S. GRECO

Sugli ideali frazionari invertibili

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 36, nº 2 (1966), p. 315-333

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1966__36_2_315_0>

SUGLI IDEALI FRAZIONARI INVERTIBILI

di S. GRECO (*a Genova*) *)

In questo lavoro **) ci proponiamo di dare alcuni teoremi di fattorizzazione per gli ideali invertibili di un anello commutativo A, che generalizzano un noto risultato valido per i domini di Dedekind. I risultati ottenuti permettono di estendere ai domini noetheriani localmente fattoriali altre proprietà dei domini di Dedekind, e di dare alcuni criteri di annullamento per il gruppo $\mathbf{P}(A)$ delle classi di A-moduli proiettivi di rango 1 di un anello A.

Il lavoro si svolge nel modo seguente. Nel n. 1 sono richiamati, completandoli in qualche punto, alcuni risultati noti sugli ideali frazionari invertibili e sui moduli proiettivi di rango 1. Nel n. 2 viene dato un primo teorema di fattorizzazione per gli ideali invertibili (teor. 2.1), dal quale seguono criteri per stabilire se ogni ideale frazionario invertibile di un anello A è libero, e per l'annullarsi del gruppo $\mathbf{P}(A)$.

Il teorema 2.1 viene poi applicato, nel n. 3, per dare una caratterizzazione degli anelli noetheriani integri localmente fatto-

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Via L. B. Alberti, 4, Genova.

**) L'A., ringrazia il Prof. P. Salmon per avergli dato utili consigli nella redazione del presente lavoro.

riali. Nello stesso numero sono date altre proprietà di tali anelli, le quali estendono risultati noti validi per i domini di Dedekind. Alcune di queste proprietà permettono poi, nel n. 4, di caratterizzare gli anelli localmente fattoriali A per i quali $\mathbf{P}(A) = 0$.

Nel n. 5 si dimostra che in un anello A di dimensione 1 ogni ideale invertibile è prodotto di ideali primari; ne segue che $\mathbf{P}(A) = 0$ se e solo se ogni ideale primario invertibile è libero. Infine, nel n° 6, viene dato un teorema che permette di « rimontare » in un anello $\mathfrak{m}$-completo A gli ideali invertibili di $A/\mathfrak{m}$, nel caso in cui $\dim A/\mathfrak{m} = 1$. Seguono poi un criterio di non fattorialità per certi completamenti $\mathfrak{m}$-adici, ed alcuni esempi.

1. In questo numero sono esposti alcuni risultati noti sui moduli proiettivi di rango 1 e sugli ideali frazionari invertibili. Gli enunciati principali sono tratti da [1], cap. II, e non sono dati nella forma più generale, ma nella maniera che risulterà più utile per le prossime applicazioni. L'esposizione è completata da alcune semplici conseguenze dei suddetti risultati.

Gli anelli sono sempre supposti commutativi e con identità, ed i moduli sono supposti unitari. Un anello si dice *integro* se è privo di divisori dello zero.

Siano A un anello e B l'anello totale delle frazioni di A; un sotto-A-modulo $\mathfrak{a}$ di B si dice *ideale frazionario* di A se esiste un $d \in A$, non divisore dello zero, tale che $d\mathfrak{a} \subset A$. Gli ideali di A sono evidentemente ideali frazionari; per maggiore chiarezza essi saranno chiamati talvolta *ideali interi* di A.

L'insieme degli ideali frazionari di A con la moltiplicazione è un monoide commutativo, il cui elemento neutro è l'ideale intero A. Gli elementi invertibili di tale monoide si chiamano *ideali frazionari invertibili* e formano un gruppo abeliano $\mathfrak{J}(A)$;
liberi = principali
inoltre l'insieme $\mathfrak{L}(A)$ costituito dagli ideali frazionari liberi di A è un sottogruppo di $\mathfrak{J}(A)$. Il gruppo quoziente $\mathfrak{C}(A) = \mathfrak{J}(A)/\mathfrak{L}(A)$ si dice *gruppo delle classi di ideali frazionari invertibili* di A, e l'immagine di $\mathfrak{a} \in \mathfrak{J}(A)$ in $\mathfrak{C}(A)$ sarà indicata con $\bar{\mathfrak{a}}$.

Per ogni $\mathfrak{a} \in \mathfrak{J}(A)$ esiste $d \in A$ non divisore dello zero tale che $(d)\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \subset A$. Si verifica allora facilmente che $\mathfrak{b} \in \mathfrak{J}(A)$ e che $\bar{\mathfrak{a}} = \bar{\mathfrak{b}}$. Quindi ogni elemento di $\mathfrak{C}(A)$ è immagine di un ideale intero invertibile di A; in particolare si ha: $\mathfrak{C}(A) = 0$ *se e solo se ogni ideale invertibile di A è libero.*

Un ideale frazionario di A si dice *non degenere* se contiene qualche elemento di A che non sia divisore dello zero. Ogni ideale frazionario invertibile è non degenere (cfr. [1], cap. II, § 5, n. 6, prop. 10).

Il prossimo teorema 1.1 collega il concetto di ideale (intero) invertibile con quello di ideale proiettivo non degenere. Ricordiamo che un A-modulo M di tipo finito è proiettivo di rango n se e solo se per ogni ideale massimale $\mathfrak{m}$ di A l'$A_{\mathfrak{m}}$-modulo $M \otimes A_{\mathfrak{m}}$ è libero di rango n (cfr. [1], cap. II, § 3, n. 3, teor. 2).

TEOREMA 1.1: *Siano A un anello ed $\mathfrak{a}$ un ideale non degenere di A. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti*:

i) $\mathfrak{a}$ *è inveribile*;
ii) $\mathfrak{a}$ *è un A-modulo proiettivo*;
iii) $\mathfrak{a}$ *è un A-modulo proiettivo di rango* 1;
iv) $\mathfrak{a}$ *è di tipo finito, e per ogni ideale massimale* $\mathfrak{m}$ *contenente* $\mathfrak{a}$, *l'ideale* $\mathfrak{a}A_{\mathfrak{m}}$ *è principale.*

PROVA: Sia $\mathfrak{m}$ un ideale massimale di A; allora $A_{\mathfrak{m}}$ è un A-modulo piatto (cfr. [1], cap. II, § 2, n. 4, teor. 1), e quindi si ha $\mathfrak{a}A_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{a} \otimes A_{\mathfrak{m}}$ (cfr. [1], cap. I, § 2, n. 3, prop. 1). Inoltre se $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{m}$ si ha $\mathfrak{a}A_{\mathfrak{m}} = A_{\mathfrak{m}}$. La *iv*) è allora equivalente a: « $\mathfrak{a}$ è di tipo finito ed $\mathfrak{a} \otimes A_{\mathfrak{m}}$ è monogeno per ogni ideale massimale $\mathfrak{m}$ ». Il teorema è allora una conseguenza immediata di [1], cap. II, § 5, n. 6, teor. 4.

