

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

PAOLO BOERO

Categorie omologiche

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 35, n° 2 (1965), p. 267-298

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1965__35_2_267_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1965__35_2_267_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

CATEGORIE OMOLOGICHE

Memoria *) di PAOLO BOERO (a Genova) **)

Scopo del presente lavoro ¹⁾ è lo studio delle categorie « omologiche », cioè delle categorie con *O-oggetto* e *O-mappe*, nelle quali ogni mappa ammette rappresentazione alla Buchsbaum (V. [1]); le categorie omologiche possono essere anche considerate come generalizzazione delle categorie esatte definite da Buchsbaum [1], in quanto in esse si mantengono validi gli assiomi di Buchsbaum tranne quelli riguardanti la struttura additiva dell'insieme delle mappe di un oggetto in un altro. Le categorie omologiche compaiono, con il nome di categorie « quasi esatte », con Puppe [11]; il cambio di nome può essere giustificato in base alla considerazione, sviluppata nella parte I di questo lavoro, che le categorie omologiche sono la struttura algebrica più semplice nella quale possano essere introdotte nozioni di tipo omologico in modo da conservare valide molte delle proposizioni dell'algebra omologica in categorie abeliane.

*) Pervenuta in Redazione il 26 gennaio 1965.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico dell'Università, Via L. B. Alberti, Genova.

**) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca Matematica del C.N.R.

¹⁾ che sviluppa alcune considerazioni contenute nella tesi dell'A., Luglio 1964.

Nella parte terza, verrà data anche una motivazione « operativa » dell'introduzione della nozione di categoria omologica, utilizzandola per facilitare lo studio dei problemi omologici relativi all'oggetto differenziale filtrato (in una categoria abeliana o, più in generale, omologica).

Nella parte I, viene indicato come possano essere estesi alle categorie omologiche, con il metodo diagrammatico, essenzialmente tutti i risultati di carattere diagrammatico che Buchsbaum [1] dimostra sotto l'ipotesi che $Map(X, Y)$ sia gruppo abeliano per ogni coppia di oggetti X ed Y , e che la composizione delle mappe sia distributiva rispetto alla « somma » gruppale. Si affronta poi il problema di caratterizzare le categorie omologiche a partire dai fatti omologici elementari che restano validi per esse; si trova così che una categoria qualunque, con *O-oggetto* e *O-mappe*, acquista struttura omologica se è per essa possibile definire una teoria d'omologia (vale a dire, assegnare sequenze di oggetti di omologia per ogni complesso) in modo da conservare le proprietà di cui godono gli oggetti d'omologia in una categoria omologica.

Nella parte II, si sviluppa lo studio delle categorie omologiche dal punto di vista reticolare, cioè si introduce la nozione di reticolo dei sottoggetti di un oggetto e quindi si prova che ogni reticolo di sottoggetti è modulare; si pongono infine le premesse per lo studio delle categorie omologiche a reticoli distributivi finiti.

La parte III è dedicata allo studio delle categorie omologiche a reticoli finiti distributivi (FD-categorie); dopo aver indicato il metodo di utilizzazione di opportune FD-categorie per lo studio dell'oggetto differenziale filtrato, si prova come ogni FD-categoria possa considerarsi sottocategoria della categoria omologica i cui oggetti sono spazi topologici, e le cui mappe sono omeomorfismi tra un aperto del dominio ed un chiuso del codominio.

Gli oggetti delle categorie che considereremo costituiscono (salvo esplicite restrizioni) delle classi; indicheremo con e_x l'identità dell'oggetto X ; con $Map(X, Y)$ l'insieme delle mappe di « dominio » X e « codominio » Y .

PARTE I

I. — Definiamo *categoria con O-oggetto e O-mappe* una categoria $\mathcal{C}$ per la quale sono verificati i seguenti assiomi:

A_1 : per ogni coppia di oggetti R ed S , esiste in $\text{Map}(R, S)$ una mappa, che indicheremo con O , tale che $O f = O$ e $g O = O$ per ogni f di codominio R ed ogni g di dominio S .

A_2 : esiste in $\mathcal{C}$ un oggetto, che indicheremo con O , per cui $e_o = O$.

Sia $\mathcal{C}$ una categoria con *O-oggetto* e *O-mappe*; definiamo *E-sequenza* una sequenza di oggetti e mappe:

$$X \xrightarrow{a} Y \xrightarrow{b} Z$$

se essa è di ordine 2 ($ba = O$), ed inoltre: se $bj = O$ nel diagramma

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{a} & Y & \xrightarrow{b} & Z \\ & & \uparrow j & & \\ & & L & & \end{array}$$

allora esiste una ed una sola mappa j' in $\text{Map}(L, X)$ con $aj' = j$; e, se $ha = O$ nel diagramma:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{a} & Y & \xrightarrow{b} & Z \\ & & \downarrow h & & \\ & & N & & \end{array}$$

allora esiste una ed una sola mappa h' in $\text{Map}(Z, N)$ con $h'b = h$.

DEFINIZIONE 1: *categoria omologica* è una categoria $\mathcal{C}$ con *O-oggetto* e *O-mappe* che soddisfa il seguente assioma:

A_3 : presi comunque due oggetti R, S in $\mathcal{C}$, ed una mappa f in $\text{Map}(R, S)$, esiste una sequenza di oggetti e mappe:

$$(1) \quad K \xrightarrow{a} R \xrightarrow{b} I \xrightarrow{c} I' \xrightarrow{a'} S \xrightarrow{b'} K'$$

che gode delle seguenti proprietà:

$$a'cb = f,$$

c è l'equivalenza

$$K \longrightarrow R \longrightarrow I \quad E\text{-sequenza}$$

$$I' \longrightarrow S \longrightarrow K' \quad E\text{-sequenza}.$$

Data la definizione fondamentale 1, si possono senza eccessiva difficoltà verificare per le categorie omologiche tutte le più semplici proprietà delle categorie abeliane; in particolare, detta « *rappresentazione della mappa f* » la sequenza (1) di oggetti e mappe, due rappresentazioni di una stessa mappa differiranno per un sistema transitivo di equivalenze; inoltre, detto *monomorfismo* una mappa che abbia come primo oggetto di una sua rappresentazione lo O , i monomorfismi coincideranno con le mappe cancellabili a sinistra (ed analogamente, gli epimorfismi coincideranno con le mappe cancellabili a destra, gli isomorfismi con le equivalenze).

La verifica di tali proprietà si può effettuare con ragionamenti di tipo diagrammatico, cioè, sostanzialmente, utilizzando gli assiomi A_1 , A_2 ed A_3 e la definizione di E -sequenza.

È *plausibile* che con questa stessa tecnica possano essere estesi alle categorie omologiche risultati di carattere « diagrammatico » quali il « lemma dei 5 » od il « lemma 3×3 » validi per categorie abeliane; e questa estensione è *effettivamente possibile*: ci limiteremo a provare il risultato cruciale, dal quale discendono come conseguenza in modo piuttosto banale tutti gli altri risultati.

TEOREMA 1: *sia C categoria omologica; supponiamo che il diagramma:*

$$(2) \quad \begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{m} & B & \xrightarrow{n} & C \\ a \downarrow & & b \downarrow & & c \downarrow \\ A' & \xrightarrow{m'} & B' & \xrightarrow{n'} & C' \end{array}$$

sia commutativo, che le righe siano E -sequenze e che a e c siano isomorfismi. Allora b è isomorfismo.

Verifichiamo che b è monomorfismo: se K ed i sono rispettivamente il primo oggetto e la prima mappa di una rappresentazione di b , $bi = O$ onde $n'bi = O = cni$, ed allora $ni = O$ essendo c isomorfismo; ne viene che esiste una mappa d in $\text{Map}(K, A)$ con $i = md$, e d è pertanto monomorfismo; osservando poi che $O = bi = m'ad$, poichè $m'a$ è monomorfismo posso concludere che $d = O$, il che significa $K = O$.

Analogamente si prova che b è epimorfismo.

2. - Sia C categoria omologica, ed A oggetto di C ; sia $\delta = \{(A_i, f_i)\}$ famiglia delle coppie di oggetti A_i e monomorfismi $f_i: A_i \longrightarrow A$; in δ , diciamo (A_i, f_i) equivalente ad (A_j, f_j) se esiste una mappa di dominio A_i e codominio A_j compatibile con le immersioni f_i ed f_j , ed isomorfismo.

Si verifica facilmente che si tratta di una relazione di equivalenza in δ ; indicato con $|A_i, f_i|$ la classe delle coppie equivalenti ad (A_i, f_i) , diremo che $|A_i, f_i|$ è un sottoggetto dell'oggetto A .

