

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

C. BAIOCCHI

Sul problema misto per l'equazione parabolica del tipo del calore

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 36, n° 1 (1966), p. 80-121

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1966__36_1_80_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1966__36_1_80_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SUL PROBLEMA MISTO
PER L'EQUAZIONE PARABOLICA
DEL TIPO DEL CALORE

di C. BAIocchi (*a Pavia*) *)

Introduzione.

In un recente lavoro [1] in corso di stampa sui Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova ho trattato la regolarità e l'unicità della soluzione di una equazione differenziale astratta.

In questo articolo mi propongo di dare una applicazione concreta dei risultati ottenuti in [1] al caso delle equazioni del tipo del calore ottenendo teoremi di unicità della soluzione del problema misto in classi nelle quali è nota l'esistenza della soluzione; ed ottenendo in alcuni casi teoremi « più forti » di quelli ottenuti in forma astratta.

Il risultato fondamentale è enunciato nel teorema 8.4; e dà una risposta (affermativa) sotto ipotesi molto generali ad una questione posta dal Prof. Lions al corso C.I.M.E. 1963 (cfr. [8]), questione che ha dato avvio a questa ricerca.

1. Posizione del problema.

1.1. - Sia Ω un aperto limitato dello spazio euclideo a n dimensioni $\mathcal{R}^n$ il cui punto generico sarà indicato con $x \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Avrò bisogno di una « sufficiente regolarità » su Ω ; per fis-

* Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la matematica del C.N.R.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Pavia.

sare le idee supporrò Ω di classe C^∞ ¹⁾, ipotesi largamente sufficiente a trattare tutti i problemi in esame ma che può essere caso per caso notevolmente attenuata. In sintesi le ipotesi su Ω sono:

(1.1) Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ di classe C^∞ .

Sia Γ la frontiera di Ω ; per la (1.1) Γ sarà una varietà ad $n - 1$ dimensioni indefinitamente differenziabile, ed Ω si troverà localmente da una sola parte di Γ . Indicherò con ν la normale a Ω orientata verso l'interno.

Sia $I =]T_0, T_1[$ ($-\infty \leq T_0 < T_1 \leq +\infty$) un intervallo aperto (o una semiretta, o l'intera retta) dello spazio euclideo a una dimensione $\mathbb{R}^1$, il cui punto generico sarà indicato con $t : I = \{t \in \mathbb{R}^1; T_0 < t < T_1\}$.

Indicando con $\bar{E}$ la chiusura di un sottoinsieme E di uno spazio euclideo porrò $Q = \Omega \times I$; $\bar{Q} = \bar{\Omega} \times \bar{I}$; indicherò poi con $\Sigma = \Gamma \times I$ il « mantello » del cilindro Q ; e con $\bar{\Sigma} = \Gamma \times \bar{I}$ il « mantello » del cilindro $\bar{Q}$.

1.2. - Sia $A = A(x, t)$ un operatore differenziale in x , lineare, del II ordine, che dipende da $\{x, t\} \in \bar{Q}$:

$$(1.2) \quad Au = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x, t) \cdot u$$

(qui e ovunque nel seguito le derivate, salvo esplicito avviso in contrario, sono intese nel senso delle distribuzioni; cfr. [18]). Sui « coefficienti » a_{ij} , b_i , c dell'operatore A avrò bisogno di una « sufficiente regolarità »; per fissare le idee supporrò che sia verificata la seguente ipotesi:

$$(1.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{ij}(x, t), \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}, \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}, b_i(x, t), \frac{\partial b_i}{\partial x_i}, c(x, t) \\ \text{sono continui in } \bar{Q} \end{array} \right. \quad (i, j=1, 2, \dots, n)$$

¹⁾ Nel senso che Ω è di classe C^k per ogni intero k . Per la definizione di aperto di classe C^k cfr. ad es. [13].

Faccio ora le seguenti posizioni:

$$a = \left(\sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} \cos(x_j, \nu) \right|^2 \right)^{1/2}; \quad b = \sum_{i=1}^n x_i (b_i(x, t) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j});$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu^*} = \frac{1}{a} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \cos(x_j, \nu) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Con tali notazioni porrò, per $f \in \mathfrak{D}(\bar{Q})$ (cioè continua con le sue derivate di ogni ordine ed a supporto compatto contenuto in $\bar{Q}$; notazioni di [18]) ²⁾:

$$(1.4) \quad S_2 f = f|_{\Sigma}; \quad S_1 f = \frac{\partial f}{\partial \nu^*}; \quad T_1 f = a \cdot f|_{\Sigma}; \quad T_2 f = a \frac{\partial f}{\partial \nu^*} - b f|_{\Sigma}$$

Pongo ancora $\Lambda = A + \frac{\partial}{\partial t}$; $\Lambda^* = A^* - \frac{\partial}{\partial t}$ dove con A^* indico l'operatore « aggiunto formale » di A e cioè (indicando con $\bar{\alpha}$ il complesso coniugato del numero complesso α):

$$A^* v = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 (\bar{a}_{ij} v)}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial (\bar{b}_i \cdot v)}{\partial x_i} + \bar{c} \cdot v$$

Con tali notazioni, grazie alle (1.1), (1.3) si ha (cfr. [13]):

$$(1.5) \quad \int_Q f \cdot \Lambda^* g dx dt - \int_Q \Lambda f \cdot \bar{g} dx dt = \int_{\Omega} f(x, T_0) \overline{g(x, T_0)} dx -$$

$$- \int_{\Omega} f(x, T_1) \overline{g(x, T_1)} dx + \int_{\Sigma} S_2 f \cdot \overline{T_2 g} d\sigma - \int_{\Sigma} S_1 f \cdot \overline{T_1 g} d\sigma$$

$$- \infty < T_0 < T_1 < +\infty$$

$$f, g \in \mathfrak{D}(\bar{Q})$$

$$(1.5') \quad \int_Q f \cdot \Lambda^* \bar{g} dx dt - \int_Q \Lambda f \bar{g} dx dt = \int_{\Omega} f(x, T_0) \overline{g(x, T_0)} dx +$$

$$+ \int_{\Sigma} S_2 f \cdot \overline{T_2 g} d\sigma - \int_{\Sigma} S_1 f \cdot \overline{T_1 g} d\sigma \quad - \infty < T_0 < T_1 = +\infty$$

$$f, g \in \mathfrak{D}(\bar{Q})$$

²⁾ Qui e dovunque nel seguito se f è una funzione definita in E ed E_1 è un sottoinsieme di E con $f|_{E_1}$ indico la restrizione di f ad E_1 .

$$(1.5'') \int_Q f \cdot \overline{\Lambda^* g} dx dt - \int_Q \Lambda f \cdot \overline{g} dx dt = - \int_{\Omega} f(x, T_1) \overline{g(x, T_1)} dx + \\ + \int_{\Sigma} S_2 f \cdot \overline{T_2 g} d\sigma - \int_{\Sigma} S_1 f \cdot \overline{T_1 g} d\sigma \quad \begin{matrix} f, g \in \mathcal{D}(\overline{Q}) \\ -\infty = T_0 < T_1 < +\infty \end{matrix}$$

$$(1.5''') \int f \cdot \overline{\Lambda^* g} dx dt - \int \Lambda f \cdot \overline{g} dx dt = \int S_2 f \cdot \overline{T_2 g} d\sigma - \int S_1 f \cdot \overline{T_1 g} d\sigma \\ f, g \in \mathcal{D}(\overline{Q}) - \infty = T_0; T_1 = +\infty$$

dove $dx = dx_1 \cdot dx_2 \dots dx_n$ indica l'elemento di « volume » su Q e $d\sigma$ indica l'elemento di « superficie » su Σ .

1.3. - Sia $a(t, u, v)$ la « forma sesquilineare associata » ad A , cioè:

$$(1.6) \quad a(t, u, v) = \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial (a_{ij} \bar{v})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \bar{v} + c \cdot u \cdot \bar{v} \right] dx.$$

Grazie alle (1.1), (1.3) vale la « mezza formula di Green » (cfr. [13]):

$$(1.7) \quad \int_{T_0}^{T_1} \left[a(t, f, g) - \int_{\Omega} f \cdot \frac{\partial \overline{g}}{\partial t} dx \right] dt = \int_Q \Lambda f \cdot \overline{g} dx dt + \\ + \int_{\Omega} f(x, T_0) \overline{g(x, T_0)} dx - \int_{\Omega} f(x, T_1) \overline{g(x, T_1)} dx - \int_{\Sigma} S_1 f \cdot \overline{T_1 g} d\sigma \\ - \infty < T_0 < T_1 < +\infty \quad f, g \in \mathcal{D}(\overline{Q})$$

e le analoghe per T_0, T_1 non entrambi finiti; in particolare:

$$(1.7') \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left[a(t, f, g) - \int_{\Omega} f \cdot \frac{\partial \overline{g}}{\partial t} dx \right] dt = \int_Q \Lambda f \cdot \overline{g} dx dt - \int_{\Sigma} S_1 f \cdot \overline{T_1 g} d\sigma \\ T_0 = -\infty, T_1 = +\infty \quad f, g \in \mathcal{D}(\overline{Q})$$

Sulle funzioni $a_{i,j}(x, t)$ farò la seguente ipotesi:

$$(1.8) \text{ Esiste un numero } \beta > 0 \text{ tale che per ogni } \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \text{ e per ogni } \{x, t\} \in \bar{Q} \text{ si ha } \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x, t) \xi_i \xi_j \leq \beta \cdot \sum_{i=1}^n \xi_i^2.$$

Come è noto le (1.3), (1.8) implicano:

$$(1.9) \text{ Esistono due numeri } \alpha \text{ e } \gamma \text{ con } \alpha > 0 \text{ tali che, per ogni } v \in H^1(\Omega) \text{ ed ogni } t \in \bar{I} \text{ si ha } \operatorname{Re} a(t, v, v) + \gamma \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \alpha \|v\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

1.4. - Sia Σ_1 un aperto di Σ e sia $\Sigma_2 = (\Sigma - \Sigma_1)^\circ$ (con $\bar{E}$ indico l'interno dell'insieme E). Studierò nei prossimi numeri problemi misti del seguente tipo: assegnati $f(x, t)$, $u_0(x)$ in spazi opportuni (se $T_0 = -\infty$ si deve prendere $u_0 = 0$) studiare esistenza e unicità di $u(x, t)$ tale che verifichi:

$$(1.10) \quad \begin{aligned} \Delta u &= f \quad \text{in } Q; \quad u(x, T_0) = u_0(x) \quad \text{in } \Omega; \\ S_1 u &= 0 \quad \text{in } \Sigma_2; \quad S_2 u = 0 \quad \text{in } \Sigma_1. \end{aligned}$$

In particolare se $\Sigma_1 = \Sigma$ (risp. se $\Sigma_1 = \emptyset$) si otterrà il problema misto del tipo Cauchy-Dirichlet (risp. Cauchy-Neumann).

Sugli insiemi Σ_1, Σ_2 avrò bisogno di una « sufficiente regolarità » (ad es. se $\Sigma - \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ non ha misura nulla non si potrà ovviamente avere unicità). Supporrò precisamente che la frontiera di Σ_1 su Σ abbia misura n dimensionale nulla, cioè che gli insiemi Σ_1, Σ_2 siano misurabili secondo Peano Jordan. In sintesi supporrò che:

$$(1.11) \quad \begin{aligned} \Sigma_1, \Sigma_2 \text{ sono aperti di } \Sigma; \quad \bar{\Sigma}_1 \cup \bar{\Sigma}_2 &= \Sigma; \\ \operatorname{mis}_n(\bar{\Sigma}_1 \cap \bar{\Sigma}_2) &= 0. \end{aligned}$$

Si osservi che, indicando con $\Gamma_i(\tau)$ l'intersezione tra Σ_i e l'iperpiano di equazione $t = \tau$, la (1.11) implica:

$$(1.12) \quad \begin{aligned} \Gamma_i(t) \text{ è aperto in } \Gamma; \text{ per quasi ogni } t \\ \operatorname{mis}_{n-1}(\Gamma - \Gamma_1(t) \cup \Gamma_2(t)) &= 0. \end{aligned}$$

2. Richiami su alcuni spazi funzionali.

2.1. - Richiamo brevemente alcune definizioni su spazi « dis-simetrici » rispetto al numero di derivate ed alcune loro proprietà.

Se $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ sono due spazi di Hilbert con $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2$ ed $\mathcal{H}_1$ denso in $\mathcal{H}_2$ con $[\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2]_{\vartheta}$ ($\vartheta \in]0, 1[$) indico lo spazio di interpolazione di indice ϑ tra $\mathcal{H}_1$ ed $\mathcal{H}_2$, ad es. secondo il metodo di [6].

Se $\mathcal{H}$ è uno spazio di Hilbert ed $I =]T_0, T_1[$ con $L^2(T_0, T_1; \mathcal{H})$ (ovvero con $H^0(T_0, T_1; \mathcal{H})$) si indica lo spazio delle funzioni definite in I , misurabili a valori in $\mathcal{H}$, la cui norma è in $L^2(I)$;

munito del prodotto scalare $(u, v)_{L^2(T_0, T_1; \mathcal{H})} = \int_{T_0}^{T_1} (u(t), v(t))_{\mathcal{H}} dt$,

$L^2(T_0, T_1; \mathcal{H})$ risulta uno spazio di Hilbert. Per k intero positivo

si pone poi $H^k(T_0, T_1; \mathcal{H}) = \{u \in L^2(T_0, T_1; \mathcal{H}); \frac{d^\alpha u}{dt^\alpha} \in L^2(T_0, T_1;$

$\mathcal{H}); \alpha = 1, 2, \dots, k\}$ munito del prodotto scalare $(u, v)_{H^k(T_0, T_1; \mathcal{H})} =$

$= \sum_{\alpha=0}^k \left(\frac{d^\alpha u}{dt^\alpha}, \frac{d^\alpha v}{dt^\alpha} \right)_{L^2(T_0, T_1; \mathcal{H})}$, $H^k(T_0, T_1; \mathcal{H})$ risulta uno spazio di Hilbert (qui le derivate sono intese nel senso di $\mathcal{D}'(\mathcal{H})$; cfr. [19]).

Per ϑ reale in $]0, 1[$ e k intero ≥ 0 si pone poi $H^{k+\vartheta}(T_0, T_1; \mathcal{H}) = [H^{k+1}(T_0, T_1; \mathcal{H}), H^k(T_0, T_1; \mathcal{H})]_{1-\vartheta}$.