Dal teorema 1.1 e da quanto precede si vede che un ideale è invertibile se e solo se è proiettivo e non degenere.

PROPOSIZIONE 1.2: *Siano A un anello noetheriano ed $\mathfrak{a}$ un ideale proprio invertibile di A. Allora ogni primo minimale di $\mathfrak{a}$ ha altezza* 1. *Se inoltre per ogni ideale massimale $\mathfrak{m}$ di A contenente $\mathfrak{a}$, $A_{\mathfrak{m}}$ è* (*integro e*) *integralmente chiuso*, $\mathfrak{a}$ *non ha componenti immerse.*

PROVA: Siano $\mathfrak{p}$ un primo minimale di $\mathfrak{a}$ ed $\mathfrak{m}$ un ideale massimale contenente $\mathfrak{p}$. Allora $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{m}}$ è un primo minimale di $\mathfrak{a}A_{\mathfrak{m}}$ (cfr. [7], vol. I, cap. IV, § 10, teor. 17); e poichè $\mathfrak{a}A_{\mathfrak{m}}$ è principale (teor. 1.1), $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{m}}$ ha altezza $\leqslant 1$ (hauptidealsatz), da cui segue che $\mathfrak{p}$ ha altezza $\leqslant 1$. D'altra parte $\mathfrak{p}$ è non degenere e quindi non può avere altezza zero; la prima parte della proposizione è così dimostrata.

Supponiamo ora che $A_{\mathfrak{m}}$ sia integralmente chiuso per ogni ideale massimale $\mathfrak{m}$ contenente $\mathfrak{a}$. Allora per ognuno di questi ideali massimali $\mathfrak{a}A_{\mathfrak{m}}$ è puro di altezza 1 (cfr. [7], vol. I, cap. V, § 6, teor. 14); di qui la tesi.

Il fatto che un ideale non degenere è invertibile si può esprimere mediante delle relazioni tra i suoi generatori, come mostra la prossima proposizione 1.4; tale proposizione è conseguenza del teorema 1.1 e del seguente

LEMMA 1.3: *Sia A un anello con un solo ideale massimale $\mathfrak{m}$. Se $\mathfrak{a}$ è un ideale libero di A ed $a_1, \ldots, a_n$ è un sistema di generatori di $\mathfrak{a}$, si ha $\mathfrak{a} = (a_i)$ per almeno un i $(1 \leqslant i \leqslant n)$.*

PROVA: Poniamo $(b) = (a_1, \ldots, a_n)$ e proviamo che b è associato ad a_i per almeno un i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Si hanno relazioni del tipo:

$$(1) \qquad b = \sum_1^n {}_i\, b_i a_i, \qquad b_1, \ldots, b_n \in A,$$

$$(2) \qquad a_i = c_i b, \qquad c_1, \ldots, c_n \in A.$$

Sostituendo la (2) nella (1) si trova:

$$b = \sum_1 {}_i\, b_i c_i b,$$

e poichè b non è divisore dello zero (in quanto $\mathfrak{a}$ è libero) si ha:

$$1 = \sum_1^n {}_i\, b_i c_i .$$

Allora $b_i c_i \notin m$ per almeno un i; quindi c_i è invertibile e la tesi segue dalla (2).

PROPOSIZIONE 1.4: *Siano A un anello ed $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ un ideale proprio non degenere di A. Allora $\mathfrak{a}$ è invertibile se e solo se per ogni ideale massimale $\mathfrak{m}$ di A contenente $\mathfrak{a}$ esiste un indice i*

tale che si abbiano relazioni del tipo:

$$b_j a_j + c_j a_i = 0, \tag{3}$$

con b_j, $c_j \in A$, e $b_j \notin \mathfrak{m}$ $(j = 1, \dots, n)$.

PROVA: Supponiamo che $\mathfrak{a}$ sia invertibile, e sia $\mathfrak{m}$ un ideale di A contenente $\mathfrak{a}$. Per ogni $x \in A$ indichiamo con x' l'immagine canonica di x in $A_{\mathfrak{m}}$. Per il teorema 1.1 l'ideale $\mathfrak{a}A_{\mathfrak{m}} = (a'_1, \dots, a'_n)A_{\mathfrak{m}}$ è libero e quindi si ha (lemma 1.3)

$$(a'_1, \dots, a'_n)A_{\mathfrak{m}} = (a'_i)A_{\mathfrak{m}},$$

per un i opportuno. Esistono allora relazioni del tipo

$$a'_j = \frac{p'_j}{q'_j} a'_i, \tag{4}$$

con p_j, $q_j \in A$ e $q_j \notin \mathfrak{m}$ $(j = 1, \dots, n)$. Le (4) danno in A

$$s(q_j a_j - p_j a_i) = 0,$$

con $s \notin \mathfrak{m}$. Di qui segue subito la (3).

Il viceversa è una conseguenza immediata delle ipotesi e del teorema 1.1.

Sia A un anello e sia $\mathbf{P}(A)$ l'insieme delle classi di A-moduli proiettivi di rango 1 (ottenuto identificando gli A-moduli proiettivi di rango 1 tra loro isomorfi; cfr. [1], cap. II, § 5, n. 4), e indichiamo con $cl(E)$ l'immagine in $\mathbf{P}(A)$ dell'A-modulo proiettivo di rango 1 E. La somma $cl(E) + cl(F) = cl(E \otimes F)$ è ben definita e dota $\mathbf{P}(A)$ di una struttura di gruppo abeliano (cfr. [1], cap. II, § 5, n. 4, prop. 7). $\mathbf{P}(A)$ si dice pertanto *gruppo delle classi di A-moduli proiettivi di rango* 1.

Se $\mathfrak{a}$ è un ideale invertibile di A, per il teorema 1.1 è definito l'elemento $cl(\mathfrak{a})$ di $\mathbf{P}(A)$; si vede inoltre che l'applicazione $u : \bar{\mathfrak{a}} \to cl(\mathfrak{a})$ è un omomorfismo iniettivo di $\mathfrak{C}(A)$ in $\mathbf{P}(A)$ (cfr. [1], cap. II, § 5, n. 7, prop. 12). Tale omomorfismo è un isomorfismo nei due casi indicati dalla seguente proposizione (cfr. [1], cap. II, § 5, n. 7, rem. 1 e 2 dopo la prop. 12).

PROPOSIZIONE 1.5: *Se A è un anello integro oppure noetheriano u è un isomorfismo tra $\mathfrak{C}(A)$ e $\mathbf{P}(A)$.*

COROLLARIO 1.6: *Siano A un anello noetheriano, ed $\mathfrak{a}$ un ideale di A. Se $\mathfrak{a}$ è un A-modulo proiettivo di rango 1, $\mathfrak{a}$ è non degenere.*

PROVA: Per la proposizione 1.5 esiste un ideale frazionario invertibile $\mathfrak{b}$ tale che $cl(\mathfrak{a}) = u(\bar{\mathfrak{b}}) = cl(\mathfrak{b})$. Quindi $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ sono isomorfi, e poichè $\mathfrak{b}$ non è degenere, anche $\mathfrak{a}$ è tale.