Per tutti gli esempi rilevanti di categoria omologica è soddisfatta la condizione (V. Mc Lane, [8]) che la classe dei sottoggetti di un oggetto è un insieme; e d'ora in poi noi ammetteremo verificata tale condizione per tutte le categorie che considereremo.

La definizione data di sottoggetto di un oggetto permette di introdurre in modo naturale il concetto di uguaglianza di due sottoggetti di un oggetto; permette altresì di definire nucleo ed immagine di una mappa: precisamente, per definire il nucleo basterà considerare la classe di equivalenza della prima coppia oggetto-monomorfismo che compare in una rappresentazione della mappa data; per definire l'immagine, basta considerare la quarta coppia.

Per il conucleo e la coimmagine, occorrerà poi ricorrere alla nozione duale di quella di sottoggetto, il che non presenta difficoltà. Operando con diagrammi, di solito è molto comodo usare la scrittura « $\text{Ker } f$ » per indicare sia il nucleo di f (come classe di equivalenza, nel testo) sia l'oggetto di una coppia rappresentatrice di tale classe (« punto » del diagramma; la freccia indicherà

il relativo monomorfismo di « immersione »); una convenzione analoga potrà essere fatta, più in generale, anche per un generico sottoggetto di un oggetto. Naturalmente, di volta in volta il contesto dovrà consentire di riconoscere in modo non ambiguo se si tratti di un singolo oggetto o di una classe di equivalenza di una coppia.

3. - In categorie omologiche, non presenta difficoltà la definizione dei complessi, delle sequenze esatte, degli oggetti di omologia di un complesso; di più: utilizzando lo stesso metodo usato da Heller [7] di carattere essenzialmente diagrammatico, si possono provare i seguenti risultati, che costituiscono l'estensione alle categorie omologiche di noti risultati validi per le categorie abeliane.

TEOREMA 2: *sia dato, in $\mathcal{C}$ categoria omologica, il diagramma:*

$$(3) \quad \begin{array}{ccccccc} & & O & & O & & O \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & X' & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X'' \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' \longrightarrow O \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ O & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & Y' & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Y'' \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & O & & O & & O \end{array}$$

commutativo, a colonne esatte, con le due righe centrali esatte. Allora esiste una mappa (« connettivo ») δ in $\text{Map}(X'', Y')$ che rende esatta la sequenza:

$$(4) \quad X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \xrightarrow{\delta} Y' \longrightarrow Y \longrightarrow Y''.$$

Inoltre, una traslazione di (3) in un diagramma analogo induce una traslazione della (4) nella sequenza corrispondente (naturalità del connettivo).

TEOREMA 3: *in una categoria omologica $\mathcal{C}$, sia data una sequenza esatta di complessi:*

$$(5) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{D}_1 \longrightarrow \mathcal{D}_2 \longrightarrow \mathcal{D}_3 \longrightarrow 0$$

allora, per ogni p intero esiste una mappa $\mathcal{D}^{p-1}: H^{p-1}(\mathcal{D}_3) \longrightarrow H^p(\mathcal{D}_1)$ che rende esatta la sequenza d'omologia:

$$(6) \quad \begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H^{p-1}(\mathcal{D}_1) & \longrightarrow & H^{p-1}(\mathcal{D}_2) & \longrightarrow & H^{p-1}(\mathcal{D}_3) \longrightarrow \\ & & \mathcal{D}^{p-1} \longrightarrow & & H^p(\mathcal{D}_1) & \longrightarrow & H^p(\mathcal{D}_2) \longrightarrow & H^p(\mathcal{D}_3) \longrightarrow \dots \end{array}$$

associata alla sequenza esatta di complessi (5), ed una traslazione di (5) induce una traslazione della sequenza d'omologia associata.

4. — Data una categoria con O -oggetto e O -mappe, ci si può chiedere sotto quali ipotesi ulteriori sia possibile associare ad ogni sequenza illimitata d'ordine 2 (complesso) una sequenza di « oggetti d'omologia » in modo da conservare le proprietà diagrammatiche fondamentali valide nelle categorie abeliane.

I risultati precedentemente enunciati indicano come, per formulare una « teoria d'omologia » che conservi i principali risultati diagrammatici validi per le categorie abeliane, siano sufficienti le sole condizioni espresse dagli assiomi di categorie omologica; dimostreremo ora che tali condizioni non possono essere ulteriormente attenuate: *supporre assegnata in una categoria con O -oggetto e O -mappe una « teoria d'omologia » equivale a supporre che la categoria data sia omologica.*

Sia $\mathcal{C}$ categoria con O e O -mappe; considerando come oggetti i complessi di $\mathcal{C}$ e come mappe le traslazioni tra complessi, si ottiene una categoria con O e O -mappe (rispettivamente, il complesso con oggetti tutti nulli, e le traslazioni nulle), che indicheremo con $\mathcal{C}_c$. Dato un funtore H di $\mathcal{C}_c$ in $\mathcal{C}_c$, diremo che un complesso di $\mathcal{C}$ è H -triviale se viene trasformato da H nel complesso nullo; indicheremo poi con $H^p(\pi)$ l'oggetto p -mo del trasformato mediante H di un complesso π (omettendo l'indicazione del complesso solo se il testo precisa su quale complesso H operi).

DEFINIZIONE 2: sia $\mathcal{C}$ categoria con O -oggetto e O -mappe; diremo teoria d'omologia in $\mathcal{C}$ un funtore covariante $H: \mathcal{C}_c \longrightarrow \mathcal{C}^o$ soggetto alle seguenti condizioni:

α_1 : H trasforma complessi in complessi a mappe nulle.

α_2 : i complessi:

$$\longrightarrow A^{p-2} \xrightarrow{d^{p-2}} A^{p-1} \xrightarrow{d^{p-1}} A^p \xrightarrow{d^p} A^{p+1} \xrightarrow{d^{p+1}} A^{p+2} \longrightarrow$$

e:

$$\longrightarrow O \longrightarrow A^{p-1} \xrightarrow{d^{p-1}} A^p \xrightarrow{d^p} A^{p+1} \longrightarrow O \longrightarrow$$

vengono trasformati da H in complessi aventi lo stesso oggetto nel posto p (il p -mo oggetto d'omologia dipende solo dagli oggetti e dalle mappe immediatamente precedenti ed immediatamente successive).

α_3 : ad ogni complesso « elementare »:

$$O \longrightarrow A^1 \xrightarrow{f} A^2 \longrightarrow O$$

è associato un complesso H -triviale:

$$(8) \quad O \longrightarrow H^1 \xrightarrow{i} A^1 \xrightarrow{f} A^2 \xrightarrow{p} H^2 \longrightarrow O,$$

ed una traslazione di (7) induce una traslazione del complesso associato; inoltre,

la mappa i è cancellabile a sinistra

la mappa p è cancellabile a destra

e, se $f = O$,

$$H^1 = A^1 \quad i = e_{A^1}$$

$$H^2 = A^2 \quad p = e_{A^2}$$

α_4 : dato il diagramma commutativo a colonne H -triviali con le

due righe centrali H -triviali:

$$(9) \quad \begin{array}{ccccccc} & & O & & O & & O \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & A^0 & \longrightarrow & B^0 & \longrightarrow & C^0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow j \\ O & \longrightarrow & A^1 & \longrightarrow & B^1 & \xrightarrow{\pi} & C^1 \longrightarrow O \\ & & \downarrow & & \downarrow \sigma & & \downarrow \\ O & \longrightarrow & A^2 & \xrightarrow{i} & B^2 & \longrightarrow & C^2 \longrightarrow O \\ & & \downarrow \mu & & \downarrow & & \downarrow \\ & & A^3 & \longrightarrow & B^3 & \longrightarrow & C^3 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & O & & O & & O \end{array}$$

esiste una mappa δ in $\text{Map}(C^0, A^3)$ che rende H -triviale la sequenza:

$$(10) \quad A^0 \longrightarrow B^0 \longrightarrow C^0 \xrightarrow{\delta} A^3 \longrightarrow B^3 \longrightarrow C^3.$$

Inoltre, se j e μ sono equivalenze in (9), $\delta = i\mu^{-1}\delta j^{-1}\pi$.

Le condizioni espresse mediante $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ sono la traduzione in termini diagrammatici per una categoria con O e O -mappe di proprietà elementari di algebra in categorie abeliane, o, più in generale, omologiche. Ovviamente, non sempre è possibile, data una categoria con O e O -mappe, assegnare in essa una teoria d'omologia; proveremo anzi che assegnare in una categoria con O e O -mappe una teoria d'omologia equivale ad attribuire ad essa struttura di categoria omologica.