2.2. - Si indichino con $\mathcal{F}_x f$ ed $\mathcal{F}_t t$ le trasformate di Fourier in x e t rispettivamente della distribuzione $f \in \mathcal{S}'(\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^1)$ (cfr. [18]); $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ e τ saranno le variabili duali di x e t ;

$$|\xi| = \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Siano α, β reali. Si indica con $H^{\alpha, \beta}(\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^1)$ lo spazio: $\{f \in \mathcal{S}'(\mathcal{R}^{n+1}); (1 + |\xi|^2)^{\alpha/2} (1 + \tau^2)^{\beta/2} \mathcal{F}_x \mathcal{F}_t f \in L^2(\mathcal{R}^{n+1})\}$ con la norma $\|f\|_{H^{\alpha, \beta}(\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^1)} = \|(1 + |\xi|^2)^{\alpha/2} (1 + \tau^2)^{\beta/2} \mathcal{F}_x \mathcal{F}_t f\|_{L^2(\mathcal{R}^{n+1})}$ che induce su $H^{\alpha, \beta}(\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^1)$ una struttura di spazio di Hilbert.

Si verifica banalmente che, per $\alpha, \beta \geq 0$ lo spazio $H^{\alpha, \beta}(\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^1)$

è isomorfo (con norme equivalenti) allo spazio ^{a)}:

$$L^2(-\infty, +\infty; H^\alpha(\mathcal{R}^n)) \cap H^\beta(-\infty, +\infty, L^2(\mathcal{R}^n))$$

(cfr. anche [16]).

Ricordo che, per $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ reali e ϑ reale in $]0, 1[$ si ha (cfr. [16]):

$$(2.1) \quad [H^{\alpha, \beta}(\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^1), H^{\gamma, \delta}(\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^1)] \cong H^{\alpha(1-\vartheta) + \gamma\vartheta, \beta(1-\vartheta) + \delta\vartheta}(\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^1).$$

2.3. - Introduco ora gli spazi analoghi relativi al cilindro infinito $\Omega \times]-\infty, +\infty[= Q$. Precisamente pongo, per α, β reali ≥ 0 : $H^{\alpha, \beta}(Q) = L^2(-\infty, +\infty; H^\alpha(\Omega)) \cap H^\beta(-\infty, +\infty; L^2(\Omega))$. Si osservi che tali spazi coincidono, per α e β interi, con gli spazi introdotti in [17] e ivi indicati con lo stesso simbolo; farò vedere ora che tale coincidenza si ha anche per α e β razionali. Si ha intanto (cfr. [17]):

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Indicando con } R \text{ l'operatore di restrizione a } Q, \text{ per ogni} \\ \text{coppia } \alpha, \beta \text{ di interi non negativi } R \text{ è lineare continua} \\ \text{suriettiva da } H^{\alpha, \beta}(\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^1) \text{ su } H^{\alpha, \beta}(Q). \end{array} \right.$$

$$(2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Per ogni fissato intero } k \text{ esiste un operatore } P_k \text{ tale che} \\ P_k \text{ è lineare continuo da } H^{\alpha, \beta}(Q) \text{ in } H^{\alpha, \beta}(\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^1) \text{ per} \\ \text{ogni coppia } \alpha, \beta \text{ di interi compresi tra } 0 \text{ e } k; \text{ inoltre} \\ R \cdot P_k = \text{identità}. \end{array} \right.$$

2.4. - Siano ora α, β reali ≥ 0 ; si indichi con α^* (risp. β^*) il più piccolo intero maggiore di α (risp. di β). Si ha:

$$\begin{aligned} H^{\alpha, 0}(Q) &\cong L^2(-\infty, +\infty; H^\alpha(\Omega)) \cong (\text{cfr. [10]}) L^2(-\infty, +\infty; \\ [H^{\alpha^*}(\Omega), H^{\alpha^*-1}(\Omega)]_{\alpha^*-\alpha} &\cong (\text{cfr. [12] chap. VII}) [L^2(-\infty, +\infty; \\ H^{\alpha^*}(\Omega)), L^2(-\infty, +\infty; H^{\alpha^*-1}(\Omega))]_{\alpha^*-\alpha} &\cong [H^{\alpha^*, 0}(Q), H^{\alpha^*-1, 0}(Q)]_{\alpha^*-\alpha}. \end{aligned}$$

^{a)} Se $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ sono due spazi di Hilbert si pensa $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$ spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare $(u, v)_{\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2} = (u, v)_{\mathcal{H}_1} + (u, v)_{\mathcal{H}_2}$.

Inoltre si ha ovviamente:

$$H^{0,\beta}(Q) \cong H^\beta(-\infty, +\infty; L^2(\Omega)) = [H^{\beta*}(-\infty, +\infty; L^2(\Omega)), \\ H^{\beta*-1}(-\infty, +\infty; L^2(\Omega))]^{\beta*-\beta}.$$

Combinando le due relazioni trovate si ottiene:

$$(2.4) \quad H^{\alpha,\beta}(Q) \cong [H^{\alpha*,0}(Q), H^{\alpha*-1,0}(Q)]_{\alpha*-\alpha} \cap \\ \cap [H^{0,\beta*}(Q), H^{0,\beta*-1}(Q)]_{\beta*-\beta} \quad \alpha, \beta \geq 0$$

essendo ovviamente, sempre per α e $\beta \geq 0$:

$$(2.5) \quad H^{\alpha,\beta}(Q) \cong H^{\alpha,0}(Q) \cap H^{0,\beta}(Q).$$

La (2.3) e la (2.4), grazie a ben note proprietà di interpolazione, danno per $k \geq \max[\alpha^*, \beta^*]$:

$$P_k(H^{\alpha,\beta}(Q)) \subseteq P_k([H^{\alpha*,0}(Q), H^{\alpha*-1,0}(Q)]_{\alpha*-\alpha}) \cap P_k([H^{0,\beta*}(Q), \\ H^{0,\beta*-1}(Q)]_{\beta*-\beta}) \subseteq [P_k(H^{\alpha*,0}(Q)), P_k(H^{\alpha*-1,0}(Q))]_{\alpha*-\alpha} \cap [P_k(H^{0,\beta*}(Q)), \\ P_k(H^{0,\beta*-1}(Q))]_{\beta*-\beta} \subseteq [H^{\alpha*,0}(\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^1), H^{\alpha*-1,0}(\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^1)]_{\alpha*-\alpha} \cap \\ \cap [H^{0,\beta*}(\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^1), H^{0,\beta*-1}(\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^1)]_{\beta*-\beta} = (\text{per la (2.1)}) \\ H^{\alpha,0}(\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^1) \cap H^{0,\beta}(\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^1) = H^{\alpha,\beta}(\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^1).$$

Analogamente le (2.2) e (2.4) danno per $\alpha, \beta \geq 0$:

$$R(H^{\alpha,\beta}(\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^1)) = R(H^{\alpha,0}(\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^1) \cap H^{0,\beta}(\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^1)) \subseteq \\ \subseteq R(H^{\alpha,0}(\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^1)) \cap R(H^{0,\beta}(\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^1)) = (\text{per la (2.1)})$$

$$R([H^{\alpha*,0}(\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^1), H^{\alpha*-1,0}(\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^1)]_{\alpha*-\alpha}) \cap \\ \cap R([H^{0,\beta*}(\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^1), H^{0,\beta*-1}(\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^1)]_{\beta*-\beta}) = (\text{per la 2.2)})$$

$$[H^{\alpha*,0}(Q), H^{\alpha*-1,0}(Q)]_{\alpha*-\alpha} \cap [H^{0,\beta*}(Q), H^{0,\beta*-1}(Q)]_{\beta*-\beta} = H^{\alpha,\beta}(Q)$$

(per la (2.4)).

Si è così visto che, anche per α, β reali, $H^{\alpha, \beta}(Q)$ coincide con lo spazio delle restrizioni a Q degli elementi di $H^{\alpha, \beta}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1)$; cioè lo spazio qui indicato con $H^{\alpha, \beta}(Q)$ coincide, per α, β razionali, con lo spazio introdotto in [17] e indicato allo stesso modo. In seguito sfrutterò appunto per tali spazi proprietà dimostrate in [17] per gli spazi ivi introdotti.

2.5. - Sempre per α, β reali ≥ 0 si pone:

$$H^{\alpha, \beta}(\Sigma) = L^2(-\infty, +\infty; H^{\alpha}(\Gamma)) \cap \\ \cap H^{\beta}(-\infty, +\infty; L^2(\Gamma)); H^{-\alpha, -\beta}(\Sigma) = (H^{\alpha, \beta}(\Sigma))'$$

(con $\mathcal{H}'$ indico l'antiduale dello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$). Analogamente a quanto visto sopra si ha che per α e β razionali tali spazi coincidono con gli spazi introdotti in [17] e ivi indicati allo stesso modo.

Ricordo anche che, essendo $\Sigma (= \Gamma \times]-\infty, +\infty[)$ « senza bordo », $\mathfrak{D}(\Sigma)$ è denso in $H^{\alpha, \beta}(\Sigma)$ per α, β reali di segno concorde; cioè gli spazi $H^{\alpha, \beta}(\Sigma)$ sono spazi normali di distribuzioni (terminologia di [18]).

3. Teoremi di tracce.

3.1. - Supporrò questo numero $Q = \Omega \times]-\infty, +\infty[$.

Ricordo che $\mathfrak{D}(\bar{Q})$ è denso in $H^{\alpha, \beta}(Q)$; e che si ha (cfr. [17]; i risultati enunciati sono validi anche per α e β reali):

TEOREMA 3.1. - L'applicazione $u \rightarrow S_2 u$ (risp. $T_1 u$) definita in $\mathfrak{D}(\bar{Q})$ si prolunga in una applicazione lineare continua suriettiva, ancora indicata nello stesso modo di $H^{\alpha, \beta}(Q)$ su

$$H^{\alpha-(1/2), \beta[1-(1/2\alpha)]}(\Sigma) \quad \text{per} \quad \alpha > \frac{1}{2}, \quad \beta \geq 0.$$

L'applicazione $u \rightarrow S_1 u$ (risp. $T_2 u$) definita in $\mathfrak{D}(\bar{Q})$ si pro-

lunga in applicazione lineare continua suriettiva, ancora indicata nello stesso modo, di $H^{\alpha, \beta}(Q)$ su $H^{\alpha - (3/2), \beta[1 - 3/2\alpha]}(\Sigma)$ per $\alpha > \frac{3}{2}$, $\beta \geq 0$.

Sempre per $\alpha > \frac{3}{2}$, $\beta \geq 0$ l'applicazione $u \rightarrow \{S_2 u, S_1 u\}$ (risp. $\{T_1 u, T_2 u\}$) di $H^{\alpha, \beta}(Q)$ in $H^{\alpha - (1/2), \beta[1 - (3/2\alpha)]}(\Sigma) \times H^{\alpha - (3/2), \beta[1 - (3/2\alpha)]}(\Sigma)$ è suriettiva; ed esiste un rilevamento ⁴⁾ lineare continuo di tale applicazione.

OSSERVAZIONE 3.1 - Si osservi che, per passaggio al limite sulle $g \in \mathcal{D}(\bar{Q})$ la (1.5'''), grazie al teorema 3.1, dà:

$$(3.1) \quad (f, \wedge^* g)_{L^2(Q)} - (\wedge f, g)_{L^2(Q)} = \int_{\Sigma} S_2 f \cdot \overline{T_2 g} d\sigma - \int_{\Sigma} S_1 f \cdot \overline{T_1 g} d\sigma$$

$$f \in \mathcal{D}(\bar{Q}), g \in H^{2,1}(Q)$$

e analogamente la (1.7') dà:

$$(3.2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left[a(t, f, g) - \int_{\Omega} f \cdot \frac{\partial g}{\partial t} dx \right] dt = (\wedge f, g)_{L^2(Q)} - \int_{\Sigma} S_2 f \cdot \overline{T_2 g} d\sigma$$

$$f \in \mathcal{D}(\bar{Q}), g \in H^{1,1}(Q)$$

3.2. - Intraduco ora una nuova famiglia di spazi di Hilbert. Precisamente indicherò con $H_{\wedge}^{\alpha, \beta}(Q)$ ($\alpha, \beta \geq 0$) lo spazio $\{u \in H^{\alpha, \beta}(Q); \wedge u \in L^2(Q)\}$ con prodotto scalare $(u, v)_{H_{\wedge}^{\alpha, \beta}(Q)} = (u, v)_{H^{\alpha, \beta}(Q)} + (\wedge u, \wedge v)_{L^2(Q)}$.

Si dimostra (cfr. per ragionamenti analoghi [5] ed anche [11] in ipotesi più restrittive della (1.3) sui coefficienti di A):

$$(3.3) \quad \mathcal{D}(\bar{Q}) \text{ è denso in } H_{\wedge}^{0,0}(Q).$$

Dimostrerò ora per lo spazio $H_{\wedge}^{0,0}(Q)$ un teorema di tracce

⁴⁾ Nel senso che $\{S_2, S_1\}$ (risp. $\{T_1, T_2\}$) composto con tale applicazione, dà l'identità di $H^{\alpha - (1/2), \beta[1 - (1/2\alpha)]}(\Sigma) \times H^{\alpha - (3/2), \beta[1 - (3/2\alpha)]}(\Sigma)$.

analogo (a parte la suriettività dell'applicazione) al teorema 3.1. Precisamente:

TEOREMA 3.2. - *L'applicazione $u \rightarrow S_2 u$ (risp. $S_1 u$) definita in $\mathfrak{D}(\bar{Q})$ si prolunga in una applicazione lineare continua di $H_{\Lambda}^{0,0}(Q)$ in $H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\Sigma)$ (risp. in $H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\Sigma)$).*

Dimostrazione. Sia $u \in \mathfrak{D}(\bar{Q})$. L'applicazione $u \rightarrow S_2 u$ definita in $\mathfrak{D}(\bar{Q})$ si può considerare come un'applicazione di $\mathfrak{D}(\bar{Q})$ in $H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\Sigma)$; e se $\varphi \in H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Sigma)$:

$$\langle S_2 u, \varphi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\Sigma), H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Sigma)} = \int_{\Sigma} S_2 u \cdot \bar{\varphi} d\sigma.$$

Sia φ generica in $H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Sigma)$. Per il teorema 3.1 esisterà $v \in H^{2,1}(Q)$ tale che $T_1 v = 0$; $T_2 v = \varphi$; $|v|_{H^{2,1}(Q)} \leq C |\varphi|_{H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Sigma)}$. Si osservi che si avrà anche (indico con la stessa lettera C costanti diverse tra loro):

$$|v|_{L^2(Q)} \leq C |\varphi|_{H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Sigma)}; |\Lambda^* v|_{L^2(Q)} \leq C |\varphi|_{H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Sigma)}.$$

La (3.1) dà allora:

$$\begin{aligned} |\langle S_2 u, \varphi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\Sigma), H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Sigma)}| &= \left| \int_{\Sigma} S_2 u \cdot \overline{T_2 v} d\sigma \right| = |(u, \Lambda v)_{L^2(Q)} - \\ &- (\Lambda u, v)_{L^2(Q)}| \leq |u|_{L^2(Q)} \cdot |\Lambda^* v|_{L^2(Q)} + |\Lambda u|_{L^2(Q)} |v|_{L^2(Q)} \leq \\ &\leq C |u|_{H_{\Lambda}^{0,0}(Q)} \cdot |\varphi|_{H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Sigma)} \end{aligned}$$

e tale relazione, valendo per ogni $u \in \mathfrak{D}(\bar{Q})$ ed ogni $\varphi \in H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Sigma)$ dà: $|S_2 u|_{H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\Sigma)} \leq C |u|_{H_{\Lambda}^{0,0}(Q)} \quad \forall u \in \mathfrak{D}(\bar{Q})$; il che esprime che l'applicazione $u \rightarrow S_2 u$ di $\mathfrak{D}(\bar{Q})$ in $H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\Sigma)$ è continua quando si indica su $\mathfrak{D}(\bar{Q})$ la norma di $H_{\Lambda}^{0,0}(Q)$. Per la (3.3) ed il teorema di Hahn-Banach ne segue il teorema relativamente all'applicazione $u \rightarrow S_2 u$. Analogamente si procede per quanto riguarda l'applicazione $u \rightarrow S_1 u$. *c.v.d.*

OSSERVAZIONE 3.2. - Essendo l'applicazione $u \rightarrow T_1 u$ definibile mediante la formula $T_1 u = a \cdot S_2 u$ ed essendo (per la (1.3)) a un moltiplicatore in $H^{-\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2}}(\Sigma)$ anche l'applicazione $u \rightarrow T_1 u$ si prolunga in una applicazione lineare continua di $H_{\Lambda}^{0,0}(Q)$ in $H^{-\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2}}(\Sigma)$.

