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$. Si ha allora: $\varrho(\mathfrak{q}) = \varrho(\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}})$.*

Per brevità, poniamo $\varrho = \varrho(\mathfrak{q})$, $\varrho' = \varrho(\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}})$; per definizione esiste un elemento $\xi \in \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ tale che $\xi\varrho'^{-1} \notin \mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}$; l'elemento ξ si può scrivere nella forma $\xi = \frac{\varphi(x)}{\varphi(t)}$ con $x \in \mathfrak{p}$, $t \notin \mathfrak{p}$, e risulta ovviamente $x\varrho'^{-1} \notin \mathfrak{q}$.

Quindi deve essere $\varrho \geq \varrho'$. D'altra parte, per definizione, esiste un elemento $y \in \mathfrak{p}$ tale che $y\varrho^{-1} \notin \mathfrak{q}$; se $\bar{y}$ è l'immagine di y nell'omomorfismo canonico $A \rightarrow A_{\mathfrak{p}}$, per il lemma 2, risulta $\bar{y}\varrho^{-1} \notin \mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}$ e quindi $\varrho' \geq \varrho$. Dunque $\varrho = \varrho'$.

PROPOSIZIONE 3: *Siano $\mathfrak{b}$ un ideale di A , y un elemento di A , $\mathfrak{q}$ una componente primaria dell'ideale $\alpha = \mathfrak{b} + (y)$ e $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$. Allora, se x è un elemento di $\mathfrak{p}$ tale che l'ideale $\mathfrak{c} = \mathfrak{b} + (x)$ abbia $\mathfrak{p}$ come componente primaria isolata, si ha: $\varrho_x(\mathfrak{q}) = \varrho(\mathfrak{q})$.*

Localizzando in $\mathfrak{p}$ si ha $\mathfrak{c}A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{b}A_{\mathfrak{p}} + xA_{\mathfrak{p}}$ ed inoltre $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}$ è $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ -primario e contiene $\mathfrak{b}A_{\mathfrak{p}}$. Ed allora, se $\bar{x}$ è l'immagine di x nell'omomorfismo canonico $A \rightarrow A_{\mathfrak{p}}$, per la proposizione 1 si ha $\varrho_{\bar{x}}(\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}) = \varrho(\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}})$. Per il lemma 2 si ha poi $\varrho_x(\mathfrak{q}) = \varrho_{\bar{x}}(\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}})$, per la proposizione 2 si ha $\varrho(\mathfrak{q}) = \varrho(\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}})$ e, dunque, si ha $\varrho_x(\mathfrak{q}) = \varrho(\mathfrak{q})$.

LEMMA 3: *Siano $\mathfrak{b}$ un ideale ed y un elemento di A . Siano poi $\alpha = \mathfrak{b} + (y)$, x un elemento di $\sqrt{\alpha}$ ed*

$$(1) \quad x^r = b + ay, \quad (b \in \mathfrak{b}, \quad a \in A, \quad r \in \mathbb{N}).$$

Allora:

- (a) se $\mathfrak{b}: x = \mathfrak{b}$ e se $r = \varrho_x(\mathfrak{a})$, si ha $a \notin \mathfrak{b} + (x)$;
 (b) se $\mathfrak{b}: y = \mathfrak{b}$ e se $a \notin \mathfrak{b} + (x)$, si ha $r = \varrho_x(\mathfrak{a})$.

Dimostriamo la (a); supponiamo che sia $a = c + dx$ con $c \in \mathfrak{b}$, $d \in A$; sostituendo nella (1) si ha

$$(x^{r-1} - dy)x = b + cy \in \mathfrak{b}.$$

Poichè $\mathfrak{b}: x = \mathfrak{b}$, deve essere $x^{r-1} - dy \in \mathfrak{b}$ e, pertanto, $x^{r-1} = b' + dy$ con $b' \in \mathfrak{b}$; assurdo.

Dimostriamo la (b); supponiamo che sia $r > \varrho_x(\mathfrak{a})$; posto $\varrho = \varrho_x(\mathfrak{a})$, esiste allora una relazione

$$(2) \quad x^\varrho = b_0 + a_0 y, \quad (b_0 \in \mathfrak{b}, \quad a_0 \in A).$$

Dalle (1) e (2) si ricava

$$(b - b_0 x^{r-\varrho}) + (a - a_0 x^{r-\varrho})y = 0$$

e cioè $(a - a_0 x^{r-\varrho})y \in \mathfrak{b}$. Essendo $\mathfrak{b}: y = \mathfrak{b}$, si ha allora $a - a_0 x^{r-\varrho} \in \mathfrak{b}$ e quindi $a \in \mathfrak{b} + (x)$; assurdo.

LEMMA 4: Siano $\mathfrak{b}$ un ideale ed y_1, y_2 elementi di A . Allora, se $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{b} + (y_i)$ ($i = 1, 2$) ed $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + (y_1 y_2)$, si ha $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{a}_1} \cap \sqrt{\mathfrak{a}_2}$.

Si riconosce immediatamente che $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \subset \mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2$; ed allora, essendo $\sqrt{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2} = \sqrt{\mathfrak{a}_2} \cap \sqrt{\mathfrak{a}_1} = \sqrt{\mathfrak{a}_1} \cap \mathfrak{a}_2$, si ha l'asserto.

Concludiamo questo numero mostrando una proprietà additiva degli interi $\varrho(\mathfrak{q})$.