PROPOSIZIONE 1.7: *Sia A un anello noetheriano. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

i) $\mathbf{P}(A) = 0$;

ii) ogni ideale invertibile di A è libero.

Se inoltre lo spettro primo spec (A) *di A è connesso, le condizioni precedenti sono equivalenti alla*

iii) ogni ideale proiettivo di A è libero.

PROVA: Poichè $\mathbf{P}(A) = \mathfrak{C}(A)$ (prop. 1.5), *i)* e *ii)* sono equivalenti. Supponiamo ora che spec (A) sia connesso, e sia $\mathfrak{a}$ un ideale proiettivo di A. Allora il rango di $\mathfrak{A}$ è definito (cfr. [1], cap. II, § 5), ed è $\leqslant 1$. Se $\mathfrak{a}$ ha rango zero si ha $\mathfrak{a}A_{\mathfrak{m}} = 0$ per ogni ideale massimale $\mathfrak{m}$, e quindi $\mathfrak{a} = 0$ (cfr. [1], cap. II, § 3, n. 3, cor. 3 del teor. 1). Ne segue che se $\mathfrak{a}$ è diverso da zero, $\mathfrak{a}$ ha rango 1, e pertanto *i)* $\Rightarrow$ *iii)*. D'altra parte *iii)* $\Rightarrow$ *i)* banalmente, e quindi la prova è completa.

2. In questo numero diamo un teorema di fattorizzazione per gli ideali invertibili, da cui segue un criterio di annullamento per il gruppo $\mathfrak{C}(A)$ di un anello A; se poi A è un anello noetheriano, il criterio suddetto permette di stabilire se $\mathbf{P}(A) = 0$.

Sia A un anello, e sia $\mathbf{F}$ l'insieme degli ideali invertibili di A distinti da A, semiordinato mediante l'inclusione. Diremo che A *verifica la condizione* (m) se ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbf{F}$ ha un elemento massimale.

Sia $\mathbf{M}$ l'insieme degli elementi massimali di $\mathbf{F}$; si vede facilmente che se A verifica la condizione (m), ogni elemento di $\mathbf{F}$ è contenuto in un elemento di $\mathbf{M}$.

TEOREMA 2.1: *Sia A un anello che verifica la condizione (m). Allora ogni elemento di* $\mathbf{F}$ *è prodotto di elementi di* $\mathbf{M}$.

Questo teorema generalizza un fatto noto sui domini di Dedekind (cfr. [7], vol. I, cap. V, § 6, teor. 12), e la dimostrazione qui esposta ricalca essenzialmente quella data in [7].

PROVA: Supponiamo che la tesi sia falsa. Allora per la condizione (m), esiste un $\mathfrak{a} \in \mathbf{F}$ tale che:

(1) $\mathfrak{a}$ non è prodotto di elementi di $\mathbf{M}$.

(2) Ogni $\mathfrak{b} \in \mathbf{F}$ che contiene propriamente $\mathfrak{a}$ è prodotto di elementi di $\mathbf{M}$.

Sia $\mathfrak{p} \in \mathbf{M}$ tale che $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$. Per dimostrare il teorema basta far vedere che

$$\mathfrak{a} \subsetneqq \mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{a} \subsetneqq A\,. \tag{3}$$

Infatti in tal caso $\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{a} \in \mathbf{F}$ e contiene propriamente $\mathfrak{a}$. Segue allora dalla (2) che $\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{a}$ è prodotto di elementi di $\mathbf{M}$; ma allora anche $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}(\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{a})$ è prodotto di elementi di $\mathbf{M}$, e ciò contraddice la (1).

Poichè $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ si ha:

$$\mathfrak{a}^{-1} = A : \mathfrak{a} \supset A : \mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{-1},$$

e quindi $\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{a} = A$. D'altra parte per la (1) $\mathfrak{p}$ è diverso da $\mathfrak{a}$; ne segue allora: $\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{a} \subsetneqq A$.

Per completare la dimostrazione della (3) osserviamo che si ha $\mathfrak{p}\mathfrak{a} \neq \mathfrak{a}$. Infatti da $\mathfrak{p}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ segue $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} = A$, mentre $\mathfrak{p}$ è un ideale proprio. Allora $\mathfrak{p}\mathfrak{a} \subsetneqq \mathfrak{a}$, da cui $\mathfrak{a} \subsetneqq \mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-1}$. Ciò dimostra la (3) e quindi la tesi del teorema è vera.

COROLLARIO 2.2: *Sia A un anello verificante la condizione (m). Allora* $\mathbf{M}$ *è un sistema di generatori del gruppo $\mathfrak{I}(A)$ degli ideali frazionari invertibili di A.*

PROVA: Per ogni $\mathfrak{a} \in \mathfrak{I}(A)$ si ha $\mathfrak{a} = (d)^{-1}\mathfrak{b}$ dove $d \in A$ non è divisore dello zero, e $\mathfrak{b}$ è un ideale intero invertibile di A. La tesi è allora una conseguenza immediata del teorema precedente.

COROLLARIO 2.3: *Sia A un anello verificante la condizione (m). Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

i) $\mathfrak{C}(A) = 0$.

ii) *Ogni ideale invertibile proprio di A è contenuto in un ideale principale diverso da A.*

Inoltre se A è integro le condizioni precedenti sono equivalenti a:

iii) $\mathbf{P}(A) = 0$.

iv) *Ogni ideale proiettivo di A è libero.*

Prova: È ovvio che *i*) $\Rightarrow$ *ii*). Viceversa se vale la *ii*), $\mathbf{M}$ è costituito da ideali liberi, e quindi *ii*) $\Rightarrow$ *i*) (cor. 2.2). Infine se A è integro si ha $\mathbf{P}(A) = \mathfrak{C}(A)$ (prop. 1.5), e quindi *i*) $\Leftrightarrow$ *iii*); inoltre ogni ideale proiettivo non nullo di A è non degenere, ossia invertibile (teor. 1.1). Allora *i*) $\Leftrightarrow$ *iv*), e la prova è completa.

Proposizione 2.4: *Sia A un anello noetheriano. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti*:

i) $\mathbf{P}(A) = 0$.

ii) *Ogni ideale proprio invertibile di A è contenuto in un ideale proprio principale.*

Se inoltre spec (A) *è connesso le condizioni precedenti sono equivalenti a*:

iii) *Ogni ideale proiettivo di A è libero.*

Prova: Poichè A è notheriano la condizione (m) è banalmente verificata, ed inoltre $\mathbf{P}(A) = \mathfrak{C}(A)$ (prop. 1.5). Quindi *i*) $\Leftrightarrow$ *ii*) per il corollario precedente; se poi spec (A) è connesso si ha *i*) $\Leftrightarrow$ *iii*) per la proposizione 1.7, e la prova è completa.