OSSERVAZIONE 3.3. - Analogamente a quanto detto nell'osservazione 3.1, per passaggio al limite dalle (3.1) e (3.2) si ha; per $u \in H_{\Lambda}^{0,0}(Q)$ e $v \in H^{2,1}(Q)$;

$$(3.4) \quad (u, \Lambda^* v)_{L^2(Q)} - (\Lambda u, v)_{L^2(Q)} = \langle S_2 u, T_2 v \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2}}(\Sigma), H^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}} - \\ - \langle S_1 u, T_1 v \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2}}(\Sigma), H^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}}(\Sigma)$$

$$(3.5) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left[a(t, u, v) - \int_{\Omega} u \cdot \frac{\partial v}{\partial t} dx \right] dt = (\Lambda u, v)_{L^2(Q)} - \\ - \langle S_1 u, T_1 v \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2}}(\Sigma), H^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}}(\Sigma)$$

4. Teoremi di interpolazione.

4.1. - Sfrutterò nei prossimi numeri alcuni teoremi di interpolazione che ho preferito riunire in un unico numero. Farò uso di teoremi generali sull'interpolazione dimostrati in [12] per gli spazi ivi indicati con $S(p_1, \vartheta_1, \mathcal{K}_1; p_2, \vartheta_2, \mathcal{K}_2)$ che sono qui applicabili perchè (cfr. appunto [12]) gli spazi $[\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2]_{\vartheta}$ coincidono con gli spazi indicati in [12] con $S(2, \vartheta, \mathcal{K}_1; 2, \vartheta - 1, \mathcal{K}_2)$.

4.2. - Sia Q il cilindro infinito $\Omega \times]-\infty, +\infty[$. Si ha:

$$[H^{2,1}(Q), H^{0,0}(Q)]_{\frac{1}{2}} \subset [H^1(-\infty, +\infty; L^2(\Omega)), H^0(-\infty, +\infty;$$

$$L^2(\Omega))]_{\frac{1}{2}} = H^{\frac{1}{2}}(-\infty, +\infty; L^2(\Omega)) \quad [H^{2,1}(Q), H^{0,0}(Q)]_{\frac{1}{2}} \subset$$

$$\subset [L^2(-\infty, +\infty; H^2(\Omega)), L^2(-\infty, +\infty; L^2(\Omega))]_{\frac{1}{2}} =$$

$$\begin{aligned} (\text{cfr. [12] ch. VII}) &= L^2(-\infty, +\infty; [H^2(\Omega), L^2(\Omega)]_{\frac{1}{2}}) = \\ &= (\text{cfr. [9]}) L^2(-\infty, +\infty; H^1(\Omega)). \end{aligned}$$

Combinando le due inclusioni si ha, per la (2.5):

$$(4.1) \quad [H^{2,1}(Q), H^{0,0}(Q)]_{\frac{1}{2}} \subseteq H^{1, \frac{1}{2}}(Q).$$

OSSERVAZIONE 4.1. - Si può dimostrare (con prolungamenti e restrizioni del tipo (2.2) e (2.3)) che nella (4.1) si ha addirittura isomorfismo; io sfrutterò però solo l'inclusione trovata.

4.3. - Sia $\Sigma = \Gamma \times]-\infty, +\infty[$; si ha allora (cfr. [16]; la dimostrazione è data supponendo Γ un iperpiano ma vale anche se Γ è una varietà « senza bordo »):

$$\begin{aligned} (4.2) \quad [H^{2,1}(\Sigma), H^{0,0}(\Sigma)]_{\frac{1}{2}} &= H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Sigma); \\ [H^{2,1}(\Sigma), H^{0,0}(\Sigma)]_{\frac{1}{2}} &= H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Sigma). \end{aligned}$$

Poichè si ha (cfr. [12] ch. III) $[H^{2,1}(\Sigma), H^{-2,-1}(\Sigma)]_{\frac{1}{2}} = H^{0,0}(\Sigma)$, applicando alle (4.2) il teorema di reiterazione di [12] (ch. IV) si ha ⁵⁾:

$$\begin{aligned} H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Sigma) &= [[H^{2,1}(\Sigma), H^{-2,-1}(\Sigma)]_0, [H^{2,1}(\Sigma), H^{-2,-1}(\Sigma)]_{\frac{1}{2}}]_{\frac{1}{2}} = \\ &= [H^{2,1}(\Sigma), H^{-2,-1}(\Sigma)]_{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Sigma) &= [[H^{2,1}(\Sigma), H^{-2,-1}(\Sigma)]_0, [H^{2,1}(\Sigma), H^{-2,-1}(\Sigma)]_{\frac{1}{2}}]_{\frac{1}{2}} = \\ &= [H^{2,1}(\Sigma), H^{-2,-1}(\Sigma)]_{3/8}. \end{aligned}$$

Dalle ultime formule si ha, per dualità (cfr. [12] ch. III):

$$\begin{aligned} H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\Sigma) &= [H^{2,1}(\Sigma), H^{-2,-1}(\Sigma)]_{7/8}; \\ H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\Sigma) &= [H^{2,1}(\Sigma), H^{-2,-1}(\Sigma)]_{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

⁵⁾ Nel capitolo IV di [12] è sempre supposto $\vartheta \neq 0,1$ ma gli stessi risultati valgono anche per $\vartheta = 0,1$ (cfr. [12] pag. 36); analoghe osservazioni in seguito.

Applicando ancora il teorema di reiterazione si ha:

$$[H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Sigma), H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\Sigma)]_{\frac{1}{2}} = [H^{2,1}(\Sigma), H^{-2,-1}(\Sigma)]_{3/8} = H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Sigma) .$$

Analogamente (oppure per dualità dall'ultima formula trovata) si ha:

$$[H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Sigma), H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\Sigma)]_{\frac{1}{2}} = H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\Sigma) .$$

In sintesi si è ottenuto:

$$(4.3) \quad \begin{cases} [H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Sigma), H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\Sigma)]_{\frac{1}{2}} = H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Sigma); \\ [H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Sigma), H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\Sigma)]_{\frac{1}{2}} = H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\Sigma). \end{cases}$$

OSSERVAZIONE 4.2. - Il procedimento seguito è di carattere generale e può essere ripetuto per interpolare tra spazi del tipo $H^{\alpha, \beta, \alpha}(\Sigma)$ ed $H^{\gamma, \beta, \gamma}(\Sigma)$ con α, γ reali qualunque e β reale positivo. Più in generale si ha:

TEOREMA 4.1. - Siano H_1, H_{-1} due spazi di Hilbert con $H_1 \subset H_{-1}$ e H_1 denso in H_{-1} . Posto;

$$(4.4) \quad H_0 = [H_1, H_{-1}]_{\frac{1}{2}}; \quad H_{\vartheta} = [H_1, H_0]_{1-\vartheta}; \quad H_{-\vartheta} = [H_0, H_{-1}]_{\vartheta} \quad (\vartheta \in]0, 1[)$$

si avrà:

$$(4.5) \quad H_{\vartheta} = [H_1, H_{-1}]_{\frac{1-\vartheta}{2}} \quad (\vartheta \in]-1, 1[)$$

$$(4.6) \quad [H_{\alpha}, H_{\beta}]_{\vartheta} = H_{\alpha(1-\vartheta)+\beta\vartheta} \quad \vartheta \in]0, 1[, \quad \alpha, \beta \in [-1, 1]$$

Viceversa presa la (4.5) come definizione valgono le (4.4), (4.6).

Dimostrazione. Si prenda la (4.5) come definizione, dimostro la (4.6) e la (4.4) ne seguirà come caso particolare. Il teorema di reiterazione di [12] (cfr. ⁵⁾) dà, per $\alpha, \beta \in [-1, 1]$, $\vartheta \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} [H_{\alpha}, H_{\beta}]_{\vartheta} &= [[H_1, H_{-1}]_{\frac{1-\alpha}{2}}, [H_1, H_{-1}]_{\frac{1-\beta}{2}}]_{\vartheta} = [H_1, H_{-1}]_{\frac{1-\alpha(1-\vartheta)-\beta\vartheta}{2}} = \\ &= H_{\alpha(1-\vartheta)+\beta\vartheta}; \end{aligned}$$

cioè vale la (4.6). Viceversa presa la (4.4) come definizione, si ha per $\vartheta \in]0, 1[$ [cfr. sempre [12]]:

$$H_{\vartheta} = [H_1, H_0]_{1-\vartheta} = [[H_1, H_{-1}]_0, [H_1, H_{-1}]_{\frac{1}{2}}]_{1-\vartheta} = [H_1, H_{-1}]_{\frac{1-\vartheta}{2}}$$

e analogamente per $\vartheta \in]-1, 0[$:

$$\begin{aligned} H_{\vartheta} &= [H_0, H_{-1}]_{\vartheta} = [[H_1, H_{-1}]_{\frac{1}{2}}, [H_1, H_{-1}]_1]_{\vartheta} = \\ &= [H_1, H_{-1}]_{\frac{1+\vartheta}{2}}; \end{aligned}$$

cioè la (4.4) implica la (4.5) e questa, come si è già visto, implica la (4.6). c.v.d.

4.4. - Si osservi che il teorema 4.1 ha un campo di applicazione molto vasto: ad es. prendendo $H_1 = H^{2,1}(\Sigma)$; $H_{-1} = H^{-2,-1}(\Sigma)$ e prendendo la (4.4) come definizione si ha ([12] ch. III) $H_0 = H^{0,0}(\Sigma)$ ed allora (cfr. [16]) è $H_{\vartheta} = H^{2\vartheta, \vartheta}(\Sigma)$ per $\vartheta \in [-1, 1]$; e la (4.6) dà:

$$(4.7) \quad [H^{2\alpha, \alpha}(\Sigma), H^{2\beta, \beta}(\Sigma)]_{\vartheta} = H^{2[\alpha(1-\vartheta) + \beta\vartheta, \alpha(1-\vartheta) + \beta\vartheta]}(\Sigma)$$

$\alpha, \beta \in [-1, 1]; \quad \vartheta \in [0, 1]$

che, come caso particolare, ridà la (4.3).

4.5. - Sfrutterò nel seguito anche il seguente risultato:

$$(4.8) \quad [H^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)]_{\frac{1}{2}} = L^2(\Omega)$$

che non mi risulta esplicitamente osservato e di cui darò ora una dimostrazione. Più in generale dimostrerò che si ha:

TEOREMA 4.2. - *Siano α e β reali, $\vartheta \in [0, 1]$ tali che $\alpha - \frac{1}{2}$, $\beta - \frac{1}{2}$ e $\alpha(1 - \vartheta) + \beta\vartheta$ non siano interi negativi. Si ha:*

$$(4.9) \quad [H^{\alpha}(\Omega), H^{\beta}(\Omega)]_{\vartheta} = H^{\alpha(1-\vartheta) + \beta\vartheta}(\Omega)$$

Dimostrazione. Sia m un intero positivo più grande di $|\alpha|$ e di $|\beta|$. Comincerò a far vedere che per avere la (4.9) basta dimostrare che:

$$(4.10) \quad [H^m(\Omega), H^{-m}(\Omega)]_{\frac{1}{2}} = L^2(\Omega).$$

E infatti, ad eccezione del caso $\gamma - \frac{1}{2}$ intero negativo, si ha (cf. [10]):

$$H^\gamma(\Omega) = [H^m(\Omega), H^0(\Omega)]_{1-\gamma/m} \quad (0 < \gamma < m);$$

$$H^\gamma(\Omega) = [H^0(\Omega), H^{-m}(\Omega)]_{-\gamma/m} \quad (-m < \gamma < 0).$$

Se vale la (4.10) prendendo nel teorema 4.1 $H_1 = H^m(\Omega)$, $H_{-1} = H^{-m}(\Omega)$ la (4.4), prendendo come definizione la (4.6), dà la (4.9).

Per dimostrare la (4.10) comincio ad osservare che con una partizione dell'unità e con omeomorfismi m volte differenziabili insieme ai loro inversi ed a Jacobiano $\neq 0$ (che esistono per la (1.1)) posso sempre ridurmi al caso in cui Ω è un semispazio; posso cioè limitarmi a dimostrare che, posto $\mathcal{R}_+^n = \{x \in \mathcal{R}^n; x_n > 0\}$, si ha:

$$[H^m(\mathcal{R}_+^n), H^{-m}(\mathcal{R}_+^n)]_{\frac{1}{2}} = L^2(\mathcal{R}_+^n).$$

Osservo ancora che essendo (cf. [12] ch. III) $[H_0^m(\mathcal{R}_+^n), H^{-m}(\mathcal{R}_+^n)]_{\frac{1}{2}} = L^2(\mathcal{R}_+^n)$ per dimostrare l'ultima relazione, e quindi il teorema, basterà dimostrare:

$$(4.11) \quad [H^m(\mathcal{R}_+^n), H^{-m}(\mathcal{R}_+^n)]_{\frac{1}{2}} \subseteq L^2(\mathcal{R}_+^n).$$

Introduco alcune notazioni. Si ponga $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$; $y = x_n$. Il generico punto $x \in \mathcal{R}_+^n$ potrà allora indicarsi con $x = (x', y)$ con x' generico in $\mathcal{R}^{n-1}$ e $y > 0$. Indicherò con $\overline{\mathcal{R}_+^n}$ la chiusura di $\mathcal{R}_+^n$ cioè $\overline{\mathcal{R}_+^n} = \{x \in \mathcal{R}^n; x = (x', y) \text{ con } y \geq 0\}$. Farò uso degli spazi $\mathfrak{D}(\mathcal{R}^n)$, $\mathfrak{D}(\overline{\mathcal{R}_+^n})$ (cfr. [18]) cioè delle funzioni definitive in $\mathcal{R}^n$ (risp. in $\overline{\mathcal{R}_+^n}$) indefinitamente differenziabili ed a supporto compatto in $\mathcal{R}^n$ (risp. in $\overline{\mathcal{R}_+^n}$).

