

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GABRIELLA CORSI

**Sui commutatori nei gruppi il cui derivato è
prodotto diretto di gruppi ciclici**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 35, n° 2 (1965), p. 253-259

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1965__35_2_253_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUI COMMUTATORI NEI GRUPPI IL CUI DERIVATO È PRODOTTO DIRETTO DI GRUPPI CICLICI

*Nota *) di GABRIELLA CORSI (a Firenze) **)*

I. Dato un gruppo G il cui derivato G' sia prodotto diretto di un numero finito m di gruppi ciclici, si può porre il problema di stabilire se G' possa essere generato mediante m commutatori. Il problema, in questa forma generale, riceve risposta negativa: I. D. Mac Donald ha dimostrato in [2] che, fissato comunque un numero naturale n , esiste un gruppo G , il cui derivato G' è ciclico e non può essere generato da meno di n commutatori. D'altra parte, sempre in [2], Mac Donald dimostra che, se il derivato G' di un gruppo G è ciclico, condizione sufficiente affinché G' sia generato da un commutatore è che G sia nilpotente oppure G' infinito.

Estendiamo qui in parte questo teorema, provando che:

a) Se G è nilpotente e G' prodotto diretto di m gruppi ciclici finiti, si può generare G' mediante m commutatori;

b) se G è nilpotente di classe 2 e G' è prodotto diretto di m gruppi ciclici (finiti o infiniti), si può generare G' mediante m commutatori.

*) Pervenuta in redazione il 9 gennaio 1965.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Firenze.

**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

2. — LEMMA: *Se G è un p -gruppo e il suo derivato G' è prodotto diretto di m gruppi ciclici, si può generare G' con m commutatori.*

Infatti, essendo G' prodotto diretto di m p -gruppi ciclici, il sottogruppo di Frattini di G' ha indice p^m in G' stesso. Ne viene, per il teorema di Burnside sulla base, che da ogni insieme di generatori di G' si possono estrarre m elementi che generano G' : in particolare dall'insieme dei commutatori di G si potranno estrarre m generatori di G' .

TEOREMA 1: *Dato un gruppo nilpotente G , se il suo derivato G' è prodotto diretto di m gruppi ciclici finiti, si può generare G' con m commutatori.*

Supponiamo dapprima G finito: poichè è nilpotente, G è allora prodotto diretto dei suoi sottogruppi di Sylow $G_1, G_2, \dots, G_r$ e si ha:

$$G' = G'_1 \times G'_2 \times \dots \times G'_r$$

dove G'_i ($i = 1, \dots, r$) è il derivato del p_i -gruppo G_i ¹⁾. Inoltre i G'_i , quali sottogruppi di Sylow di G_r , sono pienamente invarianti in G' , quindi, se G' è prodotto diretto degli m sottogruppi ciclici $T_1, T_2, \dots, T_m$, si ha²⁾:

$$G'_i = (G'_i \cap T_1) \times (G'_i \cap T_2) \times \dots \times (G'_i \cap T_m) \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

¹⁾ Se un gruppo G è prodotto diretto di r suoi sottogruppi qualunque $G_1, G_2, \dots, G_r$, il suo derivato G' è prodotto diretto dei derivati G'_i dei G_i ($i = 1, \dots, r$) (cfr. per es. [1] pag. 120).

²⁾ Se H è un sottogruppo pienamente invariante di un gruppo G prodotto diretto dei suoi sottogruppi $G_1, G_2, \dots, G_r$, deve essere $H = (H \cap G_1) \times (H \cap G_2) \times \dots \times (H \cap G_r)$. Infatti l'endomorfismo φ_i ($i = 1, \dots, r$) di G , definito da $\varphi_i(g) = \varphi_i(g_1 g_2 \dots g_r) = g_i$ ($g \in G$; $g_j \in G_j$; $j = 1, \dots, r$), induce in $H \cap G_i$ l'automorfismo identico, onde deve essere: $H \cap G_i = \varphi_i(H \cap G_i) \subset \varphi_i(H)$; d'altra parte, poichè H è pienamente invariante, $\varphi_i(H) \subset H \cap G_i$, quindi $\varphi_i(H) = H \cap G_i$, cioè $H \cap G_i$ è proprio la componente i -esima di H .