PROPOSIZIONE 4: Siano $\mathfrak{b}$ un ideale di A , y_1 e y_2 elementi di A tali che $\mathfrak{b}: y_i = \mathfrak{b}$ ($i = 1, 2$) e tali che gli ideali $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{b} + (y_i)$ siano primari ed abbiano il medesimo primo associato $\mathfrak{p}$. Supponiamo che esista un elemento $x \in A$ tale che $\mathfrak{b}: x = \mathfrak{b}$ e tale inoltre che $\mathfrak{p} = \mathfrak{b} + (x)$. Allora, se $\mathfrak{q} = \mathfrak{b} + (y_1 y_2)$, si ha $\varrho(\mathfrak{q}) = \varrho(\mathfrak{q}_1) + \varrho(\mathfrak{q}_2)$.

Per la prop. 1 si ha $\varrho_x(\mathfrak{q}) = \varrho(\mathfrak{q})$, $\varrho_x(\mathfrak{q}_i) = \varrho(\mathfrak{q}_i)$; posto, per brevità, $\varrho = \varrho(\mathfrak{q})$, $\varrho_i = \varrho(\mathfrak{q}_i)$, possiamo scrivere

$$x^{\varrho_i} = b_i + a_i y_i, \quad b_i \in \mathfrak{b}, \quad a_i \in A \quad (i = 1, 2)$$

e quindi si ha

$$x^{\varrho_1 + \varrho_2} = c + a_1 a_2 y_1 y_2, \quad c \in \mathfrak{b}.$$

Poichè $b : x = \bar{b}$, per la (a) del lemma 3 si ha $a_i \notin \mathfrak{p}$; quindi $a_1 a_2 \notin \mathfrak{p}$ ed allora, essendo $b : y_i = \bar{b}$ ($i = 1, 2$), per la (b) del lemma 3, si ha $\varrho_1 + \varrho_2 = \varrho$; l'asserto è così provato.

COROLLARIO. — Siano $\bar{b}$ un ideale di A ed y_1, y_2 elementi di A tali che $b : y_i = \bar{b}$ ($i = 1, 2$). Sia $\mathfrak{p}$ un primo isolato di ciascuno degli ideali $a_i = \bar{b} + (y_i)$ e quindi (per il lemma 4) anche dell'ideale $a = \bar{b} + (y_1 y_2)$.

Supponiamo che esista un elemento x di A tale che $b : x = \bar{b}$ e tale inoltre che l'ideale $c = \bar{b} + (x)$ abbia $\mathfrak{p}$ come componente primaria isolata. Allora, se q, q_i sono le componenti $\mathfrak{p}$ -primarie di a, a_i , rispettivamente, si ha $\varrho(q) = \varrho(q_1) + \varrho(q_2)$.

Localizzando in $\mathfrak{p}$ e tenendo conto del lemma 1, si riconosce subito che gli ideali $q_i A_{\mathfrak{p}}, q A_{\mathfrak{p}}$ e $\mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}}$ e gli elementi $\bar{x}, \bar{y}_i$ ($\bar{x}, \bar{y}_i$ essendo le immagini di x, y_i nell'omomorfismo canonico $A \rightarrow A_{\mathfrak{p}}$) verificano le ipotesi della proposizione 4 e perciò si ha $\varrho(q A_{\mathfrak{p}}) = \varrho(q_1 A_{\mathfrak{p}}) + \varrho(q_2 A_{\mathfrak{p}})$. Per la proposizione 2, si ha allora $\varrho(q) = \varrho(q_1) + \varrho(q_2)$, come volevasi.

3. In questo numero riterremo acquisite le notazioni adoperate nei numeri precedenti.

PROPOSIZIONE 5: Siano $\bar{b}$ un ideale di A , q un ideale primario principale mod $\bar{b}$ e $\mathfrak{p} = \sqrt{q}$. Sia x un elemento di A tale che $b : x = \bar{b}$ e $\mathfrak{p} = \bar{b} + (x)$; si ha allora $q = \bar{b} + (x \varrho_x(q))$.

Porremo, per brevità, $\varrho = \varrho_x(q)$; poichè $x^e \in q$, si ha $\bar{b} + (x^e) \subset q$. Dimostriamo allora che $q \subset \bar{b} + (x^e)$; essendo q principale mod $\bar{b}$, esiste un $y \in A$ tale che $q = \bar{b} + (y)$ e perciò basta provare che $y \in \bar{b} + (x^e)$. Sia

$$x^e = \bar{b} + ay \quad (b \in \bar{b}, a \in A);$$

allora si ha $ay \in \bar{b} + (x^e)$. Per il lemma 3, deve essere $a \notin \mathfrak{p}$ e quindi, essendo $\bar{b} + (x^e)$ $\mathfrak{p}$ -primario (lemma 4), si ha $y \in \bar{b} + (x^e)$, come volevasi.

PROPOSIZIONE 6: Siano $\bar{b}$ un ideale di A , q un ideale primario, principale mod $\bar{b}$ e $\mathfrak{p} = \sqrt{q}$. Sia x un elemento di A tale che $b : x = \bar{b}$ e tale inoltre che $\mathfrak{p} = \bar{b} + (x)$. Allora si ha: $\varrho(q) = \varrho_x(q) = \lambda(q)$.

La prima eguaglianza: $\varrho(q) = \varrho_x(q)$ segue dalla proposizione 1. Dimostriamo allora che $\varrho_x(q) = \lambda(q)$; porremo ancora, per brevità, $\varrho = \varrho_x(q)$.