Sia $\{a_i\}_{i=1,2, \dots, 2m+2}$ la $2m+2$ -upla di numeri soluzione di

$$(4.12) \quad \sum_{i=1}^{2m+2} (-i)^l a_i = 1; \quad l = 0, 1, \dots, 2m+1$$

(il sistema (4.12) è risolubile perchè il determinante dei coefficienti è il determinante di Vandermonde dei numeri (distinti) $\{-i\}_{i=1, \dots, 2m+2}$).

Indicando con R la restrizione a $\overline{\mathcal{R}_+^*}$ pongo per $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{R}^n)$:

$$(T\varphi)(x', y) = \varphi(x', y) - \sum_{i=1}^{2m+2} (-1)^{m+1} a_i \varphi(x', -iy); \quad Q\varphi = R \circ T\varphi.$$

Si osservi che per $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{R}^n) T\varphi$ ha supporto compatto: inoltre

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^j T\varphi}{\partial y^j} \right|_{y=0} &= \left. \frac{\partial^j \varphi(x', y)}{\partial y^j} \right|_{y=0} - \sum_{i=1}^{2m+2} (-i)^{m+1} a_i \left. \frac{\partial^j \varphi(x', -iy)}{\partial y^j} \right|_{y=0} = \\ &= \left. \frac{\partial^j \varphi(x, y)}{\partial y^j} \right|_{y=0} \cdot \left[1 - \sum_{i=1}^{2m+2} (-i)^{m+1+j} a_i \right] = 0 \\ &\quad j = 0, 1, \dots, m \end{aligned}$$

per la (4.12) con $l = m+1, \dots, 2m+1$.

Inoltre se $D_{x_j}^\alpha$ è una generica derivata nelle variabili $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ è ovviamente:

$$D_{x_j}^\alpha \left. \frac{\partial^j \varphi^\varphi}{\partial y^j} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial^j D_{x_j}^\alpha T\varphi}{\partial y^j} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial^j T(D_{x_j}^\alpha \varphi)}{\partial y^j} \right|_{y=0} = 0$$

per $j = 0, 1, \dots, m$

(risultato precedente applicato a $D_{x_j}^\alpha \varphi$ invece di φ).

Se ne conclude che per $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{R}^n)$ $Q\varphi$ essendo continua con le sue prime m derivate, a supporto compatto, e nulla con le sue derivate rispetto a y fino all'ordine $m-1$ è in $H_0^m(\mathcal{R}_+^n)$.

Inoltre si ha ovviamente $\|Q\varphi\|_{H_0^m(\mathcal{R}_+^n)} \leq C \|\varphi\|_{H^m(\mathcal{R}^n)}$ per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{R}^n)$, C che dipende solo da m ; per il Teorema di Hahn-Banach si conclude che l'applicazione $\varphi \rightarrow Q\varphi$ si prolunga in

modo unico in una applicazione lineare e continua, ancora indicata allo stesso modo, di $H^m(\mathcal{R}^n)$ in $H_0^m(\mathcal{R}_+^n)$.

Indicando con Q^* l'applicazione trasposta (o aggiunta, nel senso degli spazi di Hilbert) di Q si ha allora:

$$(4.13) \quad Q^* \text{ è lineare continua da } H^{-m}(\mathcal{R}_+^n) \text{ in } H^{-m}(\mathcal{R}^n)$$

Siano ora $\varphi \in H^m(\mathcal{R}_+^n)$, $\psi \in \mathcal{D}(\mathcal{R}^n)$. Si avrà:

$$\begin{aligned} \langle Q^* \varphi, \psi \rangle_{H^{-m}(\mathcal{R}^n), H^m(\mathcal{R}^n)} &= \langle \varphi, Q \psi \rangle_{H^{-m}(\mathcal{R}_+^n), H_0^m(\mathcal{R}_+^n)} = (\varphi, Q \psi)_{L^2(\mathcal{R}_+^n)} = \\ &= \int_{\mathcal{R}^{n-1}} dx' \left[\int_0^\infty \varphi(x', y) \overline{\psi(x', y)} dy - \sum_{i=1}^{2m+2} (-i)^{m+1} a_i \varphi(x', y) \overline{\psi(x', -iy)} dy \right] = \\ &= \int_{\mathcal{R}^{n-1}} dx \left[\int_0^\infty \varphi(x', y) \overline{\psi(x', y)} dy - \int_0^{-\infty} (-i)^{m+1} a_i \varphi\left(x', \frac{\eta}{i}\right) \overline{\psi(x', \eta)} \frac{d\eta}{i} \right] = \\ &= \int_{\mathcal{R}^{n-1}} dx \left[\int_0^\infty \varphi(x', y) \overline{\psi(x', y)} dy + \int_{-\infty}^0 \sum_{i=1}^{2m+2} (-i)^m a_i \varphi\left(x', \frac{y}{i}\right) \overline{\psi(x', y)} dy \right] \end{aligned}$$

$$\text{da cui, posto } (S\varphi)(x', y) = \begin{cases} \varphi(x', y) & y \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{2m+2} (-i)^m a_i \varphi\left(x', -\frac{y}{i}\right) & y < 0 \end{cases} \text{ si ha:}$$

$$\langle Q^* \varphi, \psi \rangle_{H^{-m}(\mathcal{R}^n), H^m(\mathcal{R}^n)} = (S\varphi, \psi)_{L^2(\mathcal{R}^n)} = \langle S\varphi, \psi \rangle_{H^{-m}(\mathcal{R}^n), H^m(\mathcal{R}^n)}$$

che, valendo per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{R}^n)$, dà $Q^* \varphi = S\varphi \forall \varphi \in H^m(\mathcal{R}_+^n)$.

Sfruttando ora le (4.12) per $l = 0, 1, \dots, m$, (analogamente a quanto fatto per l'applicazione φ) si ha che, per $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{R}_+^n)$, $S\varphi$ è continua con le sue derivate fino all'ordine m ; ed esiste una costante C (che dipende solo da m) tale che $|S\varphi|_{H^m(\mathcal{R}^n)} \leq C |\varphi|_{H^m(\mathcal{R}_+^n)}$; ne segue:

$$(4.14) \quad Q_{|H^m(\mathcal{R}_+^n)}^* \text{ è lineare continua da } H^m(\mathcal{R}_+^n) \text{ in } H^m(\mathcal{R}^n)$$

Si osservi ancora che, indicando con P il prolungamento a zero fuori di $\mathcal{R}_+^n$ si ha, per $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathcal{R}_+^n)$, $(R \circ Q^*)\varphi = (Q \circ R^*)^*\varphi = (Q \circ P)\varphi = \varphi$ essendo ovviamente Q o P l'operatore identico. Ne segue $(\mathfrak{D}(\mathcal{R}_+^n)$ essendo denso in $H^{-m}(\mathcal{R}_+^n)$) R o Q = Identità di $H^{-m}(\mathcal{R}_+^n)$.

Ne segue, per note proprietà di interpolazione e per le (4.13),

$$(4.14) \quad [H^m(\mathcal{R}_+^n), H^{-m}(\mathcal{R}_+^n)]_{\frac{1}{2}} = R \circ Q^*[H^m(\mathcal{R}_+^n), H^{-m}(\mathcal{R}_+^n)] \subseteq \\ \subseteq R([H^m(\mathcal{R}^n), H^{-m}(\mathcal{R}^n)]_{\frac{1}{2}}) = \\ (\text{cfr. [12]}) = R(L^2(\mathcal{R}^n)) = L^2(\mathcal{R}_+^n);$$

si ha cioè la (4.11) ed il teorema è completamente dimostrato. c.v.d.

OSSERVAZIONE 4.3. - L'ipotesi (1.1) può essere sostituita, per passare dalla (4.10) alla (4.11), dall'ipotesi che Ω sia di classe C^m ; le funzioni di $\mathfrak{D}(\mathcal{R}^n)$ e $\mathfrak{D}(\overline{\mathcal{R}_+^n})$ andrebbero sostituite dalle funzioni di $C^m(\mathcal{R}^n)$ e $C^m(\overline{\mathcal{R}_+^n})$ ed il teorema è ancora valido con la stessa dimostrazione. Nella costruzione dell'operatore Q ci sono due condizioni di compatibilità superflue (cioè basta scegliere gli $\{a_i\}$ in modo che la (4.12) valga per $l = 1, 2, \dots, 2m$) che sono state introdotte per comodità di calcolo.

5. Impostazione astratta dei problemi misti.

5.1. - Per l'ipotesi (1.11) si può approssimare all'esterno $\overline{\Sigma_1}$ (notazioni del n. 1.4) con una successione di insiemi $\{\Sigma_{1,m}\}_{m=1,2,\dots}$ del tipo $\Sigma_{1,m} = \bigcup_{i=1}^{k_m} \Gamma_{i,m} \times I_{i,m}$ con $\Gamma_{i,m}$ aperto connesso di Γ , $I_{i,m}$ intervallo (o semiretta, o retta) aperto di $\mathcal{R}^1$, in modo che la successione $\{\Sigma_1, m\}$ sia decrescente. Indicando con $\Gamma(m, \tau)$ l'intersezione tra $\Sigma_{1,m}$ e l'iperpiano di equazione $t = \tau$ si avrà (cfr. 1.12):

$$(5.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \{\Gamma(m, t)\}_{m=1,2,\dots} \text{ è una successione non crescente di} \\ \text{aperti misurabili secondo Peano-Hordan; } \lim_{m \rightarrow \infty} \Gamma(m, t) = \\ = \bigcap_{m=1}^{\infty} \Gamma(m, t) = \Gamma_1(t) \text{ per quasi ogni } t. \end{array} \right.$$

Si indichi poi con $V_m(t)$ (risp. $V(t)$) il sottospazio chiuso di $H^1(\Omega)$ definito da $V_m(t) = \{v \in H^1(\Omega); \gamma_0 v|_{\Gamma(m,t)} = 0\}$ (risp. $V(t) = \{v \in H^1(\Omega); \gamma_0 v|_{\Gamma_1(t)} = 0\}$) dove con $\gamma_0 v$ indico la « traccia » su Γ dell'elemento $v \in H^1(\Omega)$; cfr. [9].

Si indichi poi con $W_m(t)$ (risp. $W(t)$) il sottospazio di $H^1(\Omega)$ ortogonale in $H^1(\Omega)$ a $V_m(t)$ (risp. a $V(t)$); e si indichi con $P_{m,t}$ (risp. Pt , risp. $p_{m,t}$, risp. p_t) la proiezione di $H^1(\Omega)$ sul suo sottospazio chiuso $V_m(t)$ (risp. $V(t)$, risp. $W_m(t)$, risp. $W(t)$).

Si indichi poi con $H_{I-\Delta}^1$ lo spazio $\{v \in H^1(\Omega); (I - \Delta)v \in L^2(\Omega)\}$ dove con Δ indico il laplaciano: $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$. La norma $|v|_{H_{I-\Delta}^1} = (|v|_{H^1(\Omega)}^2 + |(I - \Delta)v|_{L^2(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}}$ induce su $H_{I-\Delta}^1$ una struttura di spazio di Hilbert.

Ricordo che (cfr. [9]) per $v \in H_{I-\Delta}^1$ ha senso $\gamma_1 v \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^*$; ed è:

$$(5.2) \quad (v, u)_{H^1(\Omega)} = ((I - \Delta)v, u)_{L^2(\Omega)} + \langle \gamma_1 v, \gamma_0 v \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

$$v \in H_{I-\Delta}^1 \quad u \in H^1(\Omega)$$

LEMMA 5.1. - Per quasi ogni t , $\forall v \in H^1(\Omega)$ si ha:

$$(5.3) \quad (I - \Delta)p_{m,t}v = 0$$

$$(5.4) \quad \gamma_0 p_{m,t}v|_{\Gamma(m,t)} = \gamma_0 v|_{\Gamma(m,t)}$$

(cioè supporto $\gamma_0(v - p_{m,t}v) \subseteq \Gamma - \Gamma(m, t)$)

$$(5.5) \quad \gamma_1 p_{m,t}v|_{\Gamma - \overline{\Gamma(m,t)}} = 0$$

(cioè supporto di $\gamma_1 p_{m,t}v \subseteq \overline{\Gamma(m, t)}$ ⁷⁾).

Dimostrazione. Poichè $\mathfrak{D}(\Omega) \subset V_m(t)$ e $p_{m,t}v$ è ortogonale a

⁶⁾ Con $\gamma_1 \varphi$ indico la « traccia » su Γ della derivata normale di φ , $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}$.

⁷⁾ $\gamma_1 p_{m,t}v$ ha senso per la (5.3); per la definizione di supporto di una distribuzione cfr. [18].

$V_m(t)$ si avrà, per ogni $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} 0 &= (p_{m,t}v, \varphi)_{H^1(\Omega)} = (p_{m,t}v, \varphi)_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial p_{m,t}v}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right)_{L^2(\Omega)} = \\ &= \langle p_{m,t}v, \varphi \rangle_{\mathfrak{D}'(\Omega), \mathfrak{D}(\Omega)} + \sum_{j=1}^n \left\langle \frac{\partial p_{m,t}v}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle_{\mathfrak{D}'(\Omega), \mathfrak{D}(\Omega)} = \\ &= \langle p_{m,t}v, \varphi \rangle_{\mathfrak{D}'(\Omega), \mathfrak{D}(\Omega)} - \sum_{j=1}^n \left\langle \frac{\partial^2 p_{m,t}v}{\partial x_j^2}, \varphi \right\rangle_{\mathfrak{D}'(\Omega), \mathfrak{D}(\Omega)} = \\ &= \langle (I - \Delta)p_{m,t}v, \varphi \rangle_{\mathfrak{D}'(\Omega), \mathfrak{D}(\Omega)} \end{aligned}$$

relazione che, valendo per ogni $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, dà la (5.3).

