

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

JEAN PANVINI

Su certi omomorfismi di tipo esponenziale

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 35, n° 2 (1965), p. 371-379

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1965__35_2_371_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1965__35_2_371_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SU CERTI OMOMORFISMI DI TIPO ESPONENZIALE

*Nota *) di JEAN PANVINI (a Pisa) **)*

1. — Nella presente nota ci poniamo il problema di immergere un anello commutativo (con identità) A_0 in un sopranello A , nel quale riesca definitiva una « funzione di tipo esponenziale », intesa come un omomorfismo iniettivo σ del gruppo additivo di A nel semigruppato moltiplicativo di A , tale che $\sigma(0) = 1$.

Nel n. 2 indichiamo un procedimento mediante il quale si costruiscono sempre un sopranello A di A_0 ed un omomorfismo σ verificanti le condizioni anzi dette.

Si mostra quindi, nel n. 3, che l'anello A precedentemente costruito verifica anche la seguente proprietà:

I. — Sia D un sopranello di A_0 dotato di un omomorfismo di tipo esponenziale τ (non necessariamente iniettivo), tale che ogni elemento di D sia ottenibile da A_0 con le operazioni razionali intere e l'operazione τ . Allora D è una immagine omomorfa di A .

Si osserva infine, nel n. 4, che se A_0 è un corpo e C è un sopra-corpo di A_0 dotato di una funzione esponenziale τ per cui valgano

*) Pervenuto in redazione il 13 aprile 1965.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico dell'Università, Pisa.

**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca del C.N.R.

L'Autore ringrazia il Prof. P. SALMON per avergli dato utili consigli nella redazione del presente lavoro.

le ipotesi della proprietà I , la caratteristica di A_0 è necessariamente 0, se non è $\tau(u) = 1$ per ogni $n \in C$.

2. — Sia A_0 un anello commutativo con identità. Ci proponiamo di costruire il sopranello A di A_0 con le proprietà enunciate nel n. 1, mediante una opportuna successione di anelli A_n , ciascuno immerso nel seguente.

Cominciamo coll'espore la costruzione dell'anello A_1 e delle sue proprietà essenziali.

Sia $\{X_a\}_{a \in A_0}$ un sistema di indeterminate indicate in A_0 ; in particolare sia X_0 l'indeterminata indicata nell'identità 0 del gruppo additivo di A_0 . Sia $B_1 = A_0[\dots X_a \dots]$ l'anello ottenuto da A_0 per aggiunzione di tale sistema di indeterminate (cfr. I, Ch. I, § 18, p. 40). Sia inoltre $\mathfrak{J}_1$ l'ideale di B_1 generato da $X_0 - 1$ e da tutti gli elementi del tipo $X_a - X_b X_c$, dove è $a = b + c$.

Posto $A_1 = B_1/\mathfrak{J}_1$, indichiamo con φ_1 l'omomorfismo naturale di B_1 su A_1 e poniamo $x_a = \varphi_1(X_a)$, ove $a \in A_0$. L'anello A_1 gode delle seguenti proprietà.

I_1 . — A_0 si immerge in A_1 .

DIMOSTRAZIONE: Si consideri l'isomorfismo τ_1 che inietta A_0 in B_1 e, quindi, l'omomorfismo naturale φ_1 di B_1 su A_1 ; il prodotto $\eta_1 = \tau_1 \circ \varphi_1$ è un omomorfismo di A_0 in A_1 e l'asserto è provato se si mostra che risulta $\text{Ker } \varphi_1 \cap A_0 = 0$ (identifichiamo qui A_0 coll'immagine di A_0 in B_1 mediante τ_1).

Si consideri a tal fine l'omomorfismo ψ_1 di B_1 su A_0 definito da $\psi_1(a) = a$ ($a \in A_0$) e $\psi_1(X_a) = 1$; si ha $\text{Ker } \varphi_1 \subset \text{Ker } \psi_1$, $\text{Ker } \psi_1 \cap A_0 = 0$, donde $\text{Ker } \varphi_1 \cap A_0 = 0$.

Nel seguito identificheremo A_0 con la sua immagine in A_1 mediante η_1 (cfr. al riguardo [1], Ch. I, § 13).