1) Supponiamo dapprima che $\mathfrak{p}$ sia massimale. Per ogni intero positivo r l'ideale $q_r = \bar{b} + (x^r)$ è $\mathfrak{p}$ -primario, per il lemma 4; inoltre si ha $q_r \supset q_{r+1}$ e, per la proposizione 5, si ha $q_r = q$. Dimostriamo che

$$(3) \quad \mathfrak{p} = q_1 \supset q_2 \supset \dots \supset q_e = q$$

è una serie di composizione di ideali $\mathfrak{p}$ -primari. Si ha intanto $\mathfrak{q}_r \neq \mathfrak{q}_{r+1}$; infatti, se per qualche indice r fosse $\mathfrak{q}_r = \mathfrak{q}_{r+1}$, si avrebbe

$$x^r = c + dx^{r+1} \quad (c \in \mathfrak{b}, \quad d \in A)$$

e quindi $(1 - dx)x^r \in \mathfrak{b}$. Poichè $\mathfrak{b} : x = \mathfrak{b}$, è anche $\mathfrak{b} : x^r = \mathfrak{b}$ e, pertanto, deve essere $1 - dx \in \mathfrak{b}$. Dunque, $1 \in \mathfrak{p}$; assurdo. Si riconosce poi immediatamente che risulta $\mathfrak{p}\mathfrak{q}_r \subset \mathfrak{q}_{r+1}$ ed inoltre $\mathfrak{q}_r = \mathfrak{q}_{r+1} + (x^r)$; quindi non esistono ideali compresi propriamente tra $\mathfrak{q}_r$ e $\mathfrak{q}_{r+1}$ (cfr. [8], vol. I, cap. IV, § 13, cor. 2). Dunque, la (3) è una serie di composizione di ideali $\mathfrak{p}$ -primari; ciò prova la proposizione se $\mathfrak{p}$ è massimale.

2) Consideriamo adesso il caso generale. Localizzando in $\mathfrak{p}$, se denotiamo con $\bar{x}$ l'immagine di x nell'omomorfismo canonico $A \rightarrow A_{\mathfrak{p}}$, per il lemma 1 si ha $\mathfrak{b}A_{\mathfrak{p}} : \bar{x} = \mathfrak{b}A_{\mathfrak{p}}$; inoltre si ha $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{b}A_{\mathfrak{p}} + (\bar{x})$, mentre $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}$ è principale mod $\mathfrak{b}A_{\mathfrak{p}}$. Ed allora, $\mathfrak{b}A_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ ed x verificano le ipotesi del teorema nel caso 1) ove si sostituisca A con $A_{\mathfrak{p}}$; si ha quindi $\varrho_x(\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}) = \lambda(\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}})$. Per il lemma 2, si ha $\varrho_x(\mathfrak{q}) = \varrho_x(\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}})$; inoltre, si ha $\lambda(\mathfrak{q}) = \lambda(\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}})$ e, dunque, $\varrho_x(\mathfrak{q}) = \lambda(\mathfrak{q})$. La proposizione è così provata.

TEOREMA 1: *Siano $\mathfrak{b}$ un ideale di A , y un elemento di A , $\mathfrak{q}$ una componente primaria isolata dell'ideale $\alpha = \mathfrak{b} + (y)$ e $\mathfrak{p} = \sqrt{\alpha}$. Sia x un elemento di $\mathfrak{p}$ tale che $\mathfrak{b} : x = \mathfrak{b}$ e tale inoltre che l'ideale $c = \mathfrak{b} + (x)$ abbia $\mathfrak{p}$ come componente primaria isolata. Si ha allora: $\varrho(\mathfrak{q}) = \varrho_x(\mathfrak{q}) = \lambda(\mathfrak{q})$.*

La prima eguaglianza: $\varrho(\mathfrak{q}) = \varrho_x(\mathfrak{q})$ segue dalla proposizione 3. Resta, perciò, da dimostrare che $\varrho_x(\mathfrak{q}) = \lambda(\mathfrak{q})$. Localizzando in $\mathfrak{p}$ e denotando con $\bar{x}$, $\bar{y}$ le immagini di x , y nell'omomorfismo canonico $A \rightarrow A_{\mathfrak{p}}$, si ha $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{b}A_{\mathfrak{p}} + (\bar{y})$, $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{b}A_{\mathfrak{p}} + (\bar{x})$ e, per il lemma, 1 si ha anche $\mathfrak{b}A_{\mathfrak{p}} : \bar{x} = \mathfrak{b}A_{\mathfrak{p}}$. Dunque $\mathfrak{b}A_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ ed $\bar{x}$ verificano le ipotesi della proposizione 6 e quindi si ha $\varrho_{\bar{x}}(\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}) = \lambda(\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}})$. Per il lemma 2, si ha $\varrho_x(\mathfrak{q}) = \varrho_{\bar{x}}(\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}})$; inoltre $\lambda(\mathfrak{q}) = \lambda(\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}})$ e quindi $\varrho_x(\mathfrak{q}) = \lambda(\mathfrak{q})$, come volevasi.

TEOREMA 2: *Siano $\mathfrak{b} = (y_1, \dots, y_{a-1})$ un ideale puro di A ed y un elemento di A . Siano $\mathfrak{q}$ una componente primaria isolata di altezza d dell'ideale $\alpha = \mathfrak{b} + (y)$ e $\mathfrak{p} = \sqrt{\alpha}$. Allora, se x è un elemento di $\mathfrak{p}$ tale che l'ideale $c = \mathfrak{b} + (x)$ abbia $\mathfrak{p}$ come componente primaria isolata, si ha $\varrho(\mathfrak{q}) = \varrho_x(\mathfrak{q}) = \lambda(\mathfrak{q}) = e(\mathfrak{q})$.*