TEOREMA 4: *sia $\mathcal{C}$ categoria con O -oggetto e O -mappe; una teoria d'omologia definita in $\mathcal{C}$ attribuisce a $\mathcal{C}$ struttura di categoria omologica.*

Basta verificare l'assioma A_3 : a tale scopo consideriamo una mappa $f: A^1 \longrightarrow A^2$; per α_3 , otteniamo una sequenza H -triviale:

$$O \longrightarrow H^1 \xrightarrow{i} A^1 \xrightarrow{f} A^2 \xrightarrow{p} H^2 \longrightarrow O$$

ove i è cancellabile a sinistra p a destra. Ancora per α_3 , otteniamo due altri complessi H -triviali:

$$(11) \quad O \longrightarrow O \longrightarrow H^1 \xrightarrow{i} A^1 \xrightarrow{m} H_1^1 \longrightarrow O$$

$$(12) \quad 0 \longrightarrow H_1^2 \xrightarrow{n} A^2 \xrightarrow{p} H^2 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

proviamo ora che (11) è una *E-sequenza*:
nel diagramma:

$$\begin{array}{ccccc} H^1 & \xrightarrow{i} & A^1 & \xrightarrow{m} & H_1^1 \\ & & \uparrow d & & \\ & & D & & \end{array}$$

sia $md = 0$; il diagramma a righe H -triviali e commutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & D & \xrightarrow{e_D} & D \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow d & & \downarrow o \\ 0 & \longrightarrow & H^1 & \xrightarrow{i} & A^1 & \xrightarrow{m} & H_1^1 \longrightarrow 0 \end{array}$$

può, per α_3 , estendersi ad un diagramma commutativo a colonne H triviali con le due righe centrali H -triviali:

$$\begin{array}{ccccccc} & & O & & O & & O \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & O & \longrightarrow & K & \longrightarrow & D \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow e_D \\ 0 & \longrightarrow & O & \longrightarrow & D & \xrightarrow{e_D} & D \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow o \\ 0 & \longrightarrow & H^1 & \xrightarrow{i} & A^1 & \xrightarrow{m} & H_1^1 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow e_{H^1} & & \downarrow & & \downarrow e_{H_1^1} \\ & & H^1 & \longrightarrow & C & \longrightarrow & H_1^1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & O & & O & & O \end{array}$$

l'assioma α_4 fornisce una mappa $\vartheta: D \longrightarrow H^1$ con $i\vartheta = d$, e ϑ è l'unica mappa che gode di tale proprietà per la cancellabilità a sinistra di i .

Analogamente si dimostra che, se $di = 0$ nel diagramma:

$$\begin{array}{ccccc} H^1 & \xrightarrow{i} & A^1 & \xrightarrow{m} & H_1^1 \\ & & \downarrow d & & \\ & & D & & \end{array}$$

esiste ed è unica una mappa $\mu: H_1^1 \longrightarrow D$ con $\mu m = d$.

In modo simile si prova poi che la (12) è una E -sequenza.

Consideriamo ora il diagramma commutativo, con le righe H -triviali:

$$\begin{array}{ccccccccc} O & \longrightarrow & H^1 & \xrightarrow{i} & A^1 & \xrightarrow{m} & H_1^1 & \longrightarrow & O \\ & & \downarrow o & & \downarrow f & & \downarrow o & & \\ O & \longrightarrow & H_1^2 & \xrightarrow{n} & A^2 & \xrightarrow{p} & H^2 & \longrightarrow & O \end{array}$$

esso si può estendere ad un diagramma:

$$(13) \quad \begin{array}{ccccccc} & O & & O & & O & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & H^1 & \longrightarrow & H^1 & \xrightarrow{h} & H_1^1 & \\ e_{H^1} \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow & e_{H_1^1} \\ O \longrightarrow & H^1 & \xrightarrow{i} & A^1 & \xrightarrow{m} & H_1^1 & \longrightarrow O \\ & \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow & \\ O \longrightarrow & H_1^2 & \xrightarrow{n} & A^2 & \xrightarrow{p} & H^2 & \longrightarrow O \\ e_{H_1^2} \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow & e_{H^2} \\ & H_1^2 & \xrightarrow{k} & H^2 & \longrightarrow & H^2 & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & O & & O & & O & \end{array}$$

commutativo, con colonne H -triviali e le due righe centrali H -triviali; se δ è il connettivo associato al diagramma (13), ho che $n\delta m = f$; resta da provare che δ è equivalenza; per questo, osserviamo che nel diagramma: (13) $h = 0$ e $k = 0$,

quindi, è H -triviale la sequenza:

$$H^1 \longrightarrow H^1 \xrightarrow{o} H_1^1 \longrightarrow H_1^2 \xrightarrow{o} H^2 \longrightarrow H^2$$

e da ciò si deduce facilmente, utilizzando α_3 ed α_4 al solito modo, che δ è equivalenza.

Il risultato ora provato non risolve il problema di stabilire se (a meno di equivalenze) due teorie d'omologia assegnate su una stessa categoria con O -oggetto e O -mappe coincidono; con considerazioni piuttosto semplici si può solo concludere che le E -sequenze coincidono con le sequenze H -triviali di 5 termini, comunque sia assegnata H ; e che ogni teoria d'omologia coincide (a meno di equivalenze) con la teoria d'omologia avente come oggetti d'omologia i « quozienti » $\text{Ker } d^{p+1}/\text{Im } d^p$ sui complessi elementari costituiti da singole mappe. Le condizioni $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ non sembrano a prima vista sufficienti a stabilire il risultato di unicità nel caso di complessi qualunque; peraltro, ammettendo che due teorie d'omologia su una stessa categoria verifichino entrambe anche la proprietà espressa mediante il teorema 3, è pressochè immediato provare che esse « essenzialmente » coincidono.

Heller [7] considera categorie additive nelle quali una certa famiglia di mappe — dette « mappe proprie » — ammette « rappresentazione » per ogni mappa, e sviluppa per tali categorie un'algebra omologica che, relativamente alle mappe proprie, conserva le proprietà più significative dell'algebra omologica in categorie abeliane.

Non è difficile generalizzare la trattazione di Heller a categorie con O e O -mappe: basta definire alla maniera di Heller una « famiglia di mappe proprie » e considerare una « teoria d'omologia locale » relativa a tali mappe proprie.

PARTE II

5. — Sia $\mathcal{C}$ categoria omologica; se A è oggetto di $\mathcal{C}$, indichiamo con $\delta(A)$ la famiglia $\{(A_i, f_i)\}$ delle coppie di oggetti e monomorfismi di codominio A , con $L(A)$ l'insieme dei sottoggetti di A , con $\delta^*(A)$, $L^*(A)$ rispettivamente i duali di $\delta(A)$ e di $L(A)$: $\delta^*(A)$ è costituito dalle coppie (A^i, f^i) con f^i epimorfismo di dominio A e codominio A^i , $L^*(A)$ è l'insieme delle classi di equivalenza individuate in $\delta(A)$ dalla relazione:

$$(A^i, f^i) \sim (A^j, f^j)$$

se esiste un isomorfismo tra A^i ed A^j compatibile con le « proiezioni ».

In $\delta(A)$, poniamo $(A_i, f_i) \leq (A_j, f_j)$ se esiste una mappa d in $\text{Map}(A_i, A_j)$ tale che $f_j d = f_i$. È facile verificare che, se tale mappa esiste, essa è unica, ed è monomorfismo. Si ottiene un preordine in $\delta(A)$; l'ordine parziale associato a tale preordine consente di ordinare parzialmente $L(A)$; in effetti, la relazione di equivalenza « generatrice » dell'ordine associato al preordine sopra considerato coincide con la relazione di equivalenza che definisce $L(A)$. Indicheremo ancora con $\leq$ l'ordine parziale ottenuto in $L(A)$.

Dualmente, possiamo porre, in $\delta^*(A)$, $(A^i, f^i) \leq (A^j, f^j)$ se esiste in $\text{Map}(A^j, A^i)$ una mappa d con $d f^j = f^i$. Si ottiene un preordine in $\delta^*(A)$, che consente di ordinare parzialmente $L^*(A)$; sia $\leq$ l'ordine parziale di $L^*(A)$ così ottenuto.