La (5.4) è ovvia essendo, per definizione di $V_m(t)$, il supporto di $\gamma_0 p_{m,t}v (= \gamma_0(v - p_{m,t}v))$ contenuto in $\Gamma - \Gamma(m, t)$.

Sia ora $\psi \in \mathfrak{D}(\Gamma)$ con supporto in $\Gamma - \Gamma(m, t)$. È $\psi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ quindi (cfr. [97]) esiste $\varphi \in H^1(\Omega)$ con $\gamma_0 \varphi = \psi$; ed è ovviamente $\varphi \in V_m(t)$.

La (5.2) scritta con $p_{m,t}v$ al posto di v e φ al posto di u (si osservi che per la (5.3) $p_{m,t}v \in H_{I-\Delta}^1$) dà essendo $p_{m,t}v$ e φ ortogonali:

$$\begin{aligned} 0 &= (p_{m,t}v, \varphi)_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_1 p_{m,t}v, \gamma_0 \varphi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \\ &= \langle \gamma_1 p_{m,t}v, \psi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \end{aligned}$$

relazione che, valendo per ogni ψ del tipo detto, dà la (5.5). c.v.d.

OSSERVAZIONE 5.1. - Si osservi che, fissato $v \in H^1(\Omega)$, esiste uno ed un solo elemento di $H^1(\Omega)$ che verifichi le (5.3), (5.4), (5.5) (cfr. [3,22]); quindi il risultato del lemma 5.1 si inverte nel senso che si ha:

$$(5.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Se un elemento di } H^1(\Omega) \text{ verifica le (5.3), (5.4), (5.5)} \\ \text{tale elemento è } p_{m,t}v. \end{array} \right.$$

OSSERVAZIONE 5.2. - Analogamente si dimostra che $p_t v$ è la soluzione di:

$$(5.7) \quad (I - \Delta)p_t v = 0; \text{ supporto } \psi_t p_t v \subseteq \overline{\Gamma_1(t)}; \text{ supporto } \gamma_0(v - p_t v) \subseteq \Gamma - \Gamma_1(t).$$

OSSERVAZIONE 5.3. - Si osservi che la (5.2) prendendo $v \rightarrow p_{m,t}v$, $u \rightarrow v$ dà:

$$\begin{aligned} |p_{m,t}v|_{H^1(\Omega)}^2 &= (p_{m,t}v, p_{m,t}v)_{H^1(\Omega)} = (p_{m,t}v, p_{m,t}v)_{H^1(\Omega)} + \\ &+ (p_{m,t}v, P_{m,t}v)_{H^1(\Omega)} = (p_{m,t}v, v)_{H^1(\Omega)} = ((I - \Delta)p_{m,t}v, v)_{L^2(\Omega)} + \\ &+ \langle \gamma_1 p_{m,t}, \gamma_0 v \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \langle \gamma_1 p_{m,t}v, \gamma_0 v \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}; \end{aligned}$$

inoltre essendo $p_{m,t}$ una proiezione è $|p_{m,t}v|_{H^1(\Omega)} \leq |v|_{H^1(\Omega)}$; in sintesi:

$$(5.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} |p_{m,t}v|_{H^1(\Omega)}^2 = \langle \gamma_1 p_{m,t}v, \gamma_0 v \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}; \\ |p_{m,t}v|_{H_{I-\Delta}^1} = |p_{m,t}v|_{H^1(\Omega)} \leq |v|_{H^1(\Omega)}. \end{array} \right.$$

LEMMA 5.2. - Sia $\{C_m\}_{m=1,2,\dots}$ una famiglia monotona di insiemi chiusi di Γ e sia $C = \lim_{m \rightarrow \infty} C_m$. Sia $T_m \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ con supporto in C_m e sia $T \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ tale che, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Gamma)$ si ha:

$$\langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma), \mathcal{D}(\Gamma)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle T_m, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma), \mathcal{D}(\Gamma)}.$$

Si ha: supporto $T \subseteq \bar{C}$.

Dimostrazione. Sia A un generico aperto di Γ con $A \cap C = \varnothing$; sia B un generico chiuso contenuto in A ; sia φ un generico elemento di $\mathcal{D}(\Gamma)$ con supporto in B ; debbo dimostrare che è $0 = \langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma), \mathcal{D}(\Gamma)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle T_m, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma), \mathcal{D}(\Gamma)}$ basterà perciò dimostrare che esiste un $\bar{m}$ tale che, per $m > \bar{m}$ è $B \cap C_m = \varnothing$. E in effetti se $\{C_m\}$ è crescente è $B \cap C_m \subseteq A \cap C = \varnothing$; mentre se $\{C_m\}$ è decrescente la successione $\{C_m \cap B\}_{m=1,2,\dots}$ è una successione decrescente di chiusi che ha limite vuoto (perchè $\lim_{m \rightarrow \infty} B \cap C_m = B \cap \lim_{m \rightarrow \infty} C_m \subseteq A \cap C = \varnothing$); quindi $B \cap C_m = \varnothing$ per m sufficientemente grande. c.v.d.

TEOREMA 5.1. - Per ogni $v \in H^1(\Omega)$ per quasi ogni t si ha:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |P_{m,t}v - P_t v|_{H^1(\Omega)} = 0$$

Dimostrazione. Essendo $P_{m,t} = P_{m,t} \circ P_t$ si ha $P_t v - P_{m,t} v = P_t v - P_{m,t} P_t v = p_{m,t} P_t v$; per dimostrare il teorema basterà dimostrare che, posto: $\alpha = \lim_{m \rightarrow \infty} \|p_{m,t} P_t v\|_{H^1(\Omega)}^2$, è $\alpha = 0$.

Si osservi che essendo per la seconda delle (5.8) $\alpha < \infty$ ed essendo per la (5.3) $\|p_{m,t} P_t v\|_{H^1(\Omega)} = \|p_{m,t} P_t v\|_{H_{I-\Delta}^1}$ si può estrarre da $\{p_{m,t} P_t v\}_{m=1,2,\dots}$ una sottosuccessione $\{p_{m_k,t} P_t v\}_{k=1,2,\dots}$ tale che $\lim_{k \rightarrow \infty} \|p_{m_k,t} P_t v\|_{H^1(\Omega)}^2 = \alpha$; e $\{p_{m_k,t} P_t v\}_{k=1,2,\dots}$ può essere scelta in modo che esista $\varphi_t \in H_{I-\Delta}^1$ tale che $p_{m_k,t} P_t v \rightharpoonup \varphi_t$ in $H_{I-\Delta}^1$; in particolare per la (5.3) sarà $(I - \Delta)\varphi_t = 0$; essendo $\gamma_1 : H_{I-\Delta}^1 \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ lineare continua sarà $\gamma_1 p_{m_k,t} P_t v \rightharpoonup \gamma_1 \varphi_t$; analogamente $\gamma_0 p_{m_k,t} P_t v \rightharpoonup \gamma_0 \varphi_t$. Per il lemma 5.2 e per la (5.4), (5.5) si avrà allora, supporto $\gamma_1 \varphi_t \subseteq \lim_{m \rightarrow \infty} \Gamma(m, t) = \overline{\Gamma_1(t)}$ (cfr. (5.1)) per quasi ogni t ; e analogamente si avrà supporto $\gamma_0(\varphi - P_t v) \subseteq \overline{\Gamma_2(t)}$ (cfr. (1.12)) per quasi ogni t .

Allora la (5.7) dà $\varphi_t = P_t v - P_t P_t v = 0$ per quasi ogni t .

Ne segue $\gamma_1 \varphi_t = 0$ e quindi, per la (5.8): $\lim_{m \rightarrow \infty} \|p_{m,t} P_t v\|_{H^1(\Omega)}^2 = \alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \|p_{m_k,t} P_t v\|_{H^1(\Omega)}^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \gamma_1 p_{m_k,t} P_t v, \gamma_0 P_t v \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \langle \gamma_1 \varphi_t, \gamma_0 P_t v \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = 0$ per quasi ogni t . c.v.d.

TEOREMA 5.2. - Per ogni $v \in H^1(\Omega)$ la funzione di t a valori in H^1 $t \rightarrow P_t v$ è misurabile.

Dimostrazione. Basta osservare che $P_t v$ è, per il teorema 5.1, limite quasi ovunque di $P_{m,t} v$; e le funzioni $t \rightarrow P_{m,t} v$ sono ovviamente costanti a tratti misurabili.

5.2. - Si prenda, con le notazioni del n. 1 [1], $H = L^2(\Omega)$; $K = H^1(\Omega)$; $V(t)$ come è stato definito al n. 5.1.; $a(t, u, v)$ la forma definita dalla (1.6); con le notazioni del n. 3 [1] si prenda poi $V = H_0^1(\Omega)$; con procedimento usuali si identifichi $L^2(\Omega)$ al suo antiduale e si immerga $L^2(\Omega)$ in una varietà densa di $H^{-1}(\Omega) (= (H_0^1(\Omega))')$ ed $H^{-1}(\Omega)$ in un sottospazio di $H_D^{-1}(\mathcal{R}^n) (= (H^1(\Omega))')$; cfr. [15]). Si osservi che per $v \in H_0^1(\Omega)$ $a(t, u, v)$ definisce una forma lineare continua su $H^1(\Omega)$ (per la (1.3)). Si indichi per un momento con $\mathcal{A}(t)u$ ($u \in H^1(\Omega)$) l'elemento di $H^{-1}(\Omega)$

definito da $\langle \mathcal{A}(t)u, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = a(t, u, v) \quad v \in H_0^1(\Omega)$. Si ha:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}(t)u, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} &= a(t, u, v) = \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial (a_{ij}v)}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)} + \\ &+ \left(\sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}, v \right)_{L^2(\Omega)} + (c(x, t)u, v)_{L^2(\Omega)} = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial (a_{ij}v)}{\partial x_i} \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \\ &+ \left\langle \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + c, u, v \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = - \\ &= - \sum_{i,j=1}^n \left\langle a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, v \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \\ &+ \left\langle \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + c, u, v \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \langle Au, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

e tale relazione, valendo per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$, dà $\mathcal{A}u = Au$ cioè l'operatore indicato con A nella (1.2) coincide con l'operatore introdotto nel n. 3 [1] e ivi indicato allo stesso modo.

Si osservi che grazie alle (1.1) (1.3) e (4.8), al teorema 5.2 ed a ben note proprietà degli spazi $L^2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$, $H^{-1}(\Omega)$ (cfr. ad es. [10]) tutte le ipotesi necessarie ad assicurare la validità dei risultati nei nn. 2 e 3 di [1] sono verificati; enuncio ora i risultati ivi ottenuti con le notazioni qui introdotte.

5.3. - Si ponga ora (se $I \neq \mathbb{R}^1$) $Q^* = \Omega \times]-\infty, +\infty[$; $\Sigma^* = \Gamma \times]-\infty, +\infty[$; $\Sigma_2^* = \Sigma_2$; $\Sigma_1^* = (\Sigma^* - \Sigma_2^*)$; $\Gamma_i^*(\tau)$ sia l'intersezione tra Σ_i^* e l'iperpiano $t=\tau$; $V^*(t) = \{v \in H^1(\Omega); \gamma_0 v|_{\Gamma_1^*(t)} = 0\}$.

Ovviamente la famiglia così definita coincide con quella indicata allo stesso modo nel n. 5 [1].

Si osservi che lo spazio indicato con $L^2(T_0, T; V(t))$ in [1] coincide, con le notazioni qui introdotte, con $\{u \in H^{1,0}(Q); S_2 u|_{\Sigma_1} = 0\}$ ²⁾; e lo spazio $\Phi(T_0, T_1; V(t))$ coincide con $\{\varphi \in H^{1,1}(Q); S_2 u|_{\Sigma_1} = 0$;

²⁾ Con definizioni analoghe a quelle date nel n. 2 per il cilindro infinito.

$\varphi(x, T_1) = 0\}^9$; infine lo spazio $H^{\frac{1}{2}}(T_0, T_1; H)$ coincide con $H^{0, \frac{1}{2}}(Q)$. Analoghe considerazioni per gli spazi definiti su Q^* .

L'ipotesi (5.4) [1] (ovvero la (5.7) [1]) con tali notazioni si enuncia:

$$(5.9) \quad \{\varphi \in H^{1,1}(Q); S_2\varphi|_{\Sigma_1^*} = 0\} \text{ è denso in } \\ \{u \in H^{1, \frac{1}{2}}(Q^*); S_2u|_{\Sigma_1^*} = 0\}.$$

TEOREMA 5.3. - *Sotto le ipotesi (1.1), (1.3), (1.8), (1.11), (5.9) fissati ad arbitrio $f \in L^2(T_0, T_1; H^{-1}(\Omega))$ ed $u_0 \in L^2(\Omega)$ (se $T_0 = -\infty$ si deve prendere $u_0 = 0$) esiste una ed una sola*

$$u \in L^2(T_0, T_1; V(t)) \cap H^{\frac{1}{2}}(T_0, T_1; L^2(\Omega)) \cap C([T_0, T_1]; L^2(\Omega))$$

tale che:

$$(5.10) \quad \Delta u = f \text{ in } Q; \quad u(x, T_0) = u_0(x) \text{ in } \Omega$$

$$(5.11) \quad \int_{T_0}^{T_1} [a(t, u, \varphi) - (u, \varphi')_{L^2(\Omega)}] dt = (u_0, \varphi(T_0))_H + \\ + \int_{T_0}^{T_1} \langle f(t), \varphi(t) \rangle_{V'(t), V(t)} dt \quad \forall \varphi \in \Phi(T_0, T_1; V(t)).$$

Inoltre tale u verifica:

$$(5.12) \quad \|u\|_{L^2(T_0, T_1; V(t))} \leq C(\|f\|_{L^2(T_0, T_1; H^{-1}(\Omega))} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)})$$

Dimostrazione. Si è già visto che le (1.1), (1.3), (1.11) assicurano l'applicabilità dei risultati dei nn. 2 e 3 [1]; la (1.8) implica la (1.9) e questa con la (5.9) implica la validità del teorema 6.1 [1] che, espresso con le notazioni qui impiegate, dà l'esistenza e l'unicità della soluzione della (5.11) nello spazio $L^2(T_0, T_1; V(t))$,

⁹ Per il senso di $\varphi(x, T_1)$ si ricordi che $H^{1,1}(Q) \subset C([T_0, T_1]; L^2(\Omega))$; cfr. anche [17]. Per una trattazione più generale del problema delle tracce sul cilindro finito cfr. [23].

e la maggiorazione (5.12); la (5.10) è conseguenza di teoremi di regolarità dati nel n. 3 [1] i quali inoltre assicurano l'appartenenza della soluzione u allo spazio $H^{1,1}(Q) \cap C([T_0, T_1]; L^2(\Omega))$.

c.v.d.