Dalla proposizione precedente si può dedurre il seguente risultato noto sugli anelli fattoriali (cfr. [6], cap. VI, §6, lemma 10):

Corollario 2.5: *Sia A un anello noetheriano e fattoriale. Si ha allora* $\mathbf{P}(A) = 0$.

Prova: Poichè A è noetheriano e fattoriale, ogni ideale primo di altezza 1 di A è libero (cfr. [6], cap. III, § 4, teor. 6). Ma per la proposizione 1.2 ogni ideale proprio invertibile di A è contenuto in un ideale primo di altezza 1; la tesi discende quindi dalla proposizione precedente.

3. In questo numero viene dato un teorema (teor. 3.3) contenente alcune condizioni equivalenti che caratterizzano gli anelli noetheriani integri localmente fattoriali; nella dimostrazione faremo ricorso al teorema 2.1, ma risulterà chiaro che alcune delle suddette equivalenze seguono subito dai risultati del n. 1 e dai fatti noti sugli anelli fattoriali. Seguono poi alcune proprietà degli ideali invertibili in detti anelli, ed una caratterizzazione degli anelli localmente fattoriali non fattoriali. Tutti i risultati di questo numero estendono proprietà note dei domini di Dedekind.

Nel corso di questo numero tutti gli anelli sono supposti noetheriani.

Ricordiamo che un anello A si dice *localmente fattoriale* se per ogni ideale massimale $\mathfrak{m}$ di A l'anello $A_{\mathfrak{m}}$ è fattoriale. In particolare quindi un anello localmente fattoriale è localmente integro; vale allora la seguente proposizione, che segue subito da [4], lemma 2.9 e proposizione 2.10:

PROPOSIZIONE 3.1: *Un anello è localmente fattoriale se e solo se è somma diretta di anelli integri localmente fattoriali.*

Lo studio degli anelli localmente fattoriali si può ricondurre quindi allo studio degli anelli integri localmente fattoriali; il teorema 3.3 darà appunto qualche caratterizzazione di questi ultimi anelli. Prima di enunciare tale teorema conviene richiamare alcune proprietà note degli anelli fattoriali:

TEOREMA 3.2: *Sia A un anello integro. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

i) *A è fattoriale.*
ii) *Ogni ideale primo di altezza* 1 *in A è principale.*
iii) *L'intersezione di ogni coppia di ideali principali di A è un ideale principale.*
iv) *Ogni elemento irriducibile di A genera un ideale primo.*

PROVA: Vedi [6], cap. I, § 2, e cap. III, teor. 6.

TEOREMA 3.3: *Sia A un anello integro. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

i) *A è localmente fattoriale.*
ii) *Ogni ideale primo di altezza* 1 *di A è invertibile.*
iii) *Ogni ideale proprio invertibile è prodotto di ideali primi.*

iv) *Ogni ideale proprio principale è prodotto di ideali primi.*

v) *L'intersezione di ogni coppia di ideali invertibili è un ideale invertibile.*

vi) *L'intersezione di ogni coppia di ideali principali non nulli è un ideale invertibile.*

Prova: Dimostreremo il teorema seguendo questo diagramma di implicazioni:

$$\begin{tikzcd}
vi) \arrow[r, Rightarrow] & i) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dl, Rightarrow] & ii) \arrow[d, Rightarrow] \\
v) \arrow[u, Rightarrow] & iv) \arrow[u, Rightarrow] & iii) \arrow[l, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

Le implicazioni *iii)* $\Rightarrow$ *iv)* e *v)* $\Rightarrow$ *vi)* sono immediate, e quindi passiamo a dimostrare le altre.

i) $\Rightarrow$ *ii)*. Sia $\mathfrak{p}$ un ideale primo di altezza 1 di A. Allora per ogni ideale massimale $\mathfrak{m}$ contenente $\mathfrak{p}$, l'ideale $\mathfrak{p}A_\mathfrak{m}$ è primo di altezza 1. Ma $A_\mathfrak{m}$ è fattoriale per ipotesi e quindi $\mathfrak{p}A_\mathfrak{m}$ è principale per il teor. 3.2; allora $\mathfrak{p}$ è invertibile per il teorema 1.1.

ii) $\Rightarrow$ *iii)*. Ogni ideale proprio invertibile è contenuto in un ideale primo di altezza 1 (prop. 1.2), che per ipotesi risulta invertibile. La tesi segue allora dal teorema 2.1.

iv) $\Rightarrow$ *i)*. Sia $\mathfrak{m}$ un ideale massimale di A e mostriamo che $A_\mathfrak{m}$ è fattoriale. Per far ciò basta far vedere che ogni elemento irriducibile non nullo x/s di $A_\mathfrak{m}$ genera un ideale primo (teor. 3.2). Per ipotesi si ha: $(x) = \mathfrak{p}_1. \dots . \mathfrak{p}_n$ dove $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ sono ideali primi. Poiché $x \neq 0$, l'ideale (x) è invertibile, e quindi anche $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ sono invertibili. Riordinando opportunamente gli indici si può supporre che esista j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ tale che: $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_j \subset \mathfrak{m}$ e $\mathfrak{p}_{j+1}, \dots, \mathfrak{p}_n \not\subset \mathfrak{m}$. Si ha allora: $(x/s)A_\mathfrak{m} = (x)A_\mathfrak{m} = (\mathfrak{p}_1 A_\mathfrak{m}) \dots (\mathfrak{p}_j A_\mathfrak{m})$. Ma $\mathfrak{p}_i A_\mathfrak{m}$ è principale perchè $\mathfrak{p}_i A_\mathfrak{m}$ è invertibile ($i = 1, \dots, n$; cfr. teor. 1.1); inoltre x/s è irriducibile in $A_\mathfrak{m}$ e quindi deve essere $j = 1$. Dunque $(x/s)A_\mathfrak{m}$ è uguale a $\mathfrak{p}_1 A_\mathfrak{m}$ che è primo, come volevasi.

i) $\Rightarrow$ *v)*. Siano $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ due ideali invertibili di A e sia $\mathfrak{m}$ un ideale massimale contenente $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. Si ha: $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})A_\mathfrak{m} = \mathfrak{a}A_\mathfrak{m} \cap \mathfrak{b}A_\mathfrak{m}$; ma $\mathfrak{a}A_\mathfrak{m}$ e $\mathfrak{b}A_\mathfrak{m}$ sono principali (teor. 1.1), equindi anche la loro intersezione è un ideale principale (teor. 3.2). Il teorema 1.1 mostra allora che $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ è invertibile.

iv) $\Rightarrow$ *i*). Siano $(a)A_{\mathfrak{m}}$ e $(b)A_{\mathfrak{m}}$ due ideali principali non nulli di $A_{\mathfrak{m}}$, dove $\mathfrak{m}$ è un ideale massimale di A. Allora $(a)A_{\mathfrak{m}} \cap \cap (b)A_{\mathfrak{m}} = ((a) \cap (b))A_{\mathfrak{m}}$ è principale perchè $(a) \cap (b)$ è invertibile per ipotesi (teor. 1.1); allora $A_{\mathfrak{m}}$ è fattoriale (teor. 3.2,) e quindi A è localmente fattoriale.