Fissato un oggetto A in $\mathcal{C}$, se $|A_i, f_i|$ è un sottoggetto di A « rappresentato » dalla coppia (A_i, f_i) , e la coppia (A^i, f^i) è tale che

$$A_i \xrightarrow{f_i} A \xrightarrow{f^i} A^i$$

è E -sequenza, poniamo $\mu(|A_i, f_i|) = |A^i, f^i|$. Si può dimostrare che la corrispondenza μ non dipende dalle coppie rappresentatrici scelte per i sottoggetti, e che μ è un antiisomorfismo tra $L(A)$ ed $L^*(A)$. La prima parte dell'enunciato segue dalla definizione delle classi di equivalenza costituenti i sottoggetti; operando sul diagramma:

$$\begin{array}{ccccc} A_i & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A^i \\ \downarrow & & & & \downarrow e_A \\ A_k & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A^k \end{array}$$

si prova poi che μ inverte l'ordine tra gli insiemi parzialmente ordinati $L(A)$ ed $L^*(A)$; infine, per dimostrare che μ è 1 - 1 basta considerare, nell'ipotesi che $|A^i, f^i| = |A^j, f^j|$, il diagramma:

$$\begin{array}{ccccc} A_i & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A^i \\ & & \downarrow e_A & \searrow d \downarrow \uparrow d^{-1} & \\ A_j & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A^j \end{array}$$

che porge un isomorfismo tra A_i ed A_j compatibile con le immersioni.

Fissato A oggetto in $\mathcal{C}$, se $|A_i, f_i|$ ed $|A_k, f_k|$ sono sottoggetti di A , consideriamo il diagramma:

$$A_i \xrightarrow{f_i} A \xrightarrow{f_k} A^k$$

Indichiamo con $A_i \bigcap A_k = \text{Ker}(A_i \longrightarrow A^k) = \text{Ker } f^k f_i$; otteniamo un sottoggetto di A , per il quale possiamo verificare agevolmente le proprietà che definiscono, in un insieme parzialmente ordinato, l'intersezione reticolare di due elementi.

È opportuno osservare come la scrittura $A_i \bigcap A_k$ sottintenda le mappe di immersione; conveniamo inoltre che $A_i \bigcap A_k$ possa, in situazioni non ambigue (es. diagrammi), indicare l'oggetto di una coppia rappresentatrice della classe $A_i \bigcap A_k$ (coerentemente con l'analoga convenzione fatta per i sottoggetti in generale).

In $L^*(A)$, si può procedere dualmente, definendo $A^i \bigcap A^k = \text{Coker}(A_i \longrightarrow A^k)$. In $L(A)$ possiamo allora porre $A_i \bigcup A_k = \text{Ker}(A \longrightarrow A^i \bigcap A^k)$; una volta verificato che $A^i \bigcap A^k$ gode delle proprietà dell'intersezione reticolare nell'insieme parzialmente ordinato $L^*(A)$, sfruttando l'antiisomorfismo μ precedentemente stabilito è facile concludere che il sottoggetto $A_i \bigcup A_k$ di A gode delle proprietà che definiscono, in un insieme parzialmente ordinato, l'unione reticolare di due elementi.

In definitiva, fissato un oggetto A in una categoria omologica $\mathcal{C}$, l'insieme parzialmente ordinato $L(A)$ dei sottoggetti di A è un

reticolo, con $A_i \cap A_k = \text{Ker} (A_i \longrightarrow A^k)$ ed $A_i \cup A_k = \text{Ker} (A \longrightarrow A^i \cap A^k)$. In modo duale si può concludere per $L^*(A)$.

Applicando il lemma 3×3 , è possibile verificare, per le categorie omologiche, i *teoremi di isomorfismo di Noether*, con gli enunciati opportunamente adattati: si tratta di costruire un opportuno diagramma 3×3 e provare, con l'ausilio del lemma 3×3 , che certe mappe sono isomorfismi.

Ci sarà utile più volte in seguito un lemma concernente il reticolo dei sottoggetti di un oggetto, che a sua volta sia dominio di un monomorfismo; precisamente:

LEMMA: se A e B sono oggetti di una categoria $\mathcal{C}$, ed f è un monomorfismo di $\text{Map}(A, B)$, allora una famiglia $\{|A_i, f_i|\}$ di sottoggetti di A è un sottoreticolo di $L(A)$ se e solo se $\{|A_i, ff_i|\}$ è sottoreticolo di $L(B)$.

La dimostrazione del lemma è molto semplice, in quanto unione ed intersezione relativamente ad A sono associate mediante l'immersione f ad unione ed intersezione relativamente a B (monomorfismo reticolare di $L(A)$ in $L(B)$).

6. — Possiamo ora stabilire il risultato fondamentale di questa seconda parte, cioè la modularità del reticolo dei sottoggetti di un oggetto qualsiasi in una categoria omologica; proprietà che enunceremo brevemente asserendo che « ogni categoria omologica è modulare ».

TEOREMA 5: se A è oggetto di una categoria omologica $\mathcal{C}$, $L(A)$ è modulare.

In base al lemma precedente, basta dimostrare che, se $|A_i, i|$; $|A_j, j|$; $|A_k, k|$; $|A_l, l|$ sono sottoggetti di A , con $|A_i, i| \leq |A_j, j|$, da $A_i \cup A_l = A_j \cup A_l = A$ e $A_i \cap A_l = A_j \cap A_l = |A_k, k|$ segue $|A_i, i| = |A_j, j|$; infatti ciò implica che, dato un qualunque oggetto, ogni sottoreticolo del reticolo dei suoi sottoggetti è modulare, e quindi il teorema.

Cominciamo con l'osservare che $A = A_i \cup A_l = A_j \cup A_l$ può scriversi anche:

$$(14) \quad A = \text{Ker} (A \longrightarrow \text{Coker} (A_i \longrightarrow A^i)) = \\ = \text{Ker} (A \longrightarrow \text{Coker} (A_j \longrightarrow A^j));$$

peraltro, le mappe:

$$A \longrightarrow \text{Coker } \dots$$

che compaiono nella (14) sono epimorfismi, e da ciò deduco:

$$(15) \quad O = \text{Coker } (A_i \longrightarrow A^i) = \text{Coker } (A_j \longrightarrow A^i).$$

Per ipotesi, poi, $A_i \bigcap A_l = A_j \bigcap A_l$; otteniamo così il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} A_i \bigcap A_l & \longrightarrow & A_i & \longrightarrow & \text{Im } (A_i \longrightarrow A^i) & \xrightarrow{\mu_i} & A^i \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow e_{A^i} \\ A_j \bigcap A_l & \longrightarrow & A_j & \longrightarrow & \text{Im } (A_j \longrightarrow A^i) & \xrightarrow{\mu_j} & A^i \end{array}$$

In esso, la prima mappa verticale è isomorfismo, la terza è identità, mentre μ_j e μ_i sono isomorfismi; applicando il teorema 1, possiamo concludere che d è isomorfismo.

7. — Date due catene finite, il teorema di Birkoff (v. [0] pag. 71) assicura che il reticolo modulare libero da esse generato è distributivo e finito; di più, la dimostrazione di Birkoff fornisce un modello assai comodo di tale reticolo, come reticolo dei chiusi di un opportuno spazio topologico. Precisamente: se

$$(16) \quad \begin{aligned} O &= X_0 < X_1 < \dots < H_{m-1} < X_m = I \\ O &= Y_0 < Y_1 < \dots < Y_{n-1} < Y_n = I \end{aligned}$$

sono le due catene finite date, consideriamo l'insieme δ delle coppie di interi (p, q) con $O < p \leq m$, $O < q \leq n$; ordiniamo parzialmente δ ponendo $(p, q) \leq (p', q')$ se $p \leq p'$ e $q \leq q'$; diciamo chiuso un sottoinsieme π di δ se esso gode della seguente proprietà:

$$(p', q') \leq (p, q) \quad \text{e} \quad (p, q) \in \pi \quad \text{implicano} \quad (p', q') \in \pi.$$

È semplice verificare che $\emptyset$ e δ sono chiusi, che l'unione e l'intersezione di chiusi è un chiuso.

Ebbene: il reticolo modulare libero generato dalle due ca-

tene (16) è isomorfo al reticolo dei chiusi dello spazio topologico δ .

Ricordiamo che: una *rappresentazione di reticolo modulare libero generato da un insieme parzialmente ordinato* $(P, \leq)$ è una coppia (i, L) con L reticolo modulare, ed i mappa monotona di P in L , tale che ogni diagramma:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{i} & L \\ i' \downarrow & & \\ L' & & \end{array}$$

con L' reticolo modulare, ed i' monotona si può completare in uno e in un sol modo con un omomorfismo reticolare $j: L \longrightarrow L'$ che lo rende commutativo; dal teorema di Birkoff segue subito questo corollario:

COROLLARIO: se $\mathcal{C}$ è una categoria omologica, ed A è un oggetto di $\mathcal{C}$, il sottoreticolo di $L(A)$ generato da due catene finite di sottoggetti aventi entrambe come primo elemento O , ed ultimo A , è finito e distributivo.