Siano $A_{\mathfrak{p}}$ il localizzato di A in $\mathfrak{p}$ ed $\bar{x}$, $\bar{y}$ le immagini di x , y rispettivamente, nell'omomorfismo canonico $A \rightarrow A_{\mathfrak{p}}$; si ha $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{b}A_{\mathfrak{p}} + (\bar{x})$, $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{b}A_{\mathfrak{p}} + (\bar{y})$. Inoltre si ha $\mathfrak{b}A_{\mathfrak{p}} : \bar{x} = \mathfrak{b}A_{\mathfrak{p}}$; infatti, se così non fosse $\bar{x}$ apparterrebbe ad uno dei primi associati a $\mathfrak{b}A_{\mathfrak{p}}$, sia $\mathfrak{p}'$ ([8], cap. IV,

§ 7, teor. 11); ed allora si avrebbe $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \subset \mathfrak{p}'$ e questo è assurdo essendo $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ di altezza d e $\mathfrak{p}'$ di altezza $\leq d - 1$. Dunque, gli ideali $\mathfrak{b}A_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ e l'elemento $\bar{x}$ soddisfano alle ipotesi della proposizione 6 e perciò si ha $\varrho(\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}) = \varrho_{\bar{x}}(\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}) = \lambda(\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}})$. Per il lemma 2 si ha $\varrho_x(\mathfrak{q}) = \varrho_{\bar{x}}(\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}})$, per la proposizione 2 si ha $\varrho(\mathfrak{q}) = \varrho(\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}})$ ed allora, essendo anche $\lambda(\mathfrak{q}) = \lambda(\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}})$, risulta $\varrho(\mathfrak{q}) = \varrho_x(\mathfrak{q}) = \lambda(\mathfrak{q})$.

L'ideale $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ è generato da d elementi ed ha altezza d , quindi $A_{\mathfrak{p}}$ è regolare (cfr. n. 1, (V)) ed, in particolare, è di Macaulay (n. 1, (VI) 1)); l'ideale $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}} = (y_1, \dots, y_{d-1}, y)A_{\mathfrak{p}}$ è generato da un sistema di parametri e quindi si ha $\lambda(\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}) = e(\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}})$ (n. 1, (VI), 2)); ossia, $\lambda(\mathfrak{q}) = e(\mathfrak{q})$. Il teorema è così provato.

4. Introduciamo nell'insieme delle n -ple ordinate di interi naturali una relazione d'ordine ponendo

$$(r_1, \dots, r_n) \leq (t_1, \dots, t_n) \Leftrightarrow r_i \leq t_i \text{ per ogni } i (1 \leq i \leq n).$$

Tenendo sempre presenti le notazioni usate nei numeri precedenti, vale la seguente proposizione (che generalizza la prima asserzione del teorema 3 di [4]):

PROPOSIZIONE 7: *Siano α un ideale di A privo di componenti immerse, $\alpha = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_n$ la sua decomposizione primaria e $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i} (1 \leq i \leq n)$. Siano poi $x_1, \dots, x_n$ elementi di A tali che $x_i \in \mathfrak{p}_i$, $x_i \notin \bigcup_{j \neq i} \mathfrak{p}_j$. Allora, tra tutte le n -ple di interi $(r_1, \dots, r_n)$ per cui $x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n} \in \alpha$ ne esiste una minima, costituita da $(\varrho_{x_1}(\mathfrak{q}_1), \dots, \varrho_{x_n}(\mathfrak{q}_n))$.*

Porremo, per brevità, $\varrho_{x_i}(\mathfrak{q}_i) = \varrho_i$; si ha intanto subito che $x_1^{\varrho_1} \dots x_n^{\varrho_n} \in \alpha$. D'altra parte, se $(r_1, \dots, r_n)$ è una n -pla di interi tale che $x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n} \in \alpha$, si ha $(r_1, \dots, r_n) \geq (\varrho_1, \dots, \varrho_n)$; infatti, se così non fosse, per almeno un indice i si avrebbe $\varrho_i > r_i$ e quindi, poichè $x_1^{r_1} \dots x_{i-1}^{r_{i-1}} x_{i+1}^{r_{i+1}} \dots x_n^{r_n} \notin \mathfrak{p}_i$, dovrebbe essere $x_i^{r_i} \in \mathfrak{q}_i$; assurdo.

OSSERVAZIONE: Se gli elementi $x_i \in \mathfrak{p}_i$ non sono tali che $x_i \notin \bigcup_{j \neq i} \mathfrak{p}_j$, non esiste in generale una n -pla minima relativa a $x_1, \dots, x_n$. Infatti, supponiamo, ad esempio, che $x_1 \in \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ e prendiamo $x_2 = x_1$; allora, se $\varrho_1 \leq \varrho_2$ risulta $x_1^{r_1} x_2^{r_2} x_3^{\varrho_3} \dots x_n^{\varrho_n} = x_1^{r_1+r_2} x_3^{\varrho_3} \dots x_n^{\varrho_n} \in \alpha$, qualunque siano r_1, r_2 tali che $r_1 + r_2 \geq \varrho_2$.

Il seguente teorema generalizza il teorema 2 di [5].