Termina così la dimostrazione del teorema 3.3.

Diamo ora alcune conseguenze del teorema 3.3 riguardanti gli ideali invertibili di un anello integro localmente fattoriale. Premettiamo il seguente

LEMMA 3.4: *Siano A un anello, $\mathfrak{p}$ un ideale primo invertibile di A, e $\mathfrak{q}$ un primario associato a $\mathfrak{p}$. Allora $\mathfrak{q}$ è invertibile.*

PROVA: Si verifica facilmente che $\mathfrak{q}$ è non degenere. Inoltre per ogni ideale massimale $\mathfrak{m}$ contenente $\mathfrak{q}$ si ha $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$. Ma $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{m}}$ è principale (teor. 1.1), e quindi è principale anche $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{m}}$ che è un primario di $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{m}}$. Ne segue che $\mathfrak{q}$ è invertibile (teor. 1.1).

PROPOSIZIONE 3.5: *Siano A un anello integro localmente fattoriale, ed $\mathfrak{a}$ un ideale proprio non nullo di A. Allora $\mathfrak{a}$ è invertibile se e solo se è puro di altezza* 1.

PROVA: Supponiamo che $\mathfrak{a}$ sia invertibile; allora $\mathfrak{a}$ è puro di altezza 1 perchè $A_{\mathfrak{m}}$ è fattoriale (e quindi integralmente chiuso), per ogni ideale massimale $\mathfrak{m}$ (prop. 1.2).

Viceversa supponiamo che $\mathfrak{a}$ sia puro di altezza 1, e sia $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_n$ la sua rappresentazione primaria. Allora $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_n$ sono primari appartenenti a primi di altezza 1, i quali sono invertibili perchè A è localmente fattoriale (teor. 3.3). Per il lemma 3.4 anche $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_n$ sono invertibili, e quindi la condizione *v*) del teorema 3.3 mostra che $\mathfrak{a}$ è invertibile, come volevasi.

TEOREMA 3.6: *Sia A un anello integro localmente fattoriale. Allora ogni ideale puro di altezza* 1 *di A si può esprimere in modo essenzialmente unico nella forma $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_k^{n_k}$ dove $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_k$ sono gli ideali primi associati ad $\mathfrak{a}$, ed $n_1, \dots, n_k$ sono interi positivi. In particolare ogni ideale primario è potenza di un ideale primo.*

PROVA: Poichè $\mathfrak{a}$ è invertibile (prop. 3.5) si ha $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_k^{n_k}$ dove $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_k$ sono ideali primi distinti (teor. 3.3, condizione *iii*)), e $n_1, \dots, n_k$ sono interi positivi. Si verifica facilmente che $\mathfrak{p}_1$,

..., $\mathfrak{p}_k$ sono tutti e soli i primi associati ad $\mathfrak{a}$; e si vede inoltre che la decomposizione di $\mathfrak{a}$ in prodotto di ideali primi è unica (cfr. [7], vol. I, cap. V, § 6, lemma 5). Ciò prova la tesi.

COROLLARIO 3.7: *Sia A un anello integro localmente fattoriale. Allora un ideale proprio A è invertibile se e solo se tutti i primari della sua decomposizione sono invertibili.*

La prossima proposizione dà una condizione necessaria e sufficiente affinchè un anello localmente fattoriale sia fattoriale.

PROPOSIZIONE 3.8: *Sia A un anello localmente fattoriale. Allora A è fattoriale se e solo se* spec (A) *è connesso e* $\mathbf{P}(A) = 0$.

PROVA: Se A è fattoriale spec (A) è connesso perchè A è integro (cfr. [1], cap. II, § 4, n. 4, cor. 2 del lemma 2), e $\mathbf{P}(A) = 0$ per il corollario 2.5.

Viceversa se spec (A) è connesso A è integro perchè è localmente integro (cfr. [4], prop. 2.6). Inoltre ogni ideale primo di altezza 1 di A è invertibile (teor. 3.3, condizione *ii*)), e quindi principale se $\mathbf{P}(A) = 0$ (prop. 1.7); il teorema 8.2 mostra allora che A è fattoriale.

La prossima proposizione 3.11 mostra che un anello integro localmente fattoriale ma non fattoriale contiene infiniti ideali primi di altezza 1 non liberi (cfr. teor. 3.2). Tale proposizione generalizza un risultato dato da L. Claborn in [2] (cor. 1.6) per i domini di Dedekind, e discende dal teorema di Nagata e da un corollario del seguente

LEMMA 3.9: *Sia A un anello contenente solo un numero finito di ideali primi di altezza* 1. *Allora A è semilocale.*

PROVA: Siano $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_j$ gli ideali primi di altezza 1 di A, e $\mathfrak{p}_{j+1}, \ldots, \mathfrak{p}_n$ i primi associati all'ideale nullo di A. Proveremo che A ha al più n ideali massimali.

Per ogni $i = 1, \ldots, n$ sia $\mathfrak{m}_i$ un ideale massimale di A contenente $\mathfrak{p}_i$ e supponiamo, per assurdo, che esista un ideale massimale $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Allora $\mathfrak{m} \not\subset \bigcup_1^n{}_i\, \mathfrak{m}_i$ (cfr. [7], vol. I, cap. IV, § 6, remark dopo il corollario 3 del teor. 11). Sia allora $a \in \mathfrak{m}$, $a \notin \bigcup_1^n{}_i\, \mathfrak{m}_i$; a non è divisore dello zero perchè $a \notin \bigcup_{j+1}^n{}_i\, \mathfrak{p}_i$ (cfr. [7], vol. I, cap. IV, § 6, cor. 3 del teor. 11), e quindi esiste un ideale primo $\mathfrak{p}$ di altezza 1 contenente a (hauptidealzatz). Ma ciò è assurdo perchè ovviamente $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_i$ $(i = 1, ..., j)$. Quindi $\mathfrak{m}_1, ..., \mathfrak{m}_n$ sono gli unici ideali massimali di A, e ciò prova che A è semilocale.

COROLLARIO 3.10: *Sia A un anello integro localmente fattoriale con solo un numero finito di ideali primi di altezza* 1. *Allora A è fattoriale.*

PROVA: Per il lemma precedente A è semilocale e quindi $\mathbf{P}(A) = 0$ (cfr. [1], cap. II, § 5, n. 4, prop. 5). La tesi segue allora dalla proposizione 3.8.