Per provare questo risultato, basta osservare che $L(A)$ è modulare e che l'omomorfismo « estrusivo » che completa il diagramma prima considerato, ha, nel nostro caso, come immagine (distributiva e finita) proprio il sottoreticolo di $L(A)$ generato dalle due catene.

PARTE III

8. — Chiameremo brevemente *D*-categorie le categorie omologiche in cui i reticoli dei sottoggetti di tutti gli oggetti sono distributivi; *FD*-categorie le *D*-categorie in cui i reticoli dei sottoggetti di tutti gli oggetti, oltre che distributivi, sono anche finiti. Ricordiamo che, se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ sono categorie, e $\mathcal{C}'$ è sottocategoria di $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ si dice *sottocategoria piena* se, per ogni coppia di oggetti A, B di $\mathcal{C}'$, $\text{Map}_{\mathcal{C}'}(A, B) = \text{Map}_{\mathcal{C}}(A, B)$; *sottocategoria invariante*, se contiene tutti gli oggetti equivalenti in $\mathcal{C}$ ad oggetti di $\mathcal{C}'$, e tutte le equivalenze di $\mathcal{C}$ tra oggetti di $\mathcal{C}'$.

Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ sono categorie omologiche, un funtore covariante

$$T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$$

si dirà *esatto* se trasforma sequenze esatte in sequenze esatte; *fedele* se $T(f) = T(f')$ implica $f = f'$ (f ed f' mappe di $\mathcal{C}$); *rappresentativo* se è fedele ed esatto.

Consideriamo ad esempio la categoria $\mathfrak{J}$ avente per *oggetti* gli *insiemi* e per *mappe* le *corrispondenze* 1-1 tra *parti degli insiemi*; e la categoria $\mathfrak{T}$ avente per *oggetti* gli *spazi topologici* e per *mappe* tra due spazi gli *omeomorfismi tra un aperto del primo spazio ed un chiuso del secondo*. Le categorie $\mathfrak{J}$ e $\mathfrak{T}$ sono mutualmente correlate da due funtori covarianti; precisamente

$$\mathcal{F} : \mathfrak{T} \longrightarrow \mathfrak{J}$$

che trasforma spazi topologici nei corrispondenti insiemi senza struttura topologica, ed omeomorfismi in corrispondenze 1 — 1 tra parti di insiemi; ed

$$\mathcal{L} : \mathfrak{J} \longrightarrow \mathfrak{T}$$

che trasforma insiemi in spazi topologici con topologia discreta, e corrispondenze 1 — 1 tra parti in omeomorfismi.

$\mathcal{F}$ ed $\mathcal{L}$ sono entrambi funtori rappresentativi; $\mathcal{L}(\mathfrak{J})$ è sottocategoria invariante di $\mathfrak{T}$, mentre $\mathcal{F}(\mathfrak{T})$ non è sottocategoria invariante di $\mathfrak{J}$, poichè ci sono corrispondenze 1 — 1 tra parti di spazi topologici che non sono omeomorfismi.

Le categorie $\mathfrak{J}$ e $\mathfrak{T}$ ora introdotte rappresentano due significativi esempi di categorie omologiche distributive; il risultato che proveremo alla fine di questa parte metterà in luce come le sottocategorie di $\mathfrak{T}$ a reticoli di sottoggetti finiti esauriscano tutti i possibili casi di FD-categorie.

9. — La « caratterizzazione omologica » delle categorie omologiche come terreno « caratteristico » per lo sviluppo di un'algebra omologica che conservi valide le proprietà salienti vere nelle categorie abeliane (V. parte I) consente di dare una prima

giustificazione dello studio delle categorie omologiche; peraltro una simile giustificazione sarebbe ancora insufficiente a motivare tale studio, ove mancasse la possibilità di utilizzare *operativamente* la nozione di categoria omologica. Svilupperemo ora un esempio significativo di utilizzazione della nozione di categoria omologica.

Consideriamo, nel piano cartesiano, la rete delle rette parallele agli assi ed aventi intersezione intera con essi. Diremo *ambiente* una parte del piano costituita dall'unione (finita od infinita) di rettangoli con lati sulle rette della rete, aventi alternativamente in comune l'angolo destro basso e sinistro alto, e tali che, dati tre rettangoli successivi, l'intersezione del primo con il terzo sia vuota. Fissato un ambiente, sia esso δ , diremo *regione di δ* ogni unione di quadrati unitari di δ .

Tra i quadrati unitari di δ può essere introdotta una relazione di ordine parziale: basta indicare con (p, q) il quadrato di vertice alto destro (p, q) , e porre $(p, q) \leq (p', q')$ se $p \leq p'$ e $q \leq q'$. Una regione μ di δ si dirà chiuso di δ se gode della proprietà:

$$(p, q) \in \mu, \quad \text{e} \quad (p', q') \leq (p, q) \quad \text{implicano} \quad (p', q') \in \mu.$$

Detta L la famiglia dei chiusi di δ , è banale verificare che (δ, L) è uno spazio topologico.

Consideriamo ora la famiglia $\mathfrak{D}$ di «oggetti» e «mappe» così definite: *oggetto di $\mathfrak{D}$* è l'intersezione di un aperto con un chiuso di (δ, L) , e, dati due oggetti X, Y , *Map* (X, Y) è l'insieme costituito dall'omeomorfismo tra i sottoinsiemi vuoti di X ed Y (omeomorfismo «nullo»), e dall'eventuale omeomorfismo tra aperto di X e chiuso di Y ottenuto per sovrapposizione nel caso che $X \cap Y$ sia aperto rispetto ad X e chiuso rispetto ad Y . In modo naturale, $\mathfrak{D}$ si può considerare come sottocategoria di $\mathfrak{T}$, categoria degli spazi topologici e degli omeomorfismi aperto-chiuso; di più, per ogni mappa di $\mathfrak{D}$, esiste in $\mathfrak{T}$ una rappresentazione mediante mappe ed oggetti di $\mathfrak{D}$, come è facile verificare, e quindi $\mathfrak{D}$ è categoria omologica (in particolare, le sequenze di oggetti e mappe di $\mathfrak{D}$ che sono E -sequenze in $\mathfrak{T}$ sono E -sequenze anche in $\mathfrak{D}$). Ogni oggetto di $\mathfrak{D}$ ammette in genere più rappresen-

tazioni mediante unioni, intersezioni, quozienti di aperti e chiusi. Indicando con $\bar{X}$ l'intersezione dei chiusi di δ contenenti l'oggetto X ; con X^* l'intersezione degli aperti contenenti X , X si può rappresentare come $\bar{X} \cap X^*$; ovvero, utilizzando soltanto chiusi, come $\bar{X} / \bar{X} \cap \mathbb{C}(X^*)$, ove $\mathbb{C}(X^*)$ indica il complementare in δ di X^* (con ovvio significato del simbolo di quoziente). Nel seguito useremo questa seconda rappresentazione. Sia $\mathcal{C}$ categoria omologica, f mappa di $\text{Map}(X, Y)$. Dato un sottoggetto $|B, j|$ di Y , si può dimostrare facilmente che esiste un sottoggetto $|A, i|$ di X , che diremo controimmagine di $|B, j|$, tale che fi ha come immagine $|B, j| \cap \text{Im } f$.

Infatti, basta provare la proposizione nel caso che f sia epimorfismo; ed il diagramma commutativo con colonne E-sequenze:

$$\begin{array}{ccc}
 Y/B & \xrightarrow{e_{Y/B}} & Y/B \\
 i'f \uparrow & & \uparrow j' \\
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 i \uparrow & & \uparrow j \\
 \text{Ker } j'f & & B
 \end{array}$$

fornisce subito una mappa π dell'oggetto $\text{Ker } j'f$ in B , epimorfismo per il lemma dei 5; verificato che $|B, j|$ è immagine di $j\pi$, si può concludere che $| \text{Ker } j'f, i|$ è controimmagine di $|B, j|$.

Fatta questa premessa, non presenta difficoltà estendere al caso delle categorie omologiche la nozione di « oggetto differenziale filtrato »: seguendo Zeeman [12] per quanto riguarda le notazioni, possiamo dare la seguente definizione:

DEFINIZIONE 3: Sia $\mathcal{C}$ categoria omologica, A oggetto di $\mathcal{C}$. Dicesi oggetto differenziale filtrato il sistema: $\{A, d, |A_p, i_p|\}_{p \in \mathbb{N}}$ ove:

$$dd = 0$$

$$A_p = 0 \quad \text{per} \quad p \leq 0; \quad A_p = A \quad \text{per} \quad p \geq m;$$

ed inoltre:

$$|A_{p-1}, i_{p-1}| \leq |A_p, i_p|$$

con inclusione propria per $0 < p \leq m$

$$Im\, di_p \leq |A_p, i_p| ;$$

m dicesi lunghezza dell'oggetto differenziale filtrato.