TEOREMA 3: *Siano $\alpha = (y_1, \dots, y_n)$ un ideale privo di componenti immerse di A , $\alpha = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_n$ la sua decomposizione primaria e $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$*

($1 \leq i \leq n$). Siano inoltre $x_1, \dots, x_n$ elementi tali che $x_i \in \mathfrak{p}_i$, $x_i \notin \bigcup_{j \neq i} \mathfrak{p}_j$ e $(\varrho_1, \dots, \varrho_n)$ la n -pla minima per cui $x_1^{\varrho_1} \dots x_n^{\varrho_n} \in \mathfrak{a}$. Supponiamo che per un indice i esista un indice t ($1 \leq t \leq h$) tale che, posto $\mathfrak{b}_t = (y_1, \dots, y_{t-1}, y_{t+1}, \dots, y_h)$, l'ideale $\mathfrak{b}_t + (x_i)$ abbia $\mathfrak{p}_i$ come componente primaria isolata. Allora

- (a) $\varrho_i = \varrho_{x_i}(\mathfrak{q}_i) = \varrho(\mathfrak{q}_i)$;
- (b) se inoltre x_i è tale che $\mathfrak{b}_t : x_i = \mathfrak{b}_t$, si ha $\varrho_{x_i} = \varrho_{x_i}(\mathfrak{q}_i) = \varrho(\mathfrak{q}_i) = \lambda(\mathfrak{q}_i)$;
- (c) se $\mathfrak{b}_t$ è puro e di altezza $h - 1$ e $\mathfrak{p}_i$ è di altezza h , si ha $\varrho_i = \varrho_{x_i}(\mathfrak{q}_i) = \varrho(\mathfrak{q}_i) = \lambda(\mathfrak{q}_i) = e(\mathfrak{q}_i)$.

La (a) è conseguenza immediata delle proposizioni 7 e 3; le (b) e (c) seguono poi subito dalla proposizione 7 e, rispettivamente, dai teoremi 1 e 2.

5. In questo numero supporremo che A sia l'anello dei polinomi nelle indeterminate $X_1, \dots, X_r$ sopra un campo k , algebricamente chiuso. Sia S_r lo spazio affine di dimensione r sopra k . Siano U, V varietà algebriche irriducibili di S_r , ed M una componente della varietà $U \cap V$. Denoteremo con $i(U \cdot V, M)$ la molteplicità di intersezione di U, V in M nel senso di C. CHEVALLEY e P. SAMUEL ²⁾.

Supponiamo che $\dim U = r - d$, $\dim V = r - h + d$ ($1 \leq d < h \leq r$) e che gli ideali di U, V siano $\mathfrak{b} = (f_1, \dots, f_d)$, $\mathfrak{c} = (f_{d+1}, \dots, f_h)$ rispettivamente. Supponiamo, inoltre, che M sia componente propria di $U \cap V$. Sia Q l'anello locale di M sopra V (se $\mathfrak{p}$ è l'ideale di M , $Q = (A/\mathfrak{c})_{\mathfrak{p}/\mathfrak{c}}$) e sia f_j^r ($1 \leq j \leq d$) la funzione indotta da f_j sopra V ; $f_1^r, \dots, f_d^r$ costituiscono un sistema di parametri di Q . Infatti, posto $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$, $\mathfrak{Q} = (f_1^r, \dots, f_d^r)$, si ha $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{a}/\mathfrak{c})Q$ ed allora, se $\mathfrak{q}$ è la componente primaria

²⁾ Ricordiamo che la molteplicità di intersezione di U, V in M definita da P. SAMUEL in [3] estende quella definita da C. CHEVALLEY in [1] nel caso in cui M sia una componente propria di $U \cap V$, cioè tale che $\dim M = \dim U + \dim V - r$. Sempre nel caso in cui M sia componente propria di $U \cap V$, essa coincide con quella definita da A. WEIL in [6], che si fonda sul concetto di molteplicità di una specializzazione (cfr. [6], appendice 2, oppure [3], cap. III, n. 3).

Noi considereremo solo casi di molteplicità di intersezione lungo componenti proprie.

di α relativa a M , risulta $\mathfrak{Q} = (q/c)Q$. Dunque, $\mathfrak{Q}$ è primario per l'ideale massimale di Q . Poichè Q ha dimensione $(r - h + d) - (r - h) = d$, si ha l'asserto.

Se M è semplice per U , si ha

$$(4) \quad i(U \cdot V, M) = \lambda(q).$$

Infatti, risulta $i(U \cdot V, M) = e(\mathfrak{Q})$ ([1], parte II, prop. 4, pag. 35); d'altra parte l'anello Q è di Macaulay ([8], vol. II, appendice 6, pag. 400, Remark), perciò si ha (cfr. anche n. 1 (II)):

$$e(\mathfrak{Q}) = \lambda(\mathfrak{Q}) = \lambda[(q/c)\mathfrak{Q}] = \lambda(q/c) = \lambda(q),$$

e quindi la (4).

Nel seguito diremo che due varietà irriducibili U, V si incontrano semplicemente in una componente M di $U \cap V$, se $i(U \cdot V, M) = 1$.

Ci occorre ricordare la seguente

PROPOSIZIONE 8: *Sia M una componente propria dell'intersezione di due varietà irriducibili U, V , Siano poi $\mathfrak{p}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ gli ideali di M, U, V rispettivamente. Allora U, V si incontrano semplicemente in M se e solo se l'ideale $(\mathfrak{b} + \mathfrak{c})A_{\mathfrak{p}}$ è primo. (cfr. [1], parte II, prop. 6, pag. 36).*

Ciò premesso, dimostriamo ora il seguente

TEOREMA 4: *Siano U una varietà irriducibile di ideale $\mathfrak{b}$, completa intersezione, F un'ipersuperficie di ideale (f) non contenente U ed M una componente di $U \cap F$, semplice per U . Sia G un'ipersuperficie di ideale (g) che incontri U semplicemente in M . Allora, se q è la componente primaria di $\alpha = \mathfrak{b} + (f)$ relativa a M , si ha $i(U \cdot V, M) = \varrho_{\sigma}(q) = \varrho(q)$.*