II_1 . — Esiste un omomorfismo Ω_1 di A_1 su A_0 , la cui restrizione ad A_0 è l'identità.

DIMOSTRAZIONE: L'inclusione $\text{Ker } \varphi_1 \subset \text{Ker } \psi_1$, osservata poc'anzi, assicura infatti che l'omomorfismo ψ_1 si fattorizza nel

prodotto Ω_1 o φ_1 , dove $\Omega_1; A_1 \rightarrow A_0$ è l'omomorfismo così definito: $\Omega_1(a) = a$ se $a \in A_0$; $\Omega_1(x_a) = 1$.

Di qui l'asserto.

III₁. - *Esiste un omomorfismo σ_1 del gruppo additivo di A_0 nel semigruppato moltiplicativo di A_1 .*

DIMOSTRAZIONE: Per $a \in A_0$, si ponga $\sigma_1(a) = x_a (= \varphi_1(X_a))$; si ha $x_{a+b} = x_a x_b$, $x_0 = 1$.

IV₁. - *Se è $\sigma_1(u) = 1$, si ha $u = 0$; σ_1 è cioè un omomorfismo iniettivo.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $\sigma_1(u) = x_u = 1$. Tenuto conto che è $A_1 = B_1/\mathfrak{J}_1$ e tenuti presenti i generatori di $\mathfrak{J}_1$, si trae la seguente relazione in B_1 :

$$(1) \quad f(X_0 - 1) + g_1(X_{a_1} - X_{b_1}X_{c_1}) + \dots + \\ + g_r(X_{a_r} - X_{b_r}X_{c_r}) = X_u - 1,$$

essendo $f, g_1, \dots, g_r$ polinomi di B_1 e a_i, b_i, c_i opportuni elementi di A_0 soddisfacenti le relazioni $a_i = b_i + c_i$.

Sia $\{U_a\}_{a \in A_0}$ un altro sistema di indeterminate indiciate in A_0 e si pensi B_1 immerso nell'anello $C_1 = B_1[\dots U_a \dots]$ ottenuto per aggiunzione a B_1 delle indeterminate U_a .

Resta individuata la derivazione D di B_1 in C_1 , tale che $DX_a = U_a$, $D_a = 0$ se $a \in A_0$ (vedere l'osservazione seguente). Si applichi ai due membri di (1) dapprima la D e quindi l'omomorfismo di C in A_0 che invia ogni X_a in 1 e ogni U_a in a ; si ottiene subito $u = 0$.

OSSERVAZIONE: Nella dimostrazione di IV₁ si è tenuto conto del seguente lemma sulle derivazioni (per le derivazioni cfr. [1], Ch. II, § 17).

LEMMA: *Siano R un sottoanello di S e D una derivazione di R in S . Siano $X_i (1 \leq i \leq n)$ delle indeterminate, T un sopranello di $S[X_1, \dots, X_n]$ ed $s_1, \dots, s_n$ elementi di S . Allora esiste una (e una sola) derivazione D^* di $R[X_1, \dots, X_n]$ in T che estende D e tale che $D^*X_i = s_i (1 \leq i \leq n)$.*

DM.: Si vede subito che possiamo limitarci a dimostrare l'asserto per $n = 1$, procedendo poi per induzione su n .

Definiamo la seguente applicazione D^* di $R[X]$ in T :

$$(2) \quad D^*\left(\sum_{i=0}^m a_i X^i\right) = \sum_i ((Da_i)X^i + s i a_i X^{i-1}) \quad \text{dove} \quad s \in S.$$

È chiaro che D^* estende D e che $D^*(X) = s$; è inoltre evidente che D^* è additiva. Per provare che D^* è una derivazione, basta verificare che se $f, g \in R[X]$ si ha

$$D^*(fg) = fD^*g + gD^*f.$$

Posto

$$f = \sum_i a_i X^i, \quad g = \sum_j b_j X^j,$$

si ha:

$$\begin{aligned} D^*(fg) &= D^*\left(\sum_{i,j} a_i b_j X^{i+j}\right) = \sum_{i,j} D(a_i b_j) X^{i+j} + s(i+j) a_i b_j X^{i+j-1} = \\ &= \sum_{i,j} [(a_i D b_j) X^{i+j} + s_j b_j x^{i+j-1}] + (b_j D a_i) X^{i+j} + s i b_i X^{i+j-1} = \\ &= \left(\sum_i a_i X^i\right) D^*\left(\sum_j b_j X^j\right) + \left(\sum_j b_j X^j\right) D^*\left(\sum_i a_i X^i\right) = \\ &= fD^*g + gD^*f. \end{aligned}$$

Si verifica inoltre, per induzione sull'intero m che compare in (2), che D^* è la sola derivazione con la proprietà richiesta.