PROPOSIZIONE 3.11: *Sia A un anello integro localmente fattoriale ma non fattoriale. Allora A contiene infiniti ideali primi di altezza* 1 *non principali.*

PROVA: Supponiamo che A contenga solo un numero finito di ideali primi di altezza 1 non principali, e siano essi $\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_n$. Sia poi S l'insieme moltiplicativo generato da tutti gli elementi primi di A. Allora A_S contiene solo un numero finito di ideali primi di altezza 1, i quali sono esattamente $\mathfrak{p}_1 A_S, ..., \mathfrak{p}_n A_S$. Si verifica facilmente che A_S è localmente fattoriale, e quindi il corollario 3.10 mostra che A_S è fattoriale. Ma S è generato da elementi primi, e quindi A è fattoriale per un teorema di Nagata (cfr. [6], cap. III, teor. 5). Ciò contraddice l'ipotesi, e quindi la dimostrazione è completa.

4. In questo numero si dimostra che il gruppo $\mathbf{P}(A)$ di un anello noethiano localmente fattoriale A si annulla se e solo se A è somma diretta di anelli fattoriali (teor. 4.2). Per giungere a tale enunciato conviene premettere alcune considerazioni che permettono di calcolare il gruppo $\mathbf{P}(A)$, quando A è la somma diretta di un numero finito di anelli (prop. 4.1).

Ricordiamo che se B è un anello ed $X = \text{spec}\,(B)$ è lo spettro primo di B, è definito su X, in maniera naturale, un fascio di anelli $\mathcal{O}_X$ detto *fascio strutturale* di X (cfr. [5], cap. I, 3.1).

Per ogni aperto U di X sia $\mathcal{O}_X^*(U)$ il gruppo abeliano costituito dagli elementi invertibili dell'anello $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ delle sezioni di $\mathcal{O}_X$ definite su U. Allora $\mathcal{O}_X^*$ è un fascio di gruppi abeliani su X, detto *fascio delle unità* di $\mathcal{O}_X$. Si dimostra che esiste un isomorfismo canonico tra il gruppo $\mathbf{P}(B)$ delle classi di B-moduli proiettivi di rango 1, ed il gruppo di coomologia $H^1(X, \mathcal{O}^*_X)$ (cfr. [1], cap. II, n. 4, remarque, o, per maggiori dettagli, [5], cap. 0, 5.4.7 e cap. I, 1.4).

Supponiamo ora che $A = A_1 \oplus A_2$ sia un anello somma diretta degli anelli A_1 e A_2. Indichiamo con $\mathcal{O}$ il fascio strutturale di $X = \operatorname{spec}(A)$, e con $\mathcal{O}_i$ il fascio strutturale di $X_i = \operatorname{spec}(A_i)$ $(i = 1, 2)$. Si verifica facilmente che X è unione disgiunta di due sottospazi canonicamente omeomorfi a X_1 e X_2 rispettivamente; si può pertanto supporre che sia $X = X_1 \cup X_2$ con $X_1 \cap X_2 = \varnothing$. Si vede inoltre che $\mathcal{O}_i = \mathcal{O}_{|X_i}$, e quindi si ha $\mathcal{O}^*_i = \mathcal{O}^*_{|X_i}$ $(i = 1, 2)$. Ne segue

$$H^1(X, \mathcal{O}^*) = H^1(X_1, \mathcal{O}^*_{|X_1}) \oplus H^1(X_2, \mathcal{O}^*_{|X_2}) = $$
$$= H^1(X_1, \mathcal{O}^*_1) \oplus H^1(X_2, \mathcal{O}^*_2).$$

Ciò prova che $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1) \oplus \mathbf{P}(A_2)$, e quindi con una semplice induzione si trova:

PROPOSIZIONE 4.1: *Sia A un anello e supponiamo che A sia la somma diretta degli anelli $A_1, \ldots, A_n$. Allora si ha:* $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1) \oplus \ldots \oplus \mathbf{P}(A_n)$.

TEOREMA 4.2: *Sia A un anello noetheriano localmente fattoriale. Allora $\mathbf{P}(A) = 0$ se e solo se A somma diretta di anelli fattoriali.*

PROVA: Per la proposizione 3.1 si ha $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ dove $A_1, \ldots, A_n$ sono integri e localmente fattoriali. Se $\mathbf{P}(A) = 0$ si ha $\mathbf{P}(A_i) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ per la proposizione 4.1; quindi $A_1, \ldots, A_n$ sono fattoriali per la proposizione 3.8.

Viceversa se A è somma diretta di anelli fattoriali si ha $\mathbf{P}(A) = 0$ (cor. 2.5 e prop. 4.1).

Dal teorema precedente e dalla proposizione 3.11 si ottiene subito

COROLLARIO 4.3: *Sia A un anello noetheriano localmente fattoriale tale che $\mathbf{P}(A) \neq 0$. Allora A contiene infiniti ideali primi di altezza 1 non principali.*

5. In questo numero si dimostra che in un anello noetheriano di dimensioni 1 ogni ideale invertibile è prodotto di ideali primari.

Si perviene a questo risultato dal seguente teorema 5.1, relativo alle decomposizioni primarie degli ideali invertibili.

In questo numero e nel successivo tutti gli anelli sono supposti noetheriani.

TEOREMA 5.1: *Siano A un anello di dimensioni* 1, $\mathfrak{a}$ *un ideale proprio invertibile di A, ed $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n$ la decomposizione primaria di $\mathfrak{a}$. Allora $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n$ sono invertibili.*

PROVA: Sia i un indice fissato ($1 \leqslant i \leqslant n$). Poichè $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{q}_i$, ed $\mathfrak{a}$ è non degenere, anche $\mathfrak{q}_i$ è non degenere. Inoltre $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$ è l'unico ideale massimale contenente $\mathfrak{q}_i$, come si verifica facilmente. Basta allora provare che $\mathfrak{q}_i A_{\mathfrak{p}_i}$ è principale (teor. 1.1). Ma $\mathfrak{q}_i$ è l'unico ideale della decomposizione di $\mathfrak{a}$ che sia contenuto in $\mathfrak{p}_i$; ne segue che $\mathfrak{a} A_{\mathfrak{p}_i} = \mathfrak{q}_i A_{\mathfrak{p}_i}$ (cfr. [7], vol. I, cap. IV, § 10, teor. 17), e quindi $\mathfrak{q}_i A_{\mathfrak{p}_i}$ è principale perchè $\mathfrak{a}$ è invertibile (teor. 1.1). Quindi $\mathfrak{q}_i$ è invertibile, come volevasi.