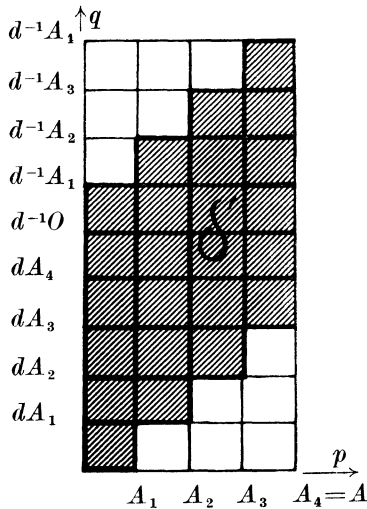
Indichiamo con A_p il sottoggetto $|A_p, i_p|$, con dA_p il sottoggetto $Im\, di_p$, con $d^{-1}A_p$ la controimmagine di A_p .

Le catene di sottoggetti:

$$(17) \quad \begin{aligned} O &= A_0 < A_1 < A_2 < \dots < A_{m-1} < A_m = A \\ O &= dA_0 < dA_1 < \dots < dA < d^{-1}O < \dots < d^{-1}A = A \end{aligned}$$

sono due catene finite, di lunghezza rispettivamente m e $2m + 1$.

Consideriamo ora un ambiente δ costituito da un solo rettangolo di altezza $2m + 1$ e base m (m essendo la lunghezza dell'oggetto differenziale filtrato dato). Sottraiamo al rettangolo i quadrati (p, q) con $p > 1$, $q \leq p - 1$ ed i quadrati (p, q) con $p < m$, $q \geq p + m + 2$. In figura, è rappresentato il caso $m = 4$.



Diciamo δ' la regione così ottenuta, e consideriamo la topologia L' indotta su δ' dalla topologia L di δ ; allo spazio topologico (δ', L') può associarsi (in modo perfettamente analogo a quello

visto a proposito della costruzione di $\mathfrak{D}$ a partire da (δ, L) , una categoria $\mathfrak{D}'$, sottocategoria omologica di $\mathfrak{E}$.

Indicata con (i, L) una rappresentazione del reticolo modulare libero generato dalle due catene (17), e con μ l'immersione delle catene (17) in $L(A)$, esiste, per definizione, un omomorfismo reticolare j di L in $L(A)$ tale che $ji = \mu$.

Sia (i, L) la rappresentazione del reticolo modulare generato dalle catene (17) come reticolo dei chiusi di (δ, L) ; considerando il reticolo L' dei chiusi di (δ', L') , possiamo realizzare un omomorfismo reticolare α di L' in L ponendo $\alpha(C) = C$, cioè facendo corrispondere al chiuso C di L' l'intersezione dei chiusi di L contenenti C . $j\alpha$ è un omomorfismo reticolare di L' in $L(A)$; di più: è facile verificare che, detta μ' la mappa isotona delle catene (17) in L' ottenuta facendo corrispondere la regione di δ' limitata superiormente da $y = k$, al sottooggetto: dA_k , se $k \leq m$; $d^{-1}A_{k-m-1}$, se $k > m$; e la regione limitata a destra da $x = k$, al sottooggetto A_k , si ha: $\mu = j\alpha\mu'$ (ciò naturalmente non vuol dire che (μ', L') sia rappresentazione di reticolo modulare libero generato dalle catene (17)).

Si tratta ora di costruire, a partire dall'omomorfismo reticolare $j\alpha$ di L' in $L(A)$, un *funtore covariante* di $\mathfrak{D}'$ in $\mathfrak{C}$.

A tale scopo, conveniamo di scegliere un oggetto-rappresentante per ognuna delle classi di equivalenza che si ottengono considerando sottooggetti, quozienti, subquozienti ecc. in $\mathfrak{C}$. Indichiamo con lo stesso simbolo usato per la classe il rappresentante così individuato: così, A_p indicherà l'oggetto prescelto per individuare la classe $A_p = [A_p, i_p]$. Naturalmente, fatta questa convenzione, che permette un notevole risparmio nei simboli ed un più agile sviluppo del lavoro, occorrerà, nei casi ambigui, integrare la notazione con esplicite indicazioni del significato che si vuole essa assuma.

Se C è un generico chiuso di δ , poniamo $T(C) = j\alpha(C)$: con ciò, ad ogni chiuso è associato un oggetto di $\mathfrak{C}$. Le mappe non nulle tra chiusi di L' sono monomorfismi; dato che $j\alpha$ conserva l'ordine, se M ed N sono chiusi, ed M è contenuto in N , esiste uno ed un solo monomorfismo π di $T(M)$ in $T(N)$: se p è il monomorfismo di M in N , poniamo $T(p) = \pi$.

È facile verificare che:

T muta le identità nelle identità; e, per ogni coppia di mappe consecutive;

$T(pq) = T(p)T(q)$; ciò in base all'unicità del monomorfismo tra due oggetti di $\mathcal{C}$ compatibile con le loro immersioni in A .

Estendiamo T a $\mathcal{D}'$: se X è oggetto di $\mathcal{D}'$, possiamo rappresentare X come quoziente di chiusi:

$$X = \frac{\bar{X}}{\bar{X} \bigcap \mathcal{C}X^*}$$

poniamo allora:

$$T(X) = \frac{T(\bar{X})}{T(\bar{X} \bigcap \mathcal{C}X^*)}$$

Se X ed Y sono oggetti di $\mathcal{D}'$, ed f è una mappa non nulla in $\mathbf{Map}(X, Y)$, consideriamo il diagramma commutativo, con righe E-sequenze:

$$(18) \quad \begin{array}{ccccc} T(\bar{X} \bigcap \mathcal{C}X^*) & \longrightarrow & T(\bar{x}) & \longrightarrow & \frac{T(\bar{X})}{T(\bar{X} \bigcap \mathcal{C}X^*)} = T(X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ T(\bar{Y} \bigcap \mathcal{C}Y^*) & \longrightarrow & T(\bar{Y}) & \longrightarrow & \frac{T(\bar{Y})}{T(\bar{Y} \bigcap \mathcal{C}Y^*)} = T(Y) \end{array}$$

In esso, le quattro mappe a sinistra sono le trasformate mediante T delle inclusioni tra chiusi:

$$\begin{array}{ll} \bar{X} \longrightarrow \bar{Y}; & \bar{X} \bigcap \mathcal{C}X^* \longrightarrow \bar{X} \\ \bar{Y} \bigcap \mathcal{C}Y^* \longrightarrow \bar{Y}; & \bar{X} \bigcap \mathcal{C}X^* \longrightarrow \bar{Y} \bigcap \mathcal{C}Y^* \end{array}$$

e le due mappe a destra a loro volta sono le proiezioni sui quozienti. Il diagramma (18) fornisce una mappa, unica,

$$\pi: T(X) \longrightarrow T(Y)$$

poniamo $\pi = T(f)$.

Infine, facciamo corrispondere alle mappe nulle le mappe nulle tra i trasformati degli oggetti mediante T .

TEOREMA 6: T è un funtore covariante esatto di $\mathcal{D}'$ in $\mathcal{C}$.

Osserviamo anzitutto che l'estensione di T a $\mathcal{D}'$ a partire dalla definizione di T sui chiusi e sulle inclusioni di un chiuso in un altro è coerente (se X è chiuso, $\bar{X} \bigcap \mathfrak{C}(X^*) = \emptyset$). Inoltre, T trasforma identità in identità; e, per ogni coppia di mappe consecutive f, g , $T(fg) = T(f)T(g)$ per l'unicità della mappa che completa in modo commutativo il diagramma (18). Per provare l'esattezza di T , basta provare che T trasforma E-sequenze aventi per primi due termini dei chiusi in E-sequenze; da ciò infatti si deduce, tenuto conto che X/Y può rappresentarsi in generale come:

$$\frac{X}{Y} = \frac{\bar{X}}{\bar{Y} \bigcup (\bar{X} \bigcap \mathfrak{C}(Y^*))}$$

e tenuto conto del fatto che $j\alpha$ è monomorfismo reticolare, l'esattezza di T su $\mathcal{D}'$.

Per provare che T trasforma una E-sequenza:

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow \frac{Y}{\bar{X}}$$

con X ed Y chiusi in una E-sequenza, osserviamo che:

$$T(Y/X) = \frac{T(\overline{Y/X})}{T[(\overline{Y/X}) \bigcap \mathfrak{C}(Y/X)^*]}$$

ma:

$$(\overline{Y/X}) = \bar{Y} = Y$$

e:

$$(\overline{Y/X}) \bigcap \mathfrak{C}(Y/X)^* = \bar{X} = X$$

ed allora:

$$T(Y/X) = T(Y)/T(X)$$

10. – Il risultato provato consente di utilizzare una categoria omologica particolarmente semplice, in cui i fatti omologici acquistano evidenza « grafica », per trovare e dimostrare fatti omologici relativi ad un oggetto differenziale filtrato di una qualunque categoria omologica (e quindi, in particolare, di una categoria abeliana); precisamente, potranno essere provati tutti i fatti omologici « conservati » da T , o T -invarianti, quali l'esattezza di sequenze, ecc.