Cominciamo ad osservare che M è componente propria di $U \cap V$; infatti, poichè F non contiene U , si ha $\dim M = \dim U - 1 = (r - 1) - \dim U - r = \dim F + \dim U - r$. Siccome M è semplice per U , si può applicare la (4) e quindi $i(U \cdot V, M) = \lambda(q)$. Sia $\mathfrak{p} = \sqrt{q}$; l'ideale $\mathfrak{b} + (g)$ ha $\mathfrak{p}$ come componente primaria isolata; infatti, poichè G passa per M , si ha $g \in \mathfrak{p}$ e quindi $\mathfrak{b} + (g) \subset \mathfrak{p}$. Dunque, $\mathfrak{p}$ contiene uno dei primi associati a $\mathfrak{b} + (g)$, sia questo $\mathfrak{p}'$. Poichè G non contiene U , $\mathfrak{p}'$ ha dimensione eguale a $\dim U - 1$ e quindi si ha $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$; cioè $\mathfrak{p}$ è un primo (necessariamente isolato) associato a $\mathfrak{b} + (g)$. Sia q' la componente $\mathfrak{p}$ -primaria di $\mathfrak{b} + (g)$; essendo q' isolato, risulta $(\mathfrak{b} + (g))A_{\mathfrak{p}} = q'A_{\mathfrak{p}}$; d'altra parte, per ipotesi, è $i(U \cdot G, M) = 1$ e quindi, per la proposizione 8, si ha $(\mathfrak{b} + (g))A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$, onde $q' = \mathfrak{p}$. Per il teorema 2 si ha, allora, $\lambda(q) = \varrho_{\sigma}(q) = \varrho(q)$ e quindi risulta $i(U \cdot F, M) = \varrho_{\sigma}(q) = \varrho(q)$.

COROLLARIO: Siano U, F come nel teorema 4. Siano $M_1, \dots, M_n$ le componenti di $U \cap F$, $G_j (1 \leq j \leq n)$ una ipersuperficie di ideale (g_j) che passi per M_j , ma non passi per nessun'altra M_s , con $s \neq j$, e sia $(\varrho_1, \dots, \varrho_n)$ la n -pla minima tale che $g_1^{\varrho_1} \dots g_n^{\varrho_n} \in \mathfrak{b} + (f)$. Allora, se per un indice j M_j è semplice per U e G_j incontra U semplicemente in M_j , si ha $\varrho_j = i(U \cdot F, M_j)$.

Se q_j è la componente primaria di $\mathfrak{b} + (f)$ relativa a M_j , per il teorema 4 si ha $i(U \cdot F, M_j) = \varrho(q_j)$; d'altra parte, per il teorema 3, si ha $\varrho(q_j) = \varrho_j$ e di qui l'asserto.

Il teorema 4 ed il suo corollario si possono generalizzare nel modo seguente.

TEOREMA 5: Siano U, V varietà irriducibili di ideali $\mathfrak{b} = (f_1, \dots, f_d)$, $\mathfrak{c} = (f_{d+1}, \dots, f_h)$ ($1 \leq d < h \leq r$) rispettivamente, ciascuna completa intersezione e tali che l'ideale $\mathfrak{a} = (f_1, \dots, f_h)$ sia puro. Sia M una componente di $U \cap V$ di dimensione $r - h$ e sia G un'ipersuperficie di ideale (g) passante per M , tale che:

(a) G non contiene nessuna componente della varietà dell'ideale $\mathfrak{n} = (f_1, \dots, f_{h-1})$;

(b) $\mathfrak{n} + (g)$ abbia l'ideale $\mathfrak{p}$ di M come componente primaria isolata.

Allora, se q è la componente $\mathfrak{p}$ -primaria di $\mathfrak{a}$, si ha $i(U \cdot V, M) = \varrho_s(q) = \varrho(q)$.

Gli elementi $f_1, \dots, f_d$ costituiscono un sistema di parametri per l'anello locale di U , mentre, essendo $(\mathfrak{n} + (g))A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$, $f_1, \dots, f_{h-1}, g$ costituiscono un sistema regolare di parametri dell'anello locale di M . Quindi M è semplice per U ([1], parte III, prop. 3, pag. 61). Si può allora applicare la (4) e quindi $i(U \cdot V, M) = \lambda(q)$. La (a) significa che $\mathfrak{n} : g = \mathfrak{n}$; dunque $\mathfrak{n}, f_h, g$ soddisfano alle ipotesi del teorema 1 e, pertanto, si ha $\varrho(q) = \varrho_s(q) = \lambda(q)$; di qui l'asserto.

COROLLARIO: Siano U, V come nel teorema 5. Siano $M_1, \dots, M_n$ le componenti di $U \cap V$ e sia $G_j (1 \leq j \leq n)$ un'ipersuperficie di ideale (g_j) passante per M_j ma non passante per M_s con $s \neq j$. Supponiamo che per un indice j si abbia $\dim M_j = r - h$ ed inoltre G_j soddisfi alle condizioni (a) e (b) del teorema 5. Allora, se $(\varrho_1, \dots, \varrho_n)$ è la n -pla minima tale che $g_1^{\varrho_1} \dots g_n^{\varrho_n} \in \mathfrak{a}$, si ha $i(U \cdot V, M_j) = \varrho_j$.

Infatti, se q_j è la componente primaria di $\mathfrak{a}$ relativa a M_j , per il teorema 5 si ha $i(U \cdot V, M_j) = \varrho(q_j)$ e, d'altra parte, per il teorema 3, si ha $\varrho(q_j) = \varrho_j$.