Dunque ogni p_i -gruppo G'_i è prodotto diretto di m gruppi ciclici e quindi, per il lemma, è generato da m commutatori. Siano essi:

$$\gamma_1^{(i)} = (a_{1i}, b_{1i}), \quad \gamma_2^{(i)} = (a_{2i}, b_{2i}), \quad \dots, \quad \gamma_m^{(i)} = (a_{mi}, b_{mi}) \\ (i = 1, \dots, r)$$

Allora gli m commutatori

$$\gamma_j = (a_{j1}a_{j2} \dots a_{jr} \, b_{j1}b_{j2} \dots b_{jr}) = \\ = (a_{j1}, b_{j1})(a_{j2}, b_{j2}) \dots (a_{jr}, b_{jr}) \quad (j = 1, \dots, m)$$

generano G' ; infatti, se $p_i^{k_i}$ è l'ordine di G'_i , posto $q_i = p_1^{k_1} \dots p_{i-1}^{k_{i-1}} p_{i+1}^{k_{i+1}} \dots p_r^{k_r}$ si ha:

$$\gamma_j^{q_i} = (a_{ji}, b_{ji})^{q_i},$$

ed, essendo $(a_{ji}, b_{ji}) \in G'_i$, q_i è primo con l'ordine di (a_{ji}, b_{ji}) , onde $\{\gamma_j^{q_i}\} = \{(a_{ji}, b_{ji})\}$: ogni commutatore $\gamma_j^{(i)}$ ($i = 1, \dots, r$; $j = 1, \dots, m$) si può cioè ottenere come potenza di un commutatore γ_j e quindi $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}$ contiene un sistema di generatori di ciascun G'_i .

Sia ora G infinito ¹⁾: poichè G' è generato da un numero finito di commutatori, possiamo sempre ricondurci al caso che G sia generato da un sistema finito di elementi $g_1, g_2, \dots, g_r$. Il centralizzante C_i di ciascun g_i ($i = 1, \dots, r$) deve avere indice finito in G , infatti tale indice è uguale al numero dei coniugati di g_i e questo numero deve essere finito, altrimenti sarebbero infiniti anche i commutatori di g_i con gli altri elementi di G , in contraddizione con la finitezza di G' . Ne viene che il centro C di G ha indice finito: C infatti non è altro che l'intersezione di tutti i centralizzanti C_i , e si ha:

$$[G : C_1 \cap C_2] = [G : C_1][C_1 : C_1 \cap C_2],$$

¹⁾ La linea di questa dimostrazione è quella usata da I. D. Mac Donald per provare l'analoga proposizione nel caso di G nilpotente infinito e G' ciclico.

ma $C_1 \cap C_2$ è il centralizzante di g_2 in C_1 e quindi ha indice finito in C_1 , onde $C_1 \cap C_2$ ha indice finito in G ; analogamente, procedendo per induzione, si vede che C ha indice finito in G ed è perciò infinito. Inoltre C è finitamente generato: infatti, poichè C ha indice finito in G , esistono r interi positivi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, tali che $g_1^{\alpha_1}, g_2^{\alpha_2}, \dots, g_r^{\alpha_r} \in C$; sia $\bar{C} = \{g_1^{\alpha_1}, g_2^{\alpha_2}, \dots, g_r^{\alpha_r}\}$: ogni elemento $x \in G/\bar{C}$ si può esprimere nella forma $x = \bar{g}_1^{x_1} \bar{g}_2^{x_2} \dots \bar{g}_r^{x_r} \bar{d}_r$ (dove $\bar{g}_i$ è il laterale di $\bar{C}$ rappresentato da g_i ($i = 1, 2, \dots, r$) e $\bar{d}_r$ è un elemento del derivato di $G/\bar{C}$, il quale è finito poichè è finito il derivato di G) con $1 \leq x_i \leq \alpha_i$ ($i = 1, \dots, r$); quindi $G/\bar{C}$ è finito; è finito pertanto anche l'indice di $\bar{C}$ in C ed, essendo $\bar{C}$ finitamente generato, anche C risulta finitamente generato. Ne segue che esiste in C almeno un sottogruppo N , libero da torsione massimo; come tale N ha indice finito in C (essendo C finitamente generato) e quindi in G ; inoltre N è un sottogruppo normale, perchè centrale. Dunque G/N è un gruppo nilpotente finito; d'altra parte $G' \cap N = 1$ (G' è finito e N libero da torsione), onde ¹⁾:

$$\left(\frac{G}{N}\right)' \simeq G'$$

Ma allora $\left(\frac{G}{N}\right)'$ è prodotto diretto di m gruppi ciclici e, applicando i risultati precedenti, si ha che $\left(\frac{G}{N}\right)'$ è generato da m commutatori, onde G' è generato da m commutatori.

¹⁾ Dato un qualunque gruppo G , se N è un sottogruppo normale di G , si ha $\left(\frac{G}{N}\right)' \simeq \frac{G'}{G' \cap N}$. Infatti l'omomorfismo naturale φ di G su $\frac{G}{N}$ fa corrispondere ad ogni elemento del tipo $x^{-1}y^{-1}xy$ di G un elemento del tipo $\bar{x}^{-1}\bar{y}^{-1}\bar{x}\bar{y}$ di $\frac{G}{N}$, viceversa ogni generatore $\bar{x}^{-1}\bar{y}^{-1}\bar{x}\bar{y}$ di $\left(\frac{G}{N}\right)'$ proviene da almeno un elemento di G del tipo $x^{-1}y^{-1}xy$; pertanto φ , portando un sistema di generatori di G' in un sistema di generatori di $\left(\frac{G}{N}\right)'$, induce un omomorfismo $\bar{\varphi}$ di G' su $\left(\frac{G}{N}\right)'$; il nucleo di $\bar{\varphi}$ è $G' \cap N$, onde $\left(\frac{G}{N}\right)' \simeq \frac{G'}{G' \cap N}$.

2. — TEOREMA 2: *Se G è un gruppo nilpotente di classe 2 ed il suo derivato G' è prodotto diretto di m gruppi ciclici finiti $T_1, T_2, \dots, T_m$ e di n gruppi ciclici infiniti $F_1, F_2, \dots, F_n$, si può generare G' mediante $m + n$ commutatori. Nel caso poi che sia $m = 0$, G' si può esprimere come prodotto diretto di n gruppi ciclici generati da commutatori.*

Per $n = 0$ il teorema è vero come caso particolare del teorema precedente; procediamo allora per induzione rispetto ad n . Posto $H = T_1 \times T_2 \times \dots \times T_m \times F_1 \times F_2 \times \dots \times F_{n-1}$, essendo H normale in G , perchè centrale, si ha ¹⁾:

$$\left(\frac{G}{H}\right)' \simeq \frac{G'}{H} \simeq F_n;$$

cioè $\frac{G}{H}$ è un gruppo che ha il derivato ciclico infinito, onde, per il teorema di I. D. Mac Donald [2], esiste un commutatore $\bar{\delta}_n$ che genera $\left(\frac{G}{H}\right)'$. Se φ è l'omomorfismo naturale di G su $\frac{G}{H}$, esiste ¹⁾ in G un commutatore δ_n , tale che $\varphi(\delta_n) = \bar{\delta}_n$ e, poichè $\bar{\delta}_n$ genera tutto $\left(\frac{G}{H}\right)'$, le potenze di δ_n rappresentano ¹⁾ tutti i laterali di H in G' ; inoltre si ha $\{\delta_n\} \cap H = 1$, perchè, se fosse diverso dall'unità, questo sottogruppo di $\{\delta_n\}$ dovrebbe avere indice finito in $\{\delta_n\}$. Pertanto si può scrivere:

$$G' = H \times \{\delta_n\}$$

con $\{\delta_n\}$ sottogruppo normale di G , perchè centrale. Analogamente a sopra, si ha allora:

$$\left(\frac{G}{\{\delta_n\}}\right)' \simeq \frac{G'}{\{\delta_n\}} \simeq H$$

cioè $\frac{G}{\{\delta_n\}}$ è un gruppo nilpotente di classe 2 il cui derivato è pro-