OSSERVAZIONE 5.4. - il teorema 5.3 risolve (in parte sostanzialmente, in parte solo formalmente) il problema (1.10). In effetti mentre le condizioni $\Delta u = f$, $u(x, T_0) = u_0(x)$, $S_2 u|_{\Sigma_1} = 0$ hanno un senso e sono state verificate (le prime due per la (5.10), la terza per l'appartenenza di u a $L^2(T_0, T_1; V(t))$ la condizione $S_1 u|_{\Sigma_1} = 0$ non ha per ora un senso preciso; tuttavia, scrivendo *formalmente* per tale u e per $\varphi \in \Phi(T_0, T_1; V(t))$ la (3.5) e tenendo conto delle (5.10), (5.11) si arriva a concludere l'annullarsi di $\langle S_1 u, T_1 \varphi \rangle$; il che *formalmente* implica $S_1 u|_{\Sigma_1} = 0$ ¹⁰).

5.4. - Se in particolare nel teorema 5.2 si assume $f \in L^2(T_0, T_1; L^2(\Omega))$ le considerazioni svolte nell'osservazione 5.4 cessano di avere valore formale ed assumono un significato preciso. Mi limito ad esporre ciò nel caso in cui $T_0 = -\infty$, $T_1 = +\infty$; ciò non è restrittivo in quanto (cfr. nn. 2 e 5 di [1]) la soluzione del problema relativo al cilindro finito Q è restrizione a Q della soluzione di un analogo problema relativo al cilindro infinito Q^* . D'ora in poi supporrò sempre il cilindro infinito ed abolirò gli asterischi non essendoci più possibilità di confusione.

TEOREMA 5.4. - *Sotto le ipotesi (1.1); (1.3), (1.8), (1.11), (5.9), fissato ad arbitrio $f \in L^2(Q)$ esiste una ed una sola $u \in H_{\Lambda}^{1,1}(Q)$ tale che:*

$$(5.13) \quad \Delta u = f \text{ in } Q; \quad S_2 u|_{\Sigma_1} = 0$$

$$(5.14) \quad \langle S_1 u, T_1 \varphi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\Sigma), H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Sigma)} = 0 \quad \forall \varphi \in H^{2,1}(Q); \quad S_2 \varphi|_{\Sigma_1} = 0.$$

Inoltre u dipende con continuità da f nel senso che:

$$(5.15) \quad \|u\|_{L^2(Q)} \leq C \|f\|_{L^2(Q)} \quad (C \text{ indipendente da } f)$$

¹⁰ Se si supponesse $f \in L^2(T_0, T_1; V'(t))$ invece che $f \in L^2(T_0, T_1; H^{-1}(\Omega))$ si avrebbe, sempre formalmente, $S_1[u - f - P_{H^{-1}(\Omega)} f]|_{\Sigma_1} = 0$; non svolgerò però considerazioni di questo tipo.

Dimostrazione. Sia u la soluzione della (5.11); si ha $\Delta u = f \in L^2(Q)$ quindi è $u \in H_{\Lambda}^{1,1}(Q) \subset H_{\Lambda}^{0,0}(Q)$; la (3.5) dà allora per $\varphi \in H^{2,1}(Q)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [a(t, u, \varphi) - (u, \varphi')_{L^2(Q)}] dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (f, \varphi)_{L^2(Q)} dt - \\ - \langle S_1 u, T_1 \varphi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\Sigma), H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Sigma)}.$$

Se inoltre è $S_2 \varphi|_{\Sigma_1} = 0$ è $\varphi \in \Phi(T_0, T_1; V(t))$ e l'ultima relazione scritta, unita alle (5.10), dà la (5.14). Le (5.13), (5.15) sono ovvie (cfr. anche (5.12)). c.v.d.

OSSERVAZIONE 5.5. - Il teorema 5.4 è ancora insufficiente perchè sfrutta un teorema di tracce nello spazio $H_{\Lambda}^{0,0}(Q)$ anzichè nello spazio $H_{\Lambda}^{1,1}(Q)$. Se si avesse un teorema di tracce nello spazio $H_{\Lambda}^{1,1}(Q)$ si potrebbe dare su S_1 una condizione più significativa della (5.13).

Per avere un teorema di tracce nello spazio $H_{\Lambda}^{1,1}(Q)$ premetto uno studio dei problemi misti del tipo Cauchy-Dirichlet e Cauchy-Neumann nel cilindro infinito che, oltre a dare la caratterizzazione cercata delle tracce di $H_{\Lambda}^{1,1}(Q)$, mi sembra interessante di per sè.

6. I problemi di Cauchy Dirichlet e Cauchy Neumann in $H^{2,1}(Q)$.

6.1. - *Supporrò in tutto questo numero verificate le (1.1), (1.3), (1.8); e supporrò $Q = \Omega \times]-\infty, +\infty[$; non richiamerò più tali ipotesi.*

Sia $\Sigma_1 = \Sigma$ cioè $\Gamma_1(t) = \Gamma$ per ogni t . Le (1.11), (5.9) sono allora automaticamente verificate (cfr. anche [17]). Il teorema 5.4 dà:

TEOREMA 6.1. - *Per ogni $f \in L^2(\Omega)$ esiste una ed una sola $u \in H^{1,1}(Q)$ tale che:*

$$(6.1) \quad \Delta u = f \text{ in } Q; \quad S_1 u = 0 \text{ in } \Sigma$$

Inoltre esiste una costante C (indipendente da f) tale che:

$$(6.2) \quad \|u\|_{L^1(Q)} \leq C \|f\|_{L^1(Q)}.$$

6.2. - Sia ora $\Sigma_1 = \emptyset$ cioè $\Gamma_2(t) = \Gamma$ per ogni t . Le (1.11), (5.9), sono automaticamente verificate (cfr. sempre [17]); e il teorema 5.4 dà:

TEOREMA 6.2. - *Per ogni $f \in L^1(Q)$ esiste una ed una sola $u \in H_{\wedge}^{1,1}(Q)$ tale che:*

$$(6.3) \quad \Delta u = f \text{ in } Q; \quad S_1 u = 0 \text{ in } \Sigma.$$

Inoltre esiste una costante C (indipendente da f) tale che:

$$(6.4) \quad \|u\|_{L^1(Q)} \leq C \|f\|_{L^1(Q)}.$$

Dimostrazione. Basta ovviamente dimostrare che la (5.14) implica $S_1 u = 0$; e infatti per il teorema 3.1 fissata ad arbitrio $\psi \in H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Sigma)$ esiste $\varphi \in H^{2,1}(Q)$ con $T_1 \varphi = \psi$; la (5.14) dà allora $\langle S_1 u, \psi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\Sigma), H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Sigma)} = 0$ che, valendo per ogni $\psi \in H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Sigma)$, dà $S_1 u = 0$.

6.3. - Voglio ora dimostrare che le soluzioni dei problemi di Cauchy-Dirichlet e Cauchy-Neumann trovate nei teoremi 6.1 e 6.2 sono in $H^{2,1}(Q)$. Per ottenere ciò comincio a ricordare che il risultato è vero se il cilindro Q è finito ¹¹); precisamente si ha che; essendo i coefficienti di A limitati indipendentemente da t (cfr. 1.3)), si ha (cfr. [4.7, 21]).

TEOREMA 6.3. - *Sia $u \in H_{\wedge}^{0,0}(\Omega \times]T_0, T_1[)$ con T_0 e T_1 finiti; sia inoltre $u(T_0) = 0$ ¹²) e $S_2 u = 0$ (risp. $S_1 u = 0$).*

¹¹) Con definizioni analoghe a quelle date nel n. 2 per gli spazi $H^{\alpha, \beta}(Q)$, $H^{\alpha, \beta}(\Sigma)$; cfr. [17]; [23].

¹²) Anche in $H_{\wedge}^{0,0}(\Omega \times]T_0, T_1[)$ valgono teoremi di tracce analoghi (anche se più complicati) a quelli dati nel n. 3 per $H_{\wedge}^{0,0}(\Omega \times]-\infty, +\infty[)$; cfr. ad es. [2].

Si ha $u \in H^{2,1}(\Omega \times]T_0, T_1[)$ ed è:

$$(6.5) \quad \|u\|_{H^{2,1}(\Omega \times]T_0, T_1[)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega \times]T_0, T_1[)} \\ (C \text{ dipende solo da } T_1 - T_0)$$

6.4. - Si indichi con I_m (m intero relativo) l'intervallo aperto $]m-1, m+1[$ e con Q_m, Σ_m rispettivamente $\Omega \times I_m$ e $\Sigma \times I_m$.

Sia $\chi_m(t)$ una funzione definita per $t \in \mathbb{R}^1$ tale che: $\chi_m(t)$ ha supporto compatto in I_m ; $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \chi_m(t) = 1 \forall t$; $\chi_m(t)$ è continua con la derivata prima; $|\chi_m(t)| + |\chi'_m(t)| \leq C$ con C indipendente da t e da m (al solito con la stessa lettera C indica costanti anche diverse tra loro ma indipendenti da t e da m).

Sia $u \in H^{1,1}(Q)$ soluzione della (6.1) (risp. (6.3)). Pongo:

$$u_m(x, t) = u(x, t) \cdot \chi_m(t); \\ f_m(x, t) = f(x, t) \cdot \chi_m(t) + u(x, t) \cdot \chi'_m(t).$$

Essendo χ_m e χ'_m equilimitati essi sono dei moltiplicatori in $L^2(Q)$ di norma maggiorabile indipendentemente da m ; e si avrà:

$$\|f_m\|_{L^2(Q_m)} \leq C \|f\|_{L^2(Q_m)} + C \|u\|_{L^2(Q_m)};$$

tali relazioni, unite alla (6.2) (risp. alla 6.4)) danno:

$$(6.6) \quad \|f_m\|_{L^2(Q_m)} \leq C \|f\|_{L^2(Q_m)}.$$

Si osservi che essendo $\Delta u_m = \chi_m \Delta u + \chi'_m u + \frac{\partial u}{\partial t} \chi_m =$
 $= \chi_m \Delta u + \chi'_m u = \chi_m f + \chi'_m u = f_m \in L^2(Q)$ si ha $u_m \in H_{\Lambda}^{0,0}(Q)$;
 $u_m|_{Q_m} \in H_{\Lambda}^{0,0}(Q_m)$; ed è anche $u_m(x, m-1) = 0 \forall x \in \Omega$; $S_2 u_m = 0$
 (risp. $S_1 u_m = 0$) in Σ_m .

Per il teorema 6.3. applicato a $u_m|_{Q_m}$ e per la (6.6) si ha:

$$(6.7) \quad u_m|_{Q_m} \in H^{2,1}(Q_m); \quad \|u_m\|_{H^{2,1}(Q_m)} \leq C \|f\|_{L^2(Q_m)};$$

dove la costante C è indipendente da m essendo l'altezza del cilindro Q_m costantemente uguale a 2.

Si osservi ora che essendo χ_m a supporto compatto in I_m u_m è a supporto compatto in $\Omega \times I_m$; quindi $u_m|_{Q_m}$ prolungata a zero fuori di $\Omega \times I_m$ (e tale prolungamento coincide con u_m) resta in $H^{2,1}(Q)$; quindi la (6.7) dà:

$$(6.8) \quad u_m \in H^{2,1}(Q) ; \quad |u_m|_{H^{2,1}(Q)} \leq C |f|_{Q_m}|_{L^2(Q_m)}.$$

Pongo ora $u_N^{(i)} = \sum_{|m| \leq N} u_{2m+i}$ ($i = 1, 2$). Si ha, per ogni $N, p > 0$:

$$|u_{N+p}^{(i)} - u_N^{(i)}|_{H^{2,1}(Q)} = \left| \sum_{N < |m| \leq N+p} u_{2m+i} \right|_{H^{2,1}(Q)}^2 = \sum_{N < |m| \leq N+p} |u_{2m+i}|_{H^{2,1}(Q)}^2$$

(perchè u_{2m+i} ha supporto disgiunto da u_{2l+i} per $l \neq m$ quindi u_{2m+i} e u_{2l+i} sono ortogonali in $H^{2,1}(Q)$). La (6.8) dà:

$$\begin{aligned} |u_{N+p}^{(i)} - u_N^{(i)}|_{H^{2,1}(Q)} &\leq C \sum_{N < |m| \leq N+p} \int_{Q_{2m+i}} |f(x, t)|^2 dx dt \leq \\ &\leq C \left(\int_{|t| \geq N-1} |f(x, t)|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

quindi la successione $\{u_N^{(i)}\}_{N=1,2,\dots}$ converge in $H^{2,1}(Q)$. Posto $u^{(i)} = \lim_{N \rightarrow \infty} u_N^{(i)}$ ($i = 1, 2$) si ha, per i conti fin qui svolti, $u^{(i)} \in H^{2,1}(Q)$

$$|u^{(i)}|_{H^{2,1}(Q)} \leq C |f|_{L^2(Q)}.$$

Essendo ovviamente $u = u^{(1)} + u^{(2)}$ ho ottenuto il teorema:

TEOREMA 6.4. - Sia $f \in L^2(Q)$. Esiste una ed una sola $u \in H^{2,1}(Q)$ tale che: $\Delta u = f$ in Q ; $S_2 u = 0$ in Σ ; (risp. $S_1 u = 0$ in Σ); inoltre esiste una costante C tale che:

$$(6.9) \quad |u|_{H^{2,1}(Q)} \leq C |f|_{L^2(Q)} \quad (C \text{ indipendente da } f)$$

6.5. - Il teorema 6.4 risolve sul cilindro infinito $\Omega \times]-\infty, +\infty[$ i problemi ai limiti omogenei (cioè con condizioni al contorno nulle) del tipo Cauchy-Dirichlet e Cauchy-Neumann. Gra-

zie al teorema 3.1 si passa poi, con ragionamenti di carattere usuale, alla risoluzione dei corrispondenti problemi non omogenei.

TEOREMA 6.5. - $\{\Lambda, S_2\}$ (risp. $\{\Lambda, S_1\}$) è un isomorfismo suriettivo di $H^{2,1}(Q)$ su $L^2(Q) \times H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Sigma)$ (risp. $\times H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Sigma)$).

Dimostrazione. Basta ovviamente dimostrare la suriettività dell'applicazione. Siano $f \in L^2(Q)$, $\psi \in H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Sigma)$ arbitrari. Per il teorema 3.1 esiste $v \in H^{2,1}(Q)$ con $S_2 v = \psi$; ed è ovviamente $\Lambda v \in L^2(Q)$. Si risolve (teorema 6.4) il problema: trovare $w \in H^{2,1}(Q)$ tale che si abbia $\Lambda w = f - \Lambda v$; $S_2 w = 0$. Posto $u = v + w$ è ovviamente $u \in H^{2,1}(Q)$; $\Lambda u = f$; $S_2 u = \psi$; inoltre u dipende con continuità da f e da ψ . Analogamente si procede per l'applicazione $\{\Lambda, S_1\}$.
c.v.d.