Esponiamo ora nei dettagli la costruzione dell'anello A_2 (della successione $\{A_n\}$): nel seguito sarà manifesto come si costruisce A_i con $i > 2$.

Sia $\{Y_\alpha\}$ un sistema di indeterminate indiciate in A_1 e sia $B_2 = A_1[\dots Y_\alpha \dots]$ l'anello ottenuto aggiungendo ad A_1 le indeterminate Y_α .

Sia $\mathfrak{J}_2$ l'ideale generato dagli elementi del tipo $Y_\alpha - Y_\beta Y_\gamma$ dove $\alpha = \beta + \gamma$ e dagli elementi $x_a - Y_a$ con $a \in A_0$.

Posto $A_2 = B_2/\mathfrak{J}_2$, sia $\varphi_2: B_2 \rightarrow A_2$ l'omomorfismo naturale; poniamo $y_\alpha = \varphi_2(Y_\alpha)$.

L'anello A_2 gode delle seguenti proprietà.

I₂. - A_1 si immerge in A_2 .

DIMOSTRAZIONE: Si consideri a tal fine l'omomorfismo ψ_2 di B_2 su A_1 definito da $\psi_2(\alpha) = \alpha$ per $\alpha \in A_1$; $\psi_2(Y\alpha) = x_{\Omega_1(\alpha)}$ (Ω_1 è l'omomorfismo definito in II₁); poichè $\text{Ker } \varphi_2 \subset \text{Ker } \psi_2$ e $\text{Ker } \psi_2 \cap A_1 = 0$ si ha $\text{Ker } \varphi_2 \cap A_1 = 0$.

Identificheremo nel seguito A_1 con la sua immersione in A_2 ora provata.

II₂. - Esiste un omomorfismo Ω_2 di A_2 su A_1 la cui restrizione ad A_1 è l'identità.

DIMOSTRAZIONE: Si ha infatti la fattorizzazione $\psi_2 = \Omega_2 \circ \varphi_2$ ove Ω_2 è così definito: $\Omega_2(\alpha) = \alpha$, $\Omega_2(y_\alpha) = x_{\Omega_1(\alpha)}$, per $\alpha \in A_1$. Ne segue l'asserto.

III₂. - Esiste un omomorfismo σ_2 del gruppo additivo di A_1 nel semigruppone moltiplicativo di A_2 ; inoltre σ_2 prolunga σ_1 .

DIMOSTRAZIONE: Per $\alpha \in A_1$ si ponga $\sigma_2(\alpha) = y_\alpha$; si ha

$$\sigma_2(\alpha + \beta) = y_{\alpha+\beta} = y_\alpha \cdot y_\beta = \sigma_2(\alpha) \cdot \sigma_2(\beta).$$

Sia ora $a \in A_0$. Si ha: $\sigma_2(a) = y_a = x_a = \sigma_1(a)$ cioè σ_2 estende σ_1 .

IV₂. - Se è $\sigma_2(u) = 1$ si ha $u = 0$; cioè σ_2 è un omomorfismo iniettivo.

DIMOSTRAZIONE: Sia $\sigma_2(u) = 1$. Tenendo presente l'isomorfismo $A_2 \rightarrow B_2/\mathfrak{J}_2$ e i generatori dell'ideale $\mathfrak{J}_2$, si trae la seguente relazione in B_2 :

$$Y_u - 1 = \sum f_i(Y_{\alpha_i} - y_{\beta_i} Y_{\gamma_i}) + \sum g(Y_{a_j} - x_{a_j}).$$

dove

$$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in A_1, a_j \in A_0, \alpha_i = \beta_i + \gamma_i, f_i, g_j \in B_2.$$

Osserviamo ora che posto $C = A_0[\dots X_a \dots, \dots Y_\alpha \dots]$ con $a \in A_0$ e $\alpha \in A_1$, e $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_1 C$, si ha manifestamente $B_2 = C/I$.