6. Nei numeri precedenti ci è spesso occorsa l'ipotesi che un ideale primo $\mathfrak{p}$ compaia come componente isolata nella decomposizione primaria di un ideale α . Esponiamo qui un criterio (prop. 9) per riconoscere quando ciò si verifica nel caso in cui α sia un ideale dell'anello $A = k[X_1, \dots, X_r]$, k essendo sempre algebricamente chiuso, e $\mathfrak{p}$ un primo associato ad α . Da tale criterio discende anche una caratterizzazione (espressa dal corollario alla prop. 8) degli ideali di classe principale di A la cui n -pla $(\varrho_1, \dots, \varrho_n)$ introdotta nel n. 4 è costituita da interi tutti eguali ad 1. Il criterio anzidetto, che poggia sulla nozione di zero semplice di un ideale, si deduce facilmente da risultati che trovansi in [7].

Per ogni ideale α di A denoteremo con $\mathcal{V}(\alpha)$ la varietà di α in S_r .

Sia P un punto di S_r e sia $\mathfrak{P}$ l'ideale di P ; si dice che P è *zero semplice* di un ideale α di A se $P \in \mathcal{V}(\alpha)$ e se esistono dei polinomi $u_1, \dots, u_m \in A$ tali che:

$$1) \alpha A_{\mathfrak{P}} = (u_1, \dots, u_m) A_{\mathfrak{P}},$$

2) $u_1, \dots, u_m$ costituiscono un sottoinsieme di un sistema regolare di parametri di $A_{\mathfrak{P}}$ ([7], parte I, n. 3, def. 2).

Ed allora si ha (v. n. 1, (V) (ii)):

$$3) \text{ l'ideale } \alpha A_{\mathfrak{P}} \text{ è primo.}$$

In particolare, se V è una varietà algebrica di S_r , un punto P di V è semplice per V se è zero semplice dell'ideale di V .

PROPOSIZIONE 9: *Sia $\mathfrak{q}$ una componente primaria isolata di un ideale α di A ; $\mathfrak{q}$ è primo se e solo se sopra la componente $\mathcal{V}(\mathfrak{q})$ della varietà $\mathcal{V}(\alpha)$ esiste uno zero semplice di α .*

Sia $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$. Supponiamo che sia $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$. Se $\mathfrak{p}$ è di dimensione zero, $\mathcal{V}(\mathfrak{q})$ è un punto P e, se $a_1, \dots, a_r$ sono le sue coordinate, si ha $\mathfrak{p} = (X_1 - a_1, \dots, X_r - a_r)$ onde i polinomi $X_i - a_i$ ($1 \leq i \leq r$) soddisfano alle 1), 2) e P è zero semplice di α . Supponiamo che $\mathfrak{p}$ abbia dimensione ≥ 1 . Denotiamo con S_0 l'insieme (eventualmente vuoto) delle intersezioni di $\mathcal{V}(\mathfrak{q})$ con le rimanenti componenti di $\mathcal{V}(\alpha)$; inoltre, se $\mathfrak{p}'_1, \dots, \mathfrak{p}'_\sigma$

($\sigma \geq 0$) sono i primi immersi di α contenenti $\mathfrak{p}$, poniamo $S' = \bigcup_{s=1}^{\sigma} \mathcal{V}(\mathfrak{p}'_s)$, $S = S' \cup S_0$. S è un sottoinsieme proprio di $\mathcal{V}(\mathfrak{q})$ e fuori di S $\mathcal{V}(\mathfrak{q})$ possiede un punto semplice P ([7], parte I, n. 4, lemma 4). E, pertanto, se $\mathfrak{P}$ è l'ideale di P esistono dei polinomi $u_1, \dots, u_m$ tali che $\mathfrak{p} = (u_1, \dots, u_m) A_{\mathfrak{P}}$ e tali inoltre che $u_1, \dots, u_m$ sia un sottoinsieme di un sistema regolare di parametri di $A_{\mathfrak{P}}$. Siccome P è scelto fuori di S , risulta $\mathfrak{p} A_{\mathfrak{P}} = \mathfrak{q} A_{\mathfrak{P}} = \alpha A_{\mathfrak{P}}$; dunque, $u_1, \dots, u_m$ soddisfano alle 1), 2) e P è zero semplice di α .

Supponiamo ora che sopra $\mathcal{V}(\mathfrak{q})$ esista uno zero semplice P di α e mostriamo che allora si ha $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$. Sia $\mathfrak{P}$ l'ideale di P ; siano $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_s$ ($s \geq 1$) i primi isolati di α contenuti in $\mathfrak{P}$; gli ideali $\mathfrak{p}_i A_{\mathfrak{P}}$ sono i primi isolati di $\alpha A_{\mathfrak{P}}$. Siccome, per la 3), l'ideale $\alpha A_{\mathfrak{P}}$ è primo, deve essere $s = 1$; pertanto $\alpha A_{\mathfrak{P}} \cap A = \mathfrak{p}$. D'altra parte deve essere $\alpha A_{\mathfrak{P}} \cap A \subset \mathfrak{q}$ e quindi $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$.