Può accadere che il funtore T muti oggetti non nulli di $\mathcal{D}'$ nell'oggetto nullo di $\mathcal{C}$: assegnato un certo oggetto differenziale filtrato, $\mathcal{A}$, lo strumento matematico giustificato con il teorema 6 può essere migliorato e reso più aderente al comportamento omologico di $\mathcal{A}$ considerando al posto di δ' la regione ottenuta da δ' mediante sottrazione di quadrati elementari che si sappia trasformati da T nello O di $\mathcal{C}$.

Analogamente si può procedere per utilizzare i « diagrammi alla Zeeman » nel caso dell'oggetto graduato con filtrazione compatibile con il differenziale: le difficoltà del metodo sono le stesse superate per il caso dell'oggetto differenziale filtrato.

11. – L'importanza delle FD -categorie legittima l'interesse per il problema, cui accennavamo all'inizio, della possibilità o meno di considerare le FD -sottocategorie di $\mathcal{T}$ come esaurienti il sistema delle FD -categorie. Proveremo che ogni FD -categoria si può considerare come sottocategoria di $\mathcal{T}$.

Ricordiamo anzitutto (V. Birkoff, [O]) che ogni elemento di un reticolo distributivo finito ammette unica rappresentazione irridondante come unione di elementi $\mathbf{U}$ -irriducibili del reticolo.

Sia allora $\mathcal{D}$ una FD -categoria, ed X oggetto di $\mathcal{D}$; indichiamo con $IL(X)$ l'insieme degli elementi $\mathbf{U}$ -irriducibili di $L(X)$, (escluso lo O), e diciamo chiuso un sottoinsieme C di $IL(X)$ se:

$$X_i \leq K_k, X_k \in C \quad \text{implicano} \quad X_i \in C$$

È facile verificare che la famiglia dei chiusi di $IL(X)$ dà ad $IL(X)$ struttura di spazio topologico finito, spazio topologico

finito che indicheremo con $\pi(X)$; ad ogni oggetto di $\mathcal{D}$ corrisponde quindi uno spazio topologico finito, in quanto allo 0 possiamo far corrispondere « naturalmente » l'insieme vuoto.

LEMMA 1: π subordina un isomorfismo tra il reticolo dei sottoggetti $L(X)$ di un oggetto X ed il reticolo dei chiusi di $\pi(X)$.

Infatti, se A è sottoggetto di X , $A = A_1 \bigcup A_2 \dots \bigcup A_n$; consideriamo $\{A_i \in IL(X), A_i \leq A\}$: si tratta di un chiuso dello spazio topologico $\pi(X)$, chiuso che indicheremo con $\bar{\pi}(A)$. Per come è definito, risulta subito che $\bar{\pi}$ trasforma unioni di sottoggetti in unioni dei chiusi corrispondenti, ed intersezioni in intersezioni; $\bar{\pi}$ è inoltre su ed 1-1 :infatti, preso un chiuso C di $\pi(X)$, l'unione degli $\bigcup$ -irriducibili che sono elementi di C è un sottoggetto di X , che $\bar{\pi}$ a sua volta trasforma in C stesso; e se due sottoggetti vengono trasformati da $\bar{\pi}$ nello stesso chiuso, essi sono unioni degli stessi $\bigcup$ -irriducibili, e quindi coincidono.

LEMMA 2: sia $\mathcal{D}$ una FD -categoria; sia

$$Y \longrightarrow A \xrightarrow{f} A/Y$$

E-sequenza in $\mathcal{D}$. Allora f induce una corrispondenza ordinata ed 1-1 tra i sottoggetti $\bigcup$ -irriducibili di A non seguiti da Y ed i sottoggetti $\bigcup$ -irriducibili di A/Y .

Cominciamo con l'osservare che condizione necessaria e sufficiente affinchè un elemento $\bigcup$ -irriducibile di $L(A)$ venga trasformato per effetto di f nel sottoggetto nullo di A/Y è che esso preceda Y .

Ogni elemento di $L(A)$ si può rappresentare in unico modo come unione irridondante di elementi $\bigcup$ -irriducibili di $L(A)$; preso δ in $L(A)$, $\delta = Y_1 \bigcup Y_2 \bigcup \dots \bigcup Y_m \bigcup X_1 \bigcup X_2 \bigcup \dots \bigcup X_n$, ove le Y_i sono le componenti $\bigcup$ -irriducibili dell'unione che precedono Y .

f subordina una corrispondenza tra i sottoggetti di A ed i sottoggetti di A/Y (basta associare al sottoggetto $|A_i, i|$ di A l'immagine della mappa f_i); tale corrispondenza è ovviamente su, in quanto, dato un sottoggetto di A/Y , la sua controimmagine mediante f è un sottoggetto di A che f a sua volta trasforma nel sottoggetto dato di A/Y .

Osserviamo ora che, se due sottogetti δ e δ' di A hanno le stesse componenti $\bigcup$ -irriducibili, i due sottogetti hanno lo stesso corrispondente in $L(A/Y)$; e se esiste tra due sottogetti di A una relazione d'ordine, essa viene conservata tra i corrispondenti (immediata conseguenza delle proprietà delle E -sequenze).

Siano X_1 ed X_2 due elementi $\bigcup$ -irriducibili di $L(A)$ non precedenti Y ; possono darsi due casi: o sussiste una relazione d'ordine tra X_1 ed X_2 , ed allora essa viene conservata in senso proprio da f (cioè i corrispondenti di X_1 ed X_2 in $L(A/Y)$ non coincidono); oppure non sussiste alcuna relazione d'ordine tra X_1 ed X_2 ; in tal caso, i corrispondenti in $L(A/Y)$ sono distinti: se coincidessero, $X_1 \bigcup Y = X_2 \bigcup Y$, ma è facile verificare che, in un reticolo distributivo, ciò è assurdo. Come conseguenza, due sottogetti di A aventi componenti $\bigcup$ -irriducibili non precedenti Y distinte hanno corrispondenti distinti in $L(A/Y)$. È facile a questo punto concludere la dimostrazione provando che elementi $\bigcup$ -irriducibili di $L(A)$ non precedenti Y hanno per corrispondenti elementi $\bigcup$ -irriducibili di $L(A)$, e viceversa: basta ragionare per assurdo.

Si tratta ora di definire un funtore P di $\mathcal{D}$ in $\mathcal{T}$; a tale scopo, osservato che isomorfismi tra oggetti subordinano omeomorfismi tra spazi associati mediante π , poniamo $P(X) = \pi(X)$ per ogni oggetto X di $\mathcal{D}$; considerata poi una mappa f in $Map(X, Y)$ ed una rappresentazione:

$$K \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} I \xrightarrow{c} I' \xrightarrow{i'} Y \xrightarrow{p'} K'$$

di f , $f = i'cp$; in base alle considerazioni precedenti, allora, ad i' è associato un omeomorfismo, che indicheremo con $\pi(i')$, tra $\pi(I')$ ed un chiuso di $\pi(Y)$; all'isomorfismo c è associato un omeomorfismo $\pi(c)$ tra $\pi(I')$ e $\pi(I)$; a p (lemma 2) un omeomorfismo tra un aperto di $\pi(X)$ e $\pi(I)$. Se poniamo $P(f) = \pi(i')\pi(c)\pi(p)$, $P(f)$ non dipende dalla particolare rappresentazione scelta per f (verifica ovvia).

TEOREMA 7: P è un funtore covariante rappresentativo della FD -categoria $\mathcal{D}$ in $\mathcal{T}$.

Il carattere funtoriale di P e la sua esattezza sono immediata conseguenza della definizione; inoltre P è fedele, poichè, date due mappe f, f' in $\text{Map}(X, Y)$, se $P(f) = P(f')$, si ha una corrispondenza tra elementi $\bigcup$ -irriducibili di $L(X)$ ed $L(Y)$ che subordina una identità tra f ed f' (infatti, coincidono, in $L(X)$, $\text{Ker } f$ e $\text{Ker } f'$; ed in $L(Y)$, $\text{Im } f$ ed $\text{Im } f'$).