Da quanto precede si trae allora la seguente relazione in C :

$$(1) \quad Y_u - 1 = \sum f'_i(Y_{\alpha_i} - Y_{\beta_i}Y_{\gamma_i}) + \sum g'_j(Y_{a_j} - X_{a_j}) + \\ + \sum f''_k(X_{b_k} - X_{c_k}X_{d_k}) + g''(X_0 - 1)$$

dove

$$f'_i, g'_j, f''_k, g'' \in C; \quad \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in A_1; \\ \alpha_i = \beta_i + \gamma_i; \quad b_k = c_k + d_k; \quad a_j, b_k, c_k, d_k \in A_0.$$

Se $\{U_a\}$ e $\{V_\alpha\}$ sono altri due sistemi di indeterminate, indicate rispettivamente in A_0 e in A_1 , si consideri l'anello $C_1 = C[\dots U_a \dots, \dots V_\alpha \dots]$ nel quale C si immerge.

Resta allora individuata una derivazione D di C in C_1 tale che $DX_a = U_a$, $DY_\alpha = V_\alpha$, $Da = 0$ per $a \in A_0$.

Si applichi dapprima la D ai due membri della relazione (1), quindi si applichi l'omomorfismo che invia ogni indeterminata X_a e Y_α in 1, ed ogni U_i , V_j nel proprio indice. Si ottiene immediatamente $u = 0$.

Lo stesso procedimento con cui abbiamo costruito A_2 a partire da A_1 , permette di costruire, per induzione su i , la successione di anelli A_i , ognuno dei quali gode delle seguenti proprietà:

I _{i} . - A_{i-1} si immerge in A_i .

II _{i} . - Esiste un omomorfismo Ω_i di A_i su A_{i-1} la cui restrizione ad A_{i-1} è l'identità.

III _{i} . - Esiste un omomorfismo σ_i del gruppo additivo di A_{i-1} nel semigruppato moltiplicativo di A_i ; inoltre σ_i estende σ_{i-1} .

IV _{i} . - $\sigma_i(u) = 1$ implica $u = 0$, cioè σ_i è iniettivo.

Indichiamo adesso con η_i l'immersione (naturale) di A_i in A_{i+1} e poniamo

$$\varrho_{ij} = \eta_j \circ \eta_{j-1} \circ \dots \circ \eta_i \quad \text{se} \quad j > i$$

ϱ_{ii} = Identità (automorfismo identico).

Possiamo allora considerare il limite diretto della famiglia di anelli A_i ed omomorfismi iniettivi $\varrho_{ij}: A_i \rightarrow A_j$.

Sia $A = \lim_{\rightarrow} A_i$.

Se allora identifichiamo ogni anello A_i colla sua immagine nel limite diretto A , si ha anche $A = UA$.

Da quanto precede risulta l'asserto che ci eravamo proposti di dimorare al principio del n. 1; si ha cioè il seguente

TEOREMA 1: *Sia A_0 un anello commutativo con identità. Esistono un sopranello A di A_0 ed un omomorfismo iniettivo σ del gruppo additivo di A nel suo semigruppato moltiplicativo, tali che ogni elemento di A è raggiungibile a partire da A_0 con le operazioni razionali intere e l'operazione σ .*

3. - Vogliamo ora dimostrare la proprietà I enunciata nel n. 1.

Sia D un sopranello di A_0 che verifichi le ipotesi enunciate in I e designano con D_1 l'anello $A_0[\tau(V)]$ ottenuto aggiungendo ad A_0 tutti i $\tau(V)$ con V in A_0 ; e, in generale con D_i ($i > 1$) l'anello $D_{i-1}[\tau(V)]$ dove V descrive D_{i-1} . Si ha manifestamente $D = \cup D_i$.

Indichiamo ancora con σ la funzione esponenziale di A e conserviamo le notazioni introdotte in 2.