7. I problemi di Cauchy Dirichlet e Cauchy Neumann in $H_{\Lambda}^{0,0}(Q)$.

7.1. - Tutti i risultati del n. 6 continuano a valere se si sostituiscono gli operatori Λ, S_1, S_2 rispettivamente con Λ^*, T_2, T_1 ; in particolare il teorema 6.5 dà, posto $X = \{v \in H^{2,1}(Q); T_1 v = 0\}$; $Y = \{v \in H^{2,1}(Q); T_2 v = 0\}$:

(7.1) Λ^* è un isomorfismo suriettivo di X su $L^2(Q)$

(7.2) Λ^* è un isomorfismo suriettivo di Y su $L^2(Q)$.

Si trasponga ora la (7.1) (per ragionamenti analoghi cfr. [9, 10, 11]): se $v \rightarrow L(v)$ è una forma antilineare continua su X (cioè se $L \in X'$) esiste una ed una sola $u \in L^2(Q) (= L^2(Q)')$ tale che:

$$(7.3) \quad (u, \Lambda^* v)_{L^2(Q)} = L(v) \quad \forall v \in X; \quad \|u\|_{L^2(Q)} \leq C \|L\|_{X'}.$$

Si scelga la forma $v \rightarrow L(v)$ del seguente tipo: presi ad arbitrio $f \in L^2(Q)$, $\psi \in H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\Sigma)$ si ponga:

$$(7.4) \quad L(v) = (f, v)_{L^2(Q)} + \langle \psi, T_2 v \rangle_{H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\Sigma), H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Sigma)}$$

Si prenda $v \in \mathcal{D}(Q)$; le (7.3), (7.4) danno:

$$\langle \Lambda u, v \rangle_{\mathcal{D}'(Q), \mathcal{D}(Q)} = (u, \Lambda^* v)_{L^2(Q)} = L(v) = (f, v)_{L^2(Q)} = \langle f, v \rangle_{\mathcal{D}'(Q), \mathcal{D}(Q)}$$

cioè $\Lambda u = f \in L^2(Q)$ quindi $u \in H_{\Lambda}^{0,0}(Q)$. Le (7.3), (7.4), (3.4) danno:

$$\langle S_2 u, T_2 v \rangle_{H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\Sigma), H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Sigma)} = \langle \psi, T_2 v \rangle_{H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\Sigma), H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Sigma)} \quad \forall v \in X$$

(perchè per $v \in X$ è $T_1 v = 0$). Essendo l'applicazione $v \rightarrow T_2 v$ suriettiva di X su $H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Sigma)$ (cfr. Teorema 3.1) si conclude $S_2 u = \psi$.

Osservando poi che per la (7.3) si ha

$$\|u\|_{L^2(Q)} \leq C (\|L\|_{X'}) \leq C, (\|f\|_{L^2(Q)} + \|\psi\|_{H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\Sigma)})$$

si conclude:

$$(7.5) \quad \{\Lambda, S_2\} \text{ è un isomorfismo suriettivo di } H_{\Lambda}^{0,0}(Q) \text{ su } L^2(Q) \times H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\Sigma).$$

operando analogamente a partire dalla (7.2) si ottiene:

$$(7.6) \quad \{\Lambda, S_1\} \text{ è un isomorfismo suriettivo di } H_{\Lambda}^{0,0}(Q) \text{ su } L^2(Q) \times H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\Sigma)$$

7.2. - Il teorema 6.5 e le (7.5), (7.6) risolvono i problemi non omogenei di Cauchy-Dirichlet e Cauchy-Neumann rispettivamente « in forma forte » (cioè in $H^{2,1}(Q)$) e « in forma debole » (cioè in $H_{\Lambda}^{0,0}(Q)$). Per interpolazione tra i casi estremi si ha, per ogni $\vartheta \in]0, 1[$ (cfr. la (4.7));

$$(7.7) \quad \{\Lambda, S_2\} \text{ è un isomorfismo suriettivo di } [H^{2,1}(Q), H_{\Lambda}^{0,0}(Q)]_{\vartheta} \text{ su } L^2(Q) \times H^{\frac{1}{2}-2\vartheta, \frac{1}{2}-\vartheta}(\Sigma).$$

$$(7.8) \quad \{\Lambda, S_1\} \text{ è un isomorfismo suriettivo di } [H^{2,1}(Q), H_{\Lambda}^{0,0}(Q)]_{\vartheta} \text{ su } L^2(Q) \times H^{\frac{1}{2}-2\vartheta, \frac{1}{2}-\vartheta}(\Sigma).$$

Le (7.7), (7.8) risolvono i problemi di Cauchy-Dirichlet e di Cauchy-Neumann in spazi intermedi tra $H^{2,1}(Q)$ ed $H_{\Lambda}^{0,0}(Q)$; esse possono essere ulteriormente precisate perchè si può dimostrare che si ha $[H^{2,1}(Q), H_{\Lambda}^{0,0}(Q)]_{\vartheta} = H^{2(1-\vartheta), 1-\vartheta}(Q)$; io dimostrerò tale relazione solo per $\vartheta = \frac{1}{2}$.

Precisamente, posto per un momento $\mathcal{K} = [H^{2,1}(Q), H_{\Lambda}^{0,0}(Q)]_{\frac{1}{2}}$ si ha ovviamente $\mathcal{K} \subseteq [H^{2,1}(Q), H^{0,0}(Q)]_{\frac{1}{2}} \subseteq H^{1,\frac{1}{2}}(Q)$ per la (4.1); ed essendo Λ lineare continuo da $H^{2,1}(Q)$ in $L^2(Q)$ e da $H_{\Lambda}^{0,0}(Q)$ in $L^2(Q)$ si ha per interpolazione che Λ è lineare continuo da $\mathcal{K}$ in $L^2(Q)$; cioè è $\mathcal{K} \subseteq H_{\Lambda}^{1,\frac{1}{2}}(Q)$. Viceversa sia $u \in H_{\Lambda}^{1,\frac{1}{2}}(Q)$; si ha $\Lambda u \in L^2(Q)$, $S_2 u \in H^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\Sigma)$ (teorema 3.1) quindi per la (7.7) con $\vartheta = \frac{1}{2}$ esiste un $v \in \mathcal{K}$ con $\Lambda v = \Lambda u$; $S_2 v = S_2 u$. Poichè sia u che v sono in $H_{\Lambda}^{0,0}(Q)$ posto $w = u - v$ si ha $w \in H_{\Lambda}^{0,0}(Q)$; $\Lambda w = 0$; $S_2 w = 0$; quindi per la (7.5) è $w = 0$ cioè $u = v \in \mathcal{K}$. Si è così ottenuto che $\mathcal{K} \subseteq H_{\Lambda}^{1,\frac{1}{2}}(Q)$ algebricamente e topologicamente e $\mathcal{K} \supseteq H_{\Lambda}^{1,\frac{1}{2}}(Q)$ algebricamente; per il teorema di Banach sugli isomorfismi si ha $\mathcal{K} \cong H_{\Lambda}^{1,\frac{1}{2}}(Q)$ cioè:

$$(7.9) \quad [H^{2,1}(Q), H_{\Lambda}^{0,0}(Q)]_{\frac{1}{2}} \cong H_{\Lambda}^{1,\frac{1}{2}}(Q)$$

algebricamente e topologicamente.

7.3. - Sono ora in grado di dare il teorema di tracce e le formule di Green che rendevano incompleto il toerema 5.4 (cfr. Osservazione 5.5).

Precisamente le (7.7), (7.8) per $\vartheta = \frac{1}{2}$ e la (7.9) danno:

$$(7.10) \quad S_2 \text{ è lineare continua suriettiva da } H_{\Lambda}^{1,\frac{1}{2}}(Q) \text{ su } H^{+\frac{1}{2},+\frac{1}{2}}(\Sigma)$$

$$(7.11) \quad S_1 \text{ è lineare continua suriettiva da } H_{\Lambda}^{1,\frac{1}{2}}(Q) \text{ su } H^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(\Sigma).$$

Inoltre la (7.12), tenuto conto della Osservazione 3.2, dà:

(7.12) T_1 è lineare continua suriettiva da $H_{\lambda}^{1,1}(Q)$ su $H^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\Sigma)$.

Si osservi ora che la (3.2) può essere scritta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [a(t, u, \varphi) - (u, \varphi')_{L^2(\Omega)}] dt = (\Lambda u, \varphi)_{L^2(Q)} - \\ - \langle S_1 u, T_1 \varphi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\Sigma), H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Sigma)} \quad \forall u, \varphi \in \mathcal{D}(\bar{Q})$$

e tale formula si prolunga per le $\varphi \in H^{1,1}(Q)$; grazie alla (7.12) si ha:

$$(7.13) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} [a(t, u, \varphi) - (u, \varphi')_{L^2(Q)}] dt = (\Lambda u, \varphi)_{L^2(Q)} - \\ - \langle S_1 u, T_1 \varphi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\Sigma), H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Sigma)}$$

per ogni $\varphi \in H^{1,1}(Q)$ ed ogni $u \in H_{\lambda}^{1,1}(Q)$.

Si osservi anche che la (3.2), prendendo $f = g$, dà:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a(t, f, f) dt = (\Lambda f, f)_{L^2(Q)} - \langle S_1 f, T_1 f \rangle_{H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\Sigma), H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Sigma)} \quad \forall f \in \mathcal{D}(\bar{Q}).$$

Tale formula, grazie alle (7.11), (7.12), si prolunga per $u \in H_{\lambda}^{1,1}(Q)$ e dà:

$$(7.14) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} a(t, u, u) dt = (\Lambda u, u)_{L^2(Q)} - \\ - \langle S_1 u, S_2 u \rangle_{H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\Sigma), H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Sigma)} \quad \forall u \in H_{\lambda}^{1,1}(Q).$$

8. Il teorema di unicità per il problema misto.

8.1. - Sia per ora la (1.9) verificata con $\lambda = 0$. Allora l'enunciato dei teoremi 5.3 e 5.4, salvo al più l'unicità della soluzione e la dipendenza continua dai dati, vale indipendentemente dalla (5.9) (cfr. [7]); sostituirò ora l'ipotesi (5.9) con la seguente: si indichi per brevità con $H_{\Sigma}^{\alpha\beta}$ (α, β reali, E sottoinsieme di Σ) l'insieme degli elementi di $H^{\alpha,\beta}(\Sigma)$ con supporto contenuto in $\overline{E}$. Supporrò che si abbia:

$$(8.1) \quad H_{\Sigma_1}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \text{ è denso in } H_{\Sigma_1}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}.$$

TEOREMA 8.1. - *Sotto le ipotesi (1.1), (1.3), (1.11), (8.1), se la (1.9) è verificata con $\lambda = 0$, fissata ad arbitrio $f \in L^2(Q)$, esiste $u \in H_{\Lambda}^{1,\frac{1}{2}}(Q)$ tale che:*

$$(8.2) \quad \Delta u = f \text{ in } Q; \quad S_1 u|_{\Sigma_1} = 0; \quad S_1 u|_{\Sigma_2} = 0$$

Dimostrazione. Sia u una soluzione del teorema 5.4. Sfruttando la (7.13) (invece della (3.5) come si era fatto nella dimostrazione del teorema 5.4) si ha:

$$\langle S_1 u, T_1 \varphi \rangle_{H^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(\Sigma), H^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\Sigma)} = 0 \quad \forall \quad \varphi \in \mathcal{D}(-\infty, +\infty; V(t)); ;$$

e (per la suriettività dell'applicazione $\varphi \rightarrow T_1 \varphi$ di $H^{1,1}(Q)$ su $H^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\Sigma)$; cfr. Teorema 3.1) si ha:

$$\langle S_1 u, \psi \rangle_{H^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(\Sigma), H^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\Sigma)} = 0 \quad \forall \quad \psi \in H_{\Sigma_1}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}.$$

Grazie alla (8.1) si avrà:

$$\langle S_1 u, \psi \rangle_{H^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(\Sigma), H^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\Sigma)} = 0 \quad \forall \quad \psi \in H_{\Sigma_1}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}},$$

che, per definizione di supporto, (cfr. [18]) dà la terza delle (8.2).

8.2. - Si è così ottenuto un teorema di esistenza per le soluzioni del problema (1.10) in cui la condizione $S_1 u|_{\Sigma_2} = 0$ ha un senso preciso e non più formale; farò vedere ora che la (8.1) è sufficiente anche ad assicurare l'unicità della soluzione trovata.

TEOREMA 8.2. - *La soluzione della (8.2) è unica.*

Dimostrazione. Nella dimostrazione del teorema 8.1 si è ottenuto tra l'altro:

$$\langle S_1 u, \psi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\Sigma), H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Sigma)} = 0 \quad \forall \quad \psi \in H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}_{\Sigma_2};$$

in particolare avendo $T_1 u (= a S_2 u)$ supporto coincidente con quello di $S_2 u$ quindi contenuto in Σ_2 si avrà:

$$\langle S_1 u, T_1 u \rangle_{H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\Sigma), H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Sigma)} = 0.$$

Sia ora u una soluzione della (8.2) relativa ad $f = 0$; basterà dimostrare che è $u = 0$; e infatti si ha $\Delta u = f = 0$;

$$\langle S_1 u, T_1 u \rangle_{H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\Sigma), H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Sigma)} = 0; \text{ e la (7.14) da } \int_{-\infty}^{+\infty} a(t, u, u) dt = 0.$$

Ma se vale la (1.9) con $\lambda = 0$ si ha:

$$\|u\|_{L^2_{\lambda}(-\infty, +\infty; V(\Omega))}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \|u(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \leq \frac{1}{\alpha} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} a(t, u, u) dt = 0 \text{ cioè } u = 0.$$

c.v.d.

Si è così visto come la condizione (8.1), unita alla condizione (1.9) con $\lambda = 0$, è ancora sufficiente ad assicurare un teorema di unicità analogo a quello ottenibile con la (5.9); però la (8.1) dà una interpretazione non formale della condizione $S_1 u|_{\Sigma_2} = 0$.