OSSERVAZIONE 5.2: Il teorema 5.1 è falso, in generale, se A ha dimensione maggiore di 1. Sia infatti $A = K[X, Y, Z]/(XY)$, dove K è un corpo e X, Y, Z sono indeterminate su K. Siano x, y, z le immagini canoniche di X, Y, Z in A. Allora z non è divisore dello zero e quindi l'ideale (z) è libero (in particolare invertibile). D'altra parte gli ideali primi associati a (z) sono (x, z) e (y, z), e si ha inoltre $(z) = (x, z) \cap (y, z)$. Si verifica facilmente (per esempio usando la proposizione 1.4) che (x, z) e (y, z) non sono invertibili. Ciò prova che per l'anello A il teorema 5.1 è falso.

OSSERVAZIONE 5.3: Il viceversa del teorema 5.1 è falso, come mostra l'esempio seguente: sia $A = K[X, Y]/(X^2 - Y^2)$, dove K è un corpo e X, Y sono indeterminate su K. Indicate con x, y le immagini di X e Y in A, si vede che gli ideali (x) e (y) sono liberi (e quindi invertibili), e primari. Ma l'ideale $\mathfrak{a} = (x) \cap (y)$ non è invertibile. Infatti si ha $\mathfrak{a} = (xy, y^2) = (y)(x, y)$, e quindi se $\mathfrak{a}$ fosse invertibile, anche (x, y) sarebbe invertibile; ma ciò è assurdo, come si verifica facilmente.

OSSERVAZIONE 5.4: Se l'anello A è localmente fattoriale e integro, il teorema 5.1 è valido, senza ipotesi sulla dimensione di A, assieme al suo inverso (cfr. cor. 3.7).

TEOREMA 5.5: *Sia A un anello di dimensione* 1. *Allora ogni ideale proprio invertibile di A è prodotto di ideali primari.*

PROVA: Per il teorema 5.1 ogni ideale proprio invertibile di A è contenuto in un ideale primario invertibile. La tesi discende allora dal teorema 2.1.

COROLLARIO 5.6: *Sia A un anello di dimensione* 1. *Allora* $\mathbf{P}(A) = 0$ *se e solo se ogni ideale primario invertibile di A è libero.*

PROVA: La tesi segue subito dal teorema 3.5 e dalla proposizione 1.7.

6. In questo numero ci proponiamo di dimostrare che se A è un anello $\mathfrak{m}$-completo e $\dim A/\mathfrak{m} = 1$, ogni ideale invertibile di $A/\mathfrak{m}$ è immagine di un ideale invertibile di A (teor. 6.3). Si giunge a questo risultato usando il teorema 5.5 e un lemma (lemma 6.2), il quale permette di « rimontare » in A gli ideali primari invertibili di $A/\mathfrak{m}$. Dal suddetto teorema 6.3 discende un criterio di non fattorialità per certi completamenti $\mathfrak{m}$-adici (cor. 6.5), criterio che viene successivamente illustrato con qualche esempio.

LEMMA 6.1: *Sia A un anello* (*anche non noetheriano*) *separato e completo per la topologia $\mathfrak{m}$-adica, dove $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$ è un ideale finitamente generato. Siano poi $e, f, g, h, \in A$ tali che*:

$$ef + gh = \sum_1^n{}_i\, d_i x_i, \qquad d_1, \dots, d_n \in A, \tag{1}$$

$$(e, f, g) = A. \tag{2}$$

Allora esistono $a_1, a_2, a_3 \in \mathfrak{m}$ tali che:

$$(e + a_1)(f + a_2) + g(h + a_3) = 0. \tag{3}$$

PROVA: Determiniamo a_1, a_2, a_3 come serie del tipo

$$a_i = \sum_1^\infty{}_k\, \omega_{ik}, \tag{4}$$

dove gli ω_{ik} sono polinomi omogenei di grado k nelle $x_1, \dots, x_n$:

$$\omega_{ik} = \sum_{1 \leqslant j_1 \leqslant \dots \leqslant j_k \leqslant n} a^i_{j_1, \dots, j_k} x_{j_1} \cdot \ldots \cdot x_{j_k},$$

($i = 1, 2, 3$; $k = 1, 2, \ldots$). Sostituendo formalmente le (4) nella (3), il primo membro della (3) diventa una serie nelle $x_1, \ldots, x_n$, che, per la (1), è priva di termine costante. Uguagliando a zero i coefficienti dei termini di primo grado di tale serie si trova:

$$fa^1_{j_1} + ea^2_{j_1} + ga^3_{j_1} = - d_{j_1}. \tag{5}$$

Esistono quindi, per la (2), degli elementi $a^i_{j_1}$ verificanti la (5) ($i = 1, 2, 3$; $1 \leqslant j_1 \leqslant n$). Uguagliando successivamente a zero i coefficienti dei termini di secondo grado si trova

$$fa_{j_1j_2} + ea_{j_1j_2} + ga_{j_1j_2} = p_{j_1j_2}, \tag{6}$$

dove $p_{j_1j_2}$ è un polinomio nelle a_{j_1} precedenti. Per la (2) esistono allora degli elementi $a_{j_1j_2}$ verificanti la (6) ($i = 1, 2, 3$; $1 \leqslant \leqslant j_1 \leqslant j_2 \leqslant n$). Iterando il procedimento si possono determinare, per induzione su k, i polinomi ω_{ik}, e quindi le serie (3). Un semplice calcolo mostra infine che tali serie convergono e che le loro somme verificano la tesi.

Lemma 6.2: *Siano A un anello (noetheriano) ed $\mathfrak{m}$ un ideale di A tali che: (a) A è separato e completo per la topologia $\mathfrak{m}$-adica;* (b) $\dim A/\mathfrak{m} = 1$; (c) *Ogni $x \in A$ tale che $\mathfrak{m} : (x) = \mathfrak{m}$ non è divisore dello zero. Siano poi $\varphi : A \to A/\mathfrak{m}$ l'omomorfismo canonico, e $\overline{\mathfrak{q}}$ un ideale primario invertibile di $A/\mathfrak{m}$. Allora esiste un ideale invertibile $\mathfrak{a}$ di A tale che $\varphi(\mathfrak{a}) = \overline{\mathfrak{q}}$.*

Prova: Poniamo $\overline{x} = \varphi(x)$ per ogni $x \in A$. Per (b) esistono $f, g \in A$ tali che $\overline{q} = (\overline{f}, \overline{g})$ (cfr. [3], osservazione dopo il teorema 1). Sia $\overline{\mathfrak{n}}$ l'unico ideale massimale di $A/\mathfrak{m}$ contenente $\overline{\mathfrak{q}}$, e sia $\mathfrak{n} = \varphi^{-1}(\overline{\mathfrak{n}})$. Per la proposizione 1.4 si può supporre valida una relazione del tipo: $ef + gh \in \mathfrak{m}$, con $e \notin \mathfrak{n}$. Ne segue $(e, f, g) = A$, e quindi, per il lemma 6.1, esistono $a, b, c \in \mathfrak{m}$ tali che:

$$(e + a)(f + b) + g(h + c) = 0. \tag{7}$$

Poniamo $\mathfrak{a} = (f + b, g)$; allora $\varphi(\mathfrak{a}) = \overline{\mathfrak{q}}$, e proviamo che $\mathfrak{a}$ è invertibile. Poichè $\overline{\mathfrak{q}}$ è non degenere, anche $\mathfrak{a}$ è tale per la (c). D'altra parte $\mathfrak{n}$ è l'unico ideale massimale contenente $\mathfrak{a}$, come segue da un semplice calcolo. Inoltre $e + a \notin \mathfrak{n}$, e quindi la tesi segue dalla (7) e dalla proposizione 1.4.