Vogliamo provare il seguente

TEOREMA 2: *Esiste un omomorfismo $\delta: A \rightarrow D$, tale che se $\delta(a) = d$, si ha $\delta(\sigma(a)) = \tau(d)$.*

DIMOSTRAZIONE: Sia h_1 l'omomorfismo di B_1 su D_1 definito da: $h_1(a) = a$ se $a \in A_0$, $h_1(X_a) = \tau(a)$; si ha subito $\ker h_1 \supset \ker \varphi_1$. Ne consegue un omomorfismo δ_1 di A_1 su D_1 , tale che, se invia a_1 in d_1 , invia $\sigma(a_1)$ in $\tau(d_1)$.

Sia ora h_2 l'omomorfismo di B_2 su D_2 definito da:

$$h_2(u) = \delta_1(u) \quad \text{per} \quad u \in A_1, \quad h_2(Y_u) = \tau(\delta_1(u)).$$

Si ha: $\ker h_2 \supset \ker \varphi_2$. Ne consegue un omomorfismo δ_2 di A_2 su D_2 , che estende δ_1 (tenere presente che $\ker \varphi_2 \cap A_1 = 0$), e se invia a_2 in d_2 , invia $\sigma(a_2)$ in $\tau(d_2)$.

Costruito l'omomorfismo $\delta_i: A_1 \rightarrow D_i$, si costruisce l'omomorfismo $\delta_{i+1}: A_{i+1} \rightarrow D_{i+1}$ con le proprietà anzidette.

Ne segue senz'altro l'asserto per passaggio al limite diretto, ponendo $\delta = \lim_{\rightarrow} \delta_i$.

4. — Terminiamo con qualche osservazione nel caso che A_0 sia un corpo.

Tra i sopranelli di A_0 che verificano le ipotesi della proprietà *I* di cui al n. 1, vi può essere qualche volta un corpo, in dipendenza di speciali proprietà del corpo A_0 (esempio: $A_0 =$ corpo reale); è però necessario, perchè ciò avvenga, che A_0 abbia caratteristica zero, altrimenti la funzione esponenziale è banale.

Quest'ultima asserzione risulterà dal seguente

TEOREMA 3: *Se A_0 è un corpo di caratteristica p e C è un so-
pracorpo di A_0 per cui valgano le ipotesi della proprietà *I* del n. 1,
la funzione esponenziale τ di C è banale, cioè è $\tau(u) = 1$ per ogni
 $u \in C$.*

Indichiamo sempre con A il sopranello di A_0 costruito al n. 2. Ogni $u \in A$ può rappresentarsi nella forma $a_0 + a_1\sigma(u_1) + \dots + a_k\sigma(u_k)$ dove, se r è il minimo indice tale che $a \in A_r$, gli a_i e gli u_i appartengono ad A_{r-1} ; ne consegue, applicando più volte tale considerazione, che a può rappresentarsi nella forma

$$a = a_0 + a_1\sigma(u_1) + \dots + a_k\sigma(u_k)$$

dove ogni a_1 è in A_0 . Tenendo conto che $\sigma(u) = \sigma(pu) = \sigma(0) = 1$, ne discende: $a^p = a_0^p + a_1^p + \dots + a_k^p \in A_0$.

Quindi: a è invertibile in A oppure $a_k^p = 0$ (A_0 essendo un corpo); ne segue che A ha un solo ideale massimale $\mathfrak{J}$: quello costituito dagli elementi a tali che sia $a^p = 0$.

Si consideri l'omomorfismo δ di A su C definito nel n. 3 (si ricordi che se $\delta(a) = c$, si ha $\delta(\sigma(a)) = \tau(c)$); poichè C è un corpo, il nucleo di δ è un ideale massimale di A e coincide quindi con $\mathfrak{J}$.

Siano c_1 e c_2 due elementi qualunque di C e a_1 e a_2 due elementi di A tali che $\delta(a_1) = c_1$, $\delta(a_2) = c_2$; si ha

$$\delta(\sigma(a_2) - \sigma(a_1)) = \tau(c_2) - \tau(c_1).$$

Ma è

$$(\sigma(a_2) - \sigma(a_1))^p = \sigma(pa_2) - \sigma(pa_1) = 1 - 1 = 0,$$

onde $\sigma(a_2) - \sigma(a_1)$ appartiene a $\mathfrak{J}$; ne segue

$$\tau(c_2) - \tau(c_1) = 0,$$

che è quanto si voleva provare.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ZARISKI-SAMUEL: *Commutative Algebra*. Vol. I. (Van Nostrand, 1958).