COROLLARIO 1: *Un ideale α di A , privo di componenti immerse, è semi-primo (cioè intersezione di ideali primi) se e solo se sopra ogni componente della varietà $\mathcal{V}(\alpha)$ esiste uno zero semplice di α .*

Applicando il criterio jacobiano classico (cfr. [7], parte I, n. 7, teor. 7 e corollario) si ha il

COROLLARIO 2: *Sia $\mathfrak{q}$ una componente primaria isolata di altezza h di un ideale α di A , privo di componenti immerse. Allora, se $f_1, \dots, f_m$ è un sistema di generatori di α , $\mathfrak{q}$ è primo se e solo se sopra $\mathcal{V}(\mathfrak{q})$ esiste un punto in cui la matrice jacobiana $J(f_1, \dots, f_m) = \partial(f_1, \dots, f_m)/\partial(X_1, \dots, X_r)$ ha caratteristica h .*

Dalla proposizione 9 si deduce facilmente il seguente risultato:

PROPOSIZIONE 10: *Sia $\alpha = (f_1, \dots, f_h)$ ($h \leq r$) un ideale di A . Supponiamo che sopra ogni componente della varietà $\mathcal{V}(\alpha)$ esista un punto in cui la matrice jacobiana $J(f_1, \dots, f_h)$ abbia caratteristica h . Allora α è di dimensione $r - h$ e semiprimo³⁾.*

Sia $\mathfrak{p}$ un primo isolato di α ; se d è la dimensione di $\mathfrak{p}$, si ha $d \geq r - h$. D'altra parte, in ogni punto di $\mathcal{V}(\alpha)$ la matrice $J(f_1, \dots, f_h)$ ha caratteristica $\leq r - d$ ([7], parte II, n. 6, lemma 5) ed allora si ha $d = r - h$. Dunque α è di dimensione $r - h$. Per il teorema di Macaulay α è puro e, quindi, per i corollari 2 e 1, è semiprimo.

COROLLARIO. *Siano $\alpha = (f_1, \dots, f_h)$ un ideale di altezza h di A , $\alpha = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_n$ la sua decomposizione primaria e $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\alpha_i}$. Le condizioni seguenti sono equivalenti*

(a) *la matrice jacobiana $J(f_1, \dots, f_h)$ ha caratteristica h in almeno un punto di ogni componente di $\mathcal{V}(\alpha)$;*

(b) *α è semiprimo;*

(c) *se g è un polinomio che si annulla su $\mathcal{V}(\alpha)$, allora $g \in \alpha$.*

Se inoltre esiste una n -pla di elementi $g_i \in \mathfrak{p}_i$, $g_i \notin \bigcup_{j \neq i} \mathfrak{p}_j$ ($1 \leq i \leq n$)

³⁾ Un enunciato sostanzialmente analogo trovasi già in F. SEVERI - *Rappresentazione di una forma qualunque per combinazione lineare di più altre*, Rend. Ac. dei Lincei, s. V, vol. 11 1° sem. (1902) pagg. 105-113.

in guisa che per ogni i esista un indice t ($1 \leq t \leq h$) tale che l'ideale $(f_1, \dots, t_{i-1}, f_{i+1}, \dots, f_h, g_i)$ abbia $\mathfrak{p}_i$ come componente primaria isolata, allora le condizioni precedenti sono equivalenti alla seguente

(d) se $(\varrho_1, \dots, \varrho_n)$ è la n -pla minima tale che $g_1^{\varrho_1} \dots g_n^{\varrho_n} \in \mathfrak{a}$, si ha $(\varrho_1, \dots, \varrho_n) = (1, \dots, 1)$.

L'implicazione $(a) \rightarrow (b)$ è contenuta nella prop. 10; la $(b) \rightarrow (a)$ segue dal corollario 2 della prop. 9. L'equivalenza della (b) con (c) segue dal teorema degli zeri di Hilbert; infatti, se g si annulla su $\mathcal{V}(\mathfrak{a})$, per il teorema degli zeri di Hilbert, si ha $g \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ e quindi, essendo $\mathfrak{a}$ semi-primo, risulta $g \in \mathfrak{a}$; il viceversa è ovvio.

Supponiamo ora che esista una n -pla di polinomi soddisfacenti alle ipotesi dell'enunciato, e dimostriamo l'equivalenza delle (b) , (d) . La $(b) \rightarrow (d)$ è ovvia; inoltre, poichè, per il teorema 3 si ha, $\varrho_i = \varrho(\mathfrak{q}_i)$ ($1 \leq i \leq n$), essendo $\varrho_i = 1$, si ha $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{q}_i$. Dunque, $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i$ per ogni i .

BIBLIOGRAFIA

- [1] CHEVALLEY C.: *Intersections of algebraic and algebroid varieties*. Trans. of the Am. Math. Soc. 57 (1945) pp. 1-85.
- [2] NORTHCOTT D. G.: *Ideal Theory*, Cambridge, 1963.
- [3] SAMUEL P.: *La notion de Multiplicité en Algèbre et en Géométrie Algébrique*. Journal de Mathématique 30 (1951), pp. 159-274.
- [4] VECCHIO G.: *Sugli ideali di classe principale e il teorema degli zeri di Hilbert*. Le Matematiche, vol. XX, fasc. 1 (1965), pp. 7-21.
- [4'] VECCHIO G.: *Aggiunte e correzioni alla Nota « Sugli ideali di classe principale e il teorema degli zeri di Hilbert »*. Le matematiche, vol. XX, fasc. 1 (1965).
- [5] VECCHIO G.: *Su certi interi associati ai primari di un ideale in un anello noetheriano*. Rend. Ac. Naz. dei Lincei, serie VIII, vol. XXXVII, fasc. 6 (1964), pp. 377-380.
- [6] WEIL A.: *Foundations of algebraic geometry*. Am. Math. Soc., 1962.
- [7] ZARISKI O.: *The concept of a simple point of an abstract algebraic variety*. Trans. of the Am. Math. Soc. 62 (1947), pp. 1-52.
- [8] ZARISKI O., SAMUEL P.: *Commutative algebra*. Voll. I e II, Van Nostrand, 1958-1960.

Manoscritto pervenuto in redazione il 19 gennaio 1966.