12. Le categorie omologiche che ora considereremo costituiscono la classe di categorie omologiche in un certo senso più « semplici » come struttura; vedremo che tale « semplicità » trova un interessante riscontro nel comportamento del reticolo dei sottoggetti di un oggetto, ove si faccia l'ulteriore ipotesi di reticoli distributivi finiti per tutti gli oggetti.

TEOREMA 8: *sia $\mathcal{C}$ categoria omologica; sono fatti equivalenti:*

a) ogni oggetto X è proiettivo (cioè, per ogni diagramma a riga esatta:

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ & \downarrow f' & \\ Z & \xrightarrow{f''} & Y \longrightarrow O \end{array}$$

esiste in $\text{Map}(X, Z)$ una mappa f tale che $f''f = f'$):

a') ogni oggetto è iniettivo (duale)

b) se

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

è E -sequenza, esiste in $\text{Map}(Y, X)$ una mappa f_1 tale che $f_1f = e_X$

b') se

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

è E -sequenza, esiste in $\text{Map}(Z, Y)$ una mappa g_1 tale che $gg_1 = e_Z$.

L'equivalenza di *b)* e *b')* si può verificare seguendo Puppe [11], che la stabilisce sfruttando le proprietà delle E -sequenze.

Che *a)* implichi *b')* segue subito dalla considerazione del diagramma:

$$\begin{array}{ccccc} Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & O \\ & & \downarrow e_z & & \\ & & Z & & \end{array}$$

Analogamente si può verificare che $a')$ implica $b)$.

Per provare che $b')$ implica $a)$, dato il diagramma:

$$\begin{array}{ccccc} & & Y & & \\ & & \downarrow m & & \\ Z & \xrightarrow{l} & X & \longrightarrow & O \end{array}$$

consideriamo il diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & Y & & \\ & & & & \downarrow m & & \\ \text{Ker } l & \longrightarrow & Z & \xrightarrow{c} & \text{Im } l & \xrightarrow{s} & X \end{array}$$

per ipotesi esiste

$$c' : \text{Im } l \longrightarrow Z$$

con $cc' = e_{\text{Im } l}$; consideriamo allora la mappa $c's^{-1}m$ di Y in Z ; si ha: $sc(c's^{-1}m) = m$; quindi, Y è proiettivo.

Analogamente, $b)$ implica $a')$.

Diremo brevemente « categoria O -dimensionale » una categoria omologica nella quale valga una delle condizioni equivalenti per il teorema 9.

TEOREMA 10: *Sia $\mathcal{D}$ una FD -categoria; se $\mathcal{D}$ è O -dimensionale, tra gli elementi $\mathbf{U}$ -irriducibili del reticolo dei sottooggetti di un qualsiasi oggetto che siano diversi da O non esiste alcuna relazione di inclusione propria (atomicità degli $\mathbf{U}$ -irriducibili).*

Per assurdo: supponiamo esista una catena propria $X_1 < X_2 < \dots < H_k$ di elementi $\mathbf{U}$ -irriducibili di un reticolo di sottooggetti $L(A)$; la E -sequenza:

$$X_1 \longrightarrow A \longrightarrow \frac{A}{X_1}$$

non sarebbe allora spezzante, in quanto il chiuso $\bar{\pi}(X_1)$ non è contemporaneamente aperto in $\pi(A)$. (V. notazioni del lemma 1 precedente).

Un esempio non banale di categoria O -dimensionale è fornito da $\mathfrak{J}$, categoria degli insiemi e delle applicazioni 1-1 tra parti; ed è facile rendersi conto che le FD -categorie O -dimensionali possono considerarsi come sottocategorie di $\mathfrak{J}$.

13. — Si pongono a questo punto problemi di vario tipo, come:

I) possibilità o meno di estendere il risultato espresso mediante il teorema 7 a D -categorie generiche: la difficoltà consiste nella impossibilità di rappresentare gli elementi di un reticolo distributivo generico mediante un sistema ridotto di elementi « semplici ».

II) possibilità di considerare le categorie omologiche come sottocategorie (omologiche) di categorie abeliane, cioè di categorie omologiche nelle quali $Map(X, Y)$ è gruppo per ogni coppia di oggetti X, Y , e la composizione è compatibile con l'operazione gruppale, ed inoltre ogni coppia di oggetti ammette somma diretta. Il punto cruciale nel rapporto tra categorie omologiche e categorie abeliane riguarda l'esistenza di somme dirette; in effetti, Puppe [1] prova che ogni categoria omologica nella quale esista somma diretta per ogni coppia di oggetti si può estendere ad una categoria abeliana. Un problema più generale di quello concernente il rapporto tra categorie omologiche e categorie abeliane è stato affrontato sotto diversi punti di vista dai matematici russi: Burmistrobic [15], Kurosh, Zalenko [22] tentano a più riprese con successo di provare in generale che ogni categoria può essere estesa ad una categoria con somme e prodotti diretti; peraltro, nel caso delle categorie omologiche, l'estensione in genere non è una categoria omologica; Sul'geifer [19, 20, 21] considera invece categorie con O -oggetto e O -mappe ed impone due gruppi di assiomi, l'uno costituito da assiomi (come la decomposizione di una mappa attraverso l'immagine, la proiezione su di questa, ed il monomorfismo di immersione nel codominio) verificati anche dalle categorie omologiche, l'altro costituito da assiomi in genere non verificati dalle categorie

omologiche (esistenza di somma diretta per ogni coppia di oggetti). È interessante osservare come, con questo sistema di assiomi, Sul'geifer riesca a provare, con una tecnica dimostrativa analoga a quella impiegata nella seconda parte del presente lavoro, risultati sulla struttura del reticolo dei sottooggetti di un oggetto (opportunamente definito) quali la sua modularità. (Che il sistema di assiomi di Sul'geifer sia almeno in parte indipendente dagli assiomi di categoria omologica risulta dal fatto che è facile verificare che l'esistenza di reticoli distributivi propri in una categoria omologica è incompatibile con l'esistenza di somme dirette per ogni coppia di oggetti).

Infine, Zalenko, in un articolo recensito sul numero di Novembre 1964 di *Mathematical Reviews*, riprende le considerazioni di Puppe [11] relative a categorie abeliane ed alla classe delle « corrispondenze » su una categoria abeliana tentando una estensione dei risultati al caso delle categorie omologiche; peraltro, i risultati sono piuttosto limitati.

BIBLIOGRAFIA

a) riferimenti principali:

- [0] BIRKOFF: *Lattice Theory*, A.M.S. Coll. Pub. 1948.
- [1] BUCHSBAUM: *Exact Categories and Duality*, Trans. A.M.S. 80.
- [2] CARTAN, EILEMBERG: *Homological Algebra*, Princeton 1956.
- [3] EILENBERG, MC LANE: *General Theory of Natural Equivalences*, Trans. A.M.S. 58.
- [4] EILENBERG, STEENROD, *Foundation of Algebraic Topology*, Princeton, 1952.
- [5] GABRIEL: *Des Catégories Abeliennes*, Bull. Soc. Math. France, 90.
- [6] GROTHENDIECK: *Sur quelques Points d'Algebre Homologique*, Tohoku Math. J. 9.
- [7] HELLER: *Homological Algebra in Abelian Categories*, Ann. of Math. 68.
- [8] MAC LANE: *Homology*, Springer, 1963.
- [9] MAC LANE: *Duality for Groups*, Bull. A.M.S. 56.
- [10] MAC LANE: *Locally Small Categories and the Foundations of Set Theory*, Warsaw Symposium, 1959.
- [11] PUPPE: *Korrispondenzen in Abelschen Kategorien*, Math. Ann. 148.

- [12] ZEEMAN: *On the Filtered Differential Group*, Ann. of Math. 66.

b) *altri riferimenti*:

- [13] BUCHSBAUM: *A Note on Homology in Categories*, Ann. of Math. 69.
[14] BUCHSBAUM: *Satellites and Universal Functors*, Ann. of Math. 71
[15] BURMISTROVIC: *Estensione di categorie additive*, Dok. Akad. N. SSSR, 132.
[16] KUROSU: *Direct Decomposition in Algebraic Categories*, A.M.S. Transl. 27.
[17] MAC LANE: *An Algebra of Additive Relations*, Proc. Nat. Ac. Sc. 56.
[18] MARANDA: *Injective Structures*, Trans. A.M.S. Gennaio 1964.
[19] SUL'GEIFER: *Teoria generale dei radicali nelle categorie*, Mat. Sbornik 51.
[20] SULL'GEIFER: *Reticolo degli ideali di un oggetto di una categoria*, Mat. Sbornik, 54.
[21] SUL'GEIFER: *Immersione di categorie*, Mat. Sbornik, 61.
[22] ZALENKO: *Completamento di categorie con l'unione libera e diretta di oggetti*, Dok. Ak. N. SSSR, 155.