8.3. - Ricordo che, indicando con $H_0^{\alpha,\beta}(Q)$ l'aderenza di $\mathcal{D}(Q)$ in $H^{\alpha,\beta}(Q)$ si ha (cfr. [16])

$$H^{1,1}(Q) \cong H_0^{1,1}(Q) \oplus H^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\Sigma);$$

$$H^{1,\frac{1}{2}}(Q) \cong H_0^{1,\frac{1}{2}}(\Sigma) \oplus H^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\Sigma).$$

TEOREMA 8.3. - *Le condizioni (5.9) ed (8.1) sono equivalenti.*

Dimostrazione. Si osservi che con le notazioni introdotte si ha:

$$\begin{aligned} \{\varphi \in H^{1,1}(Q); S_2\varphi|_{\Sigma_1} = 0\} &\cong H_0^{1,1}(Q) \oplus \{\psi \in H^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\Sigma); \psi|_{\Sigma_1} = 0\} \equiv \\ &\equiv H_0^{1,1}(Q) \oplus H_{\Sigma_1}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}; \end{aligned}$$

e analogamente:

$$\{u \in H^{1,\frac{1}{2}}(Q); S_2u|_{\Sigma_1} = 0\} \cong H_0^{1,\frac{1}{2}}(Q) \oplus H_{\Sigma_1}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}.$$

Poichè ovviamente $H_0^{1,1}(Q)$ è denso in $H_0^{1,\frac{1}{2}}(Q)$ si ha l'equivalenza voluta.

OSSERVAZIONE 8.1. - Grazie al teorema 8.3 si sarebbe potuta evitare l'introduzione dell'ipotesi (8.1) e dedurla direttamente dalla (5.9), dimostrando così il teorema 8.1. senza l'ipotesi restrittiva della validità della (1.9) con $\lambda = 0$; inoltre non sarebbe più stato necessario il teorema 8.2, l'unicità della soluzione essendo conseguenza del teorema di unicità astratto di [1]. Ho però preferito seguire questa linea di dimostrazione sia perchè ho ottenuto il teorema 8.2 in data anteriore a quella in cui ho ottenuto il teorema di unicità astratto, sia anche perchè il metodo usato per dimostrare il teorema 8.2 è usuale in problemi di questo tipo (cfr. ad es. [14] in ipotesi e in spazi diversi) ed è immediatamente generalizzabile a problemi in cui l'ipotesi non debba necessariamente coincidere con l'ipotesi corrispondente alla (8.1) (ad es. se l'operatore A è di ordine $2m$ con $m > 1$).

8.4. - I teoremi 5.4, 8.1 e 8.2 e 8.3 danno:

TEOREMA 5.4. - *Sotto le ipotesi (1.1), (1.3), (1.8), (1.11), (8.1) per ogni $f \in L^2(Q)$ esiste in $H_{\Lambda}^{1,\frac{1}{2}}(Q)$ una ed una sola soluzione del*

problema

$$(8.4) \quad \Delta u = f \text{ in } Q; \quad S_2 u|_{\Sigma_1} = 0; \quad S_1 u|_{\Sigma_2} = 0.$$

Inoltre u dipende con continuità da f .

9. Un teorema di densità.

9.1. - Mi propongo in questo numero di dare delle condizioni su Σ_2 affinchè sia verificata la (8.1).

Si osservi anzitutto che a questo scopo sono difficilmente utilizzabili condizioni (usuali in questo tipo di problemi di densità) del tipo: « La frontiera di Σ_2 è una varietà k -volte differenziabile »; tali condizioni servono infatti a « spianare » l'insieme Σ_2 ed a ridursi al caso in cui Σ_2 è un semispazio; ma quando, come nella (8.1), figuri una dissimetria delle variabili tali « spianamenti » non sono possibili in quanto spazi del tipo $H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Gamma \times]-\infty, +\infty[)$ non sono invarianti rispetto a queste trasformazioni.

Una seconda osservazione è la seguente: la condizione (8.1) è di tipo molto generale; non so se essa è automaticamente verificata quando valga la (1.11), tuttavia non conosco esempi in cui valga la (1.11) e non la (8.1). Per questo motivo, invece di enunciare condizioni precise su Σ_2 atte ad assicurare la validità della (8.1) mi limiterò ad indicare un procedimento col quale si può cercare di approssimare elementi di $H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}_{\Sigma_2}$ con elementi di $\mathcal{D}_{\Sigma_2}$ (notazioni analoghe a quelle introdotte nella (8.1): $\mathcal{D}_{\bar{E}} = \{\varphi \in \mathcal{D}(\Sigma); \text{ supporto } \varphi \subset E\}$).

9.2. - Si fissi dunque un insieme $\Sigma_2 \subset \Sigma$ tale che valga la (1.11) e sia $u \in H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}_{\Sigma_2}$. Sia $\{\chi_m(t)\}_{m=0, \pm 1, \pm 2, \dots}$ una successione di funzioni tali che $\chi_m \in \mathcal{D}(-\infty, +\infty)$; supporto $\chi_m \subset]m-1, m+1[$; $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \chi_m(t) = 1$.

Si verifica facilmente che è $u = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|m| \leq N} u \cdot \chi_m$ (limite in $H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\Sigma)$); per approssimare u basterà quindi approssimare

$\sum_{|m| \leq N} u \cdot \chi_m$; il che equivale a dire che si può sostituire Σ_2 con $\Sigma_2 \cap (I \times]m-1, m+1[)$; cioè che si può supporre Σ_2 limitato.

9.3. - Sia Σ_2 un insieme limitato di Σ tale che valga la (1.11). Con una partizione dell'unità su I e con $n-1$ omeomorfismi infinitamente differenziabili con i loro inversi ed a Jacobiano diverso da zero (che esistono per la (1.1)) del tipo:

$\xi_i = \xi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$; $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in I$; $i = 1, 2, \dots, n-1$
 ci si può ridurre al caso in cui Σ_2 sia un aperto limitato misurabile secondo Peano-Jordan dello spazio euclideo a n dimensioni $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^1$ il punto generico sarà indicato con (ξ, t) dove $t \in \mathbb{R}^1$ e $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

9.4. - Sia Σ_2 un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, misurabile secondo Peano-Jordan. Supporrò che esista una decomposizione finita di $\mathbb{R}^n$ in aperti misurabili secondo Peano-Jordan, $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^h A_i$, tale che $\Sigma_2 \cap A_i$ sia un insieme che goda della seguente proprietà di « contrazione »: si può traslare $\Sigma_2 \cap A_i$ in modo che l'origine sia punto interno a $\Sigma_2 \cap A_i$, e dopo tale traslazione l'insieme $\Sigma_2 \cap A_i$ è tale che $\lambda(\Sigma_2 \cap A_i) = \{(\lambda\xi, \lambda t); (\xi, t) \in \Sigma_2 \cap A_i\}$ abbia una distanza positiva dalla frontiera di $\Sigma_2 \subset A_i$ per ogni reale $\lambda \in]0, 1[$ ⁽¹⁴⁾.

Se vale tale proprietà, con una partizione dell'unità relativa alla decomposizione $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^h A_i$, per dimostrare la (8.1) sarà sufficiente dimostrare il seguente teorema:

TEOREMA 9.1. - *Sia E un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ misurabile secondo Peano-Jordan, contenente l'origine, e tale che per ogni $\lambda \in]0, 1[$ λE ha distanza positiva dalla frontiera di E ; allora $D_{\overline{E}}$ è denso in $H_{\overline{E}}^{\frac{n-1}{2}}$.*

(14) Ad es. tale proprietà vale se $\Sigma_2 \cap A_i$ è un insieme aperto limitato convesso contenente l'origine.

Dimostrazione. Si considerino su $\mathcal{D}(\mathcal{R}^n)$ le applicazioni T_λ , S_λ definite da: $(T_\lambda u)(\xi, t) = u\left(\frac{1}{\lambda} \xi, \frac{1}{\lambda} t\right)$ (pongo $\frac{1}{\lambda} \xi \equiv \left\{ \frac{1}{\lambda} \xi_i \right\}_{i=1,2,\dots,n-1}$); $S_\lambda = I - T_\lambda$ ($I =$ identità). Si verifica facilmente che le applicazioni T_λ ed S_λ di $\mathcal{D}(\mathcal{R}^n)$ in sè si prolungano in applicazioni lineari continue di $L^2(\mathcal{R}^n)$ in sè e di $H^{2,1}(\mathcal{R}^{n-1} \times \mathcal{R}^1)$ in sè; indicherò ancora con T_λ ed S_λ tali prolungamenti. Per interpolazione (cfr. Pagni [17]; si ha $[H^{2,1}(\mathcal{R}^{n-1} \times \mathcal{R}^1), L^2(\mathcal{R}^n)]_{\frac{1}{2}} = H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathcal{R}^{n-1} \times \mathcal{R}^1)$) si avrà allora $T_\lambda, S_\lambda \in \mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathcal{R}^{n-1} \times \mathcal{R}^1), H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathcal{R}^{n-1} \times \mathcal{R}^1))$ ⁽¹⁵⁾. Si verifica inoltre facilmente che è

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1} \|S_\lambda\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathcal{R}^n), L^2(\mathcal{R}^n))} = 0; \quad \lim_{\lambda \rightarrow 1} \|S_\lambda\|_{\mathcal{L}(H^{2,1}(\mathcal{R}^{n-1} \times \mathcal{R}^1), H^{2,1}(\mathcal{R}^{n-1} \times \mathcal{R}^1))} = 0;$$

e ne seguirà, per interpolazione:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1} \|S_\lambda\|_{\mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathcal{R}^{n-1} \times \mathcal{R}^1), H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathcal{R}^{n-1} \times \mathcal{R}^{n-1} \times \mathcal{R}^1))} = 0;$$

quindi per approssimare una $u \in H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}_{\bar{E}}$ con elementi di $\mathcal{D}_{\bar{E}}$ basterà approssimare $T_\lambda u$ con elementi di $\mathcal{D}_{\bar{E}}$; e tale approssimazione è facile perchè, per le ipotesi fatte su E , $T_\lambda u$ ha supporto in $\lambda \cdot E$; quindi si può regolarizzare (con prodotti di convoluzione) $T_\lambda u$ lasciandone il supporto in $\bar{E}$; ne segue il teorema. c.v.d.

n. 10. - Osservazioni finali.

Le ipotesi sotto le quali è stato ottenuto il teorema (8.4) sono: la (1.8) necessaria anche per avere un teorema di esistenza per il problema in esame, la (1.11) necessaria (come si è già detto al n. 1.4) per avere la unicità cercata; le (1.1) ed (1.3) facilmente generalizzabili e molto poco restrittive; ed infine la (8.1) che, come si è visto nel n. 9 è di carattere molto generale.

Ci si può porre il problema di confrontare tali ipotesi con le

⁽¹⁵⁾ Con $\mathcal{L}(X, Y)$ indico lo spazio delle applicazioni lineari continue di X in Y .

ipotesi sotto le quali era già noto un teorema di unicità del tipo del teorema 8.4 (cfr. ad es. Kato-Tanabe [24], Lions [25]).

Tale confronto, che potrebbe essere fatto anche per il teorema di unicità astratto che ho ottenuto in [1], non è però agevole in quanto le ipotesi sotto le quali valgono i risultati di [24] e [25] sono essenzialmente del seguente tipo: l'applicazione $t \rightarrow P_t v$ (introdotta nel n. 5.1) è di classe C^1 e tale ipotesi (contrariamente a quanto si verifica per la (8.1)) è difficilmente esprimibile in termini di proprietà degli insiemi Σ_1, Σ_2 .

Viceversa la (8.1) è valida, come si è visto nel n. 9, sotto ipotesi molto generali sugli insiemi Σ_1, Σ_2 e che risultano geometricamente evidenti; ad es. la condizione enunciata nel n. 7 di [1] si ottiene con un facile adattamento dei ragionamenti esposti al n. 9 (basta « contrarre » la figura rispetto all'asse delle t anziché rispetto all'origine).

BIBLIOGRAFIA

- [1] BAIocchi C.: *Regolarità e unicità*.... In corso di stampa sui Rend., Padova.
- [2] BAIocchi C.: *Sui problemi ai limiti*.... Boll. U.M.I. vol. 19, pp.407-422.
- [3] FICHERA G.: *Analisi esistenziale*.... Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 1 (1947), pp. 75-100.
- [4] GAGLIARDO E.: *Problema al contorno*.... Ric. di Matematica, 5 (1956) pp. 169-205.
- [5] HORMANDER L.: *Definition of maximal*.... Ark. Math., 3 (1958), pp. 501-504.
- [6] LIONS J.L.: *Espaces intermédiaires*.... Bull. Math. R.P.R., Bucarest, 2 (1958), pp. 410-432.
- [7] LIONS J. L.: *Equations différentielles opérationnelles*. Grundlehren der Math. Wiss. B. 111.
- [8] LIONS J. L.: *Equations différentielles*.... Corso CIME 1963. Cremonese Roma.
- [9] LIONS J. L., MAGENES E. : *Problèmes aux limites non homogènes (II)*. Ann. Inst. Fourier 13 (1961), pp. 137-178.

- [10] LIONS J.L., MAGENES E.: *Problèmes aux limites non homogènes* (III). Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, XV (1961), pp. 39-101.
- [11] LIONS J. L., MAGENES E.: *Problèmes aux limites non homogènes* (V). Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, XVI (1962), pp. 1-44.
- [12] LIONS J. L., PEETRE J.: *Sur une classe d'espaces d'interpolation*. Pubblicazione I.H.E.S. n. 19.
- [13] MIRANDA C.: *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*. Ergebnisse der Mathematik N.F. hefte 2.
- [14] MAGENES E.: *Sull'equazione del calore. Teoremi di unicità....* I e II, Rendiconti Sem. Mat. Univ. Padova, 21 (1952), pp. 99-123; 136-170.
- [15] MAGENES E., STAMPACCHIA G.: *I problemi al contorno....* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 12 (1958), pp. 247-358.
- [16] PAGNI M.: *Sulle tracce di una certa classe di funzioni*. Rend. Sem. Mat. e fis. Modena XI (1961-62).
- [17] PAGNI M.: *Problemi al contorno....* Rend. Sem. Mat. fis. Modena, XIII (1964), pp. 119-164.
- [18] SCHWARTZ L.: *Théorie des distributions*. I e II. Herman Paris 1950-51.
- [19] SCHWARTZ L.: *Théorie des distributions à valeurs vectorielles*. I e II. Ann. Inst. Fourier, 7 (1958) e 8 (1958).
- [20] SCHWARTZ L.: *Trasformate di Fourier....* (parte I Corso CIME 1961) ed. Cremonese, Roma.
- [21] SLOBODETSKIJ L. N.: *Gli spazi di S. L. Sololev d'ordine frazionario....* (in russo) Doklady Akad. Nauk., 118, (1958), pp. 243-246.
- [22] STAMPACCHIA G.: *Problemi al contorno misti....* Annali Mat. p. e appl. 40 (1955), 177-193.
- [23] GRISVARD P.: *Commutativité de deux foncteurs d'interpolation et applications*. Thèse, Paris, 1965.
- [24] KATO T., TANABE H.: *On the abstract evolution equation*. Osaka Math. J. 14 (1962), pp. 107-133.
- [25] LIONS J. L. *Remarques sur les équations différentielles opérationnelles*. Osaka Math. J. 15 (1963), pp. 131-142.

Manoscritto pervenuto in redazione il 23 giugno 1965.