Dal lemma precedente e dal teorema 5.5 si ha subito:

TEOREMA 6.3: *Siano A ed $\mathfrak{m}$ verificanti le ipotesi del lemma* 6.2. *Allora ogni ideale invertibile di $A/\mathfrak{m}$ è immagine di un ideale invertibile di A.*

COROLLARIO 6.4: *Siano A un anello, $\mathfrak{m}$ un ideale di A, $\hat{A}$ il completato separato di A per la topologia $\mathfrak{m}$-adica. Se $\mathfrak{m}$ è generato da una A-successione $x_1, \ldots, x_n$,* [1]) *e* $\dim A/\mathfrak{m} = 1$, *ogni ideale invertibile di $A/\mathfrak{m}$ è immagine di un ideale invertibile di $\hat{A}$.*

PROVA: Poichè si ha $A/\mathfrak{m} = \hat{A}/\mathfrak{m}\hat{A}$, basta dimostrare che $\hat{A}$ ed $\mathfrak{m}\hat{A}$ verificano l'ipotesi (c) del lemma 6.2; la tesi discenderà allora dal teorema 6.3. Siano $x'_1, \ldots, x'_n$ le immagini di $x_1, \ldots, x_n$ in $\hat{A}$. Allora $x'_1, \ldots, x'_n$ formano una $\hat{A}$-successione (cfr. [1], cap. III, § 3, n. 4, cor. 1 del teor. 3), e generano $\mathfrak{m}\hat{A}$. Se $x \in \hat{A}$ è tale che $\mathfrak{m}\hat{A} : (x) = \mathfrak{m}\hat{A}$, $x'_1, \ldots, x'_n, x$ formano una $\hat{A}$-successione, e quindi x non è divisore dello zero, come mostra un semplice calcolo.

COROLLARIO 6.5: *Siano A un anello regolare, $\mathfrak{m}$ un ideale di A tale che $\dim A/\mathfrak{m} = 1$, $\hat{A}$ il completato separato di A per la topologia $\mathfrak{m}$-adica. Allora $\hat{A}$ è fattoriale se e solo se* spec $(A/\mathfrak{m})$ *è connesso e* $\mathbf{P}(A/\mathfrak{m}) = 0$.

PROVA: Se $\hat{A}$ è fattoriale si ha $P(\hat{A}) = 0$ (cor. 2.5), e quindi $P(A/\mathfrak{m}) = 0$ (teor. 6.3 e prop. 1.7). Inoltre $\hat{A}$ è integro e quindi spec $(A/\mathfrak{m})$ è connesso (cfr. [4], cor. 3.3). Il viceversa è già stato dimostrato in [4] (teor. 4.3), senza ipotesi sulla dimensione di $A/\mathfrak{m}$.

ESEMPIO 6.6: Ogni ideale proiettivo dell'anello $A = K[X, Y]/(XY)$ (dove K è un corpo e X, Y sono indeterminate) è libero. Infatti il completato separato di $K[X, Y]$ per la topologia (XY)-adica è isomorfo all'anello di serie formali ristrette $(K[X], (X))\{Y\}$, il quale è fattoriale (cfr. [4], teor. 4.5). Ne segue $\mathbf{P}(A) = 0$ (teor. 6.3); ma spec (A) è connesso e quindi ogni ideale proiettivo di A è libero (prop. 1.7).

---

[1]) Si dice che $x_1, \ldots, x_n \in A$ formano una A-successione se per ogni $i = 1, \ldots, n$ si ha: $(x_1, \ldots, x_{i-1}) : (x_i) = (x_1, \ldots, x_{i-1})$.

ESEMPIO 6.7: Il completato separato di $K[X, Y]$ per la topologia $(X^2 - Y^3)$-adica non è fattoriale.

PROVA: Per il corollario 6.5 basta provare che $\mathbf{P}(K[X, Y]/(X^2 - Y^3)) \neq 0$. Sia allora $\mathfrak{p} = (x - a, y - b)$ l'ideale di un punto semplice (a, b) della curva di equazione $X^2 - Y^3 = 0$; dal teorema 1.1 segue facilmente che $\mathfrak{p}$ è invertibile. Inoltre $\mathfrak{p}$ non è libero. Infatti in caso contrario si avrebbe, in $K[X, Y]$, una relazione del tipo

$$(X - a, Y - b) = (X^2 - Y^3, f(Y) + Xg(Y)), \tag{8}$$

con $f(Y) + Xg(Y)$ primo, ed f, g non nulli. Applicando alla (8) l'omomorfismo $h : K[X, Y] \to K[Y]_g$ definito da $h(Y) = Y$, $h(X) = -f/g$ si trova in $K[Y]_g$:

$$Y - b = \left[\left(\frac{f(Y)}{g(Y)}\right)^2 - Y^3\right] G\left(\frac{f(Y)}{g(Y)}, Y\right), \tag{9}$$

dove G è un opportuno polinomio in due variabili. Eliminando i denominatori nella (9), si giunge ad una relazione in $K[Y]$, che risulta assurda. Quindi $\mathfrak{p}$ è invertibile non libero, e la tesi è provata.

BIBLIOGRAFIA

[1] BOURBAKI N.: *Algèbre Commutative*. Cap. I, II, III. Herman, 1961.

[2] CLABORN L.: *Dedekind domains and ring of quotients*. Pacific Math. Journal, 1965, 15, 58-64.

[3] FORSTER O.: *Uber die Anzahl der Erzeugenden eines Ideals in einem Noetherschen Ring*. Math. Zeitschr, 1964, 84, 80-87.

[4] GRECO S.: *Sull'integrità e la fattorialità dei completamenti m-adici*. Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova, XXXVI, 1966.

[5] GROTHENDIECK A.: *Eléments de Géométrie Algébrique*. Vol. I, I.H.-E.S., 1960.

[6] SAMUEL P.: *Anneaux Factoriels*. Soc. Mat. de S. Paulo, 1963.

[7] ZARISKI O., SAMUEL P.: *Commutative Algebra*. Voll. I, II, Van Nostrand, 1958, 1960.

Manoscritto pervenuto in redazione il 12 ottobre 1965 e, in forma definitiva, il 30 aprile 1966.