¹⁾ Cfr. nota precedente.

dotto diretto di m gruppi ciclici finiti e $n - 1$ gruppi ciclici infiniti; per l'ipotesi d'induzione $\left(\frac{G}{\{\delta_n\}}\right)'$ è quindi generato da $m + n - 1$ commutatori $\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_m, \bar{\delta}_1, \dots, \bar{\delta}_{n-1}$. Pertanto si possono determinare in G $m + n - 1$ commutatori ¹⁾ $\gamma_1, \dots, \gamma_m, \delta_1, \dots, \delta_{n-1}$, tali che $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m, \delta_1, \dots, \delta_{n-1}\}$ contiene almeno un rappresentante di ogni laterale di $\{\delta_n\}$ in G : ogni elemento $g' \in G'$ si può dunque esprimere nella forma

$$g' = \gamma_1^{x_1} \gamma_2^{x_2} \dots \gamma_m^{x_m} \delta_1^{y_1} \delta_2^{y_2} \dots \delta_{n-1}^{y_{n-1}}$$

Se poi $m = 0$ ed $n = 2$, si ha come sopra:

$$G' = F_1 \times \{\delta_2\}$$

e

$$\left(\frac{G}{\{\delta_2\}}\right)' \simeq \frac{G'}{\{\delta_2\}} \simeq F_1$$

onde, ripetendo per $\frac{G}{\{\delta_2\}}$ il ragionamento fatto sopra per $\frac{G}{H}$, si ha $G = \{\delta_1\} \times \{\delta_2\}$, con δ_1 e δ_2 commutatori in G . Per ipotesi di induzione possiamo allora supporre che il derivato $\left(\frac{G}{\{\delta_n\}}\right)'$ di $\frac{G}{\{\delta_n\}}$ si possa esprimere come prodotto diretto di $n - 1$ gruppi ciclici generati da commutatori:

$$\left(\frac{G}{\{\delta_n\}}\right)' = \{\bar{\delta}_1\} \times \{\bar{\delta}_2\} \times \dots \times \{\bar{\delta}_{n-1}\}.$$

Se φ è l'omomorfismo naturale di G su $\frac{G}{\{\delta_n\}}$, esistono quindi in G $n - 1$ commutatori $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}$, tali che $\varphi(\delta_i) = \bar{\delta}_i$ ($i = 1, \dots, n - 1$); sia $K = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}\}$: dovrà essere $K \cap \{\delta_n\} = 1$, perchè $K \simeq \frac{G}{\{\delta_n\}} \simeq \frac{K \cup \{\delta_n\}}{\{\delta_n\}} \simeq \frac{K}{K \cap \{\delta_n\}}$ e, mentre K è

¹⁾ Cfr. nota p. 4.

prodotto diretto di $n - 1$ gruppi ciclici infiniti, se fosse $K \cap \{\delta_n\} \neq 1$, K potrebbe essere al più prodotto diretto di $n - 2$ gruppi ciclici infiniti. D'altra parte, poichè $\{\bar{\delta}_i\} \cap \{\bar{\delta}_j\} = 1$ ($i, j = 1, \dots, n - 1$), deve essere $\{\delta_i\} \cap \{\delta_j\} \in \{\delta_n\}$, ma $K \cap \{\delta_n\} = 1$, onde $\{\delta_i\} \cap \{\delta_j\} = 1$ ($i, j = 1, \dots, n - 1$). Pertanto:

$$G' = \{\delta_1\} \times \{\delta_2\} \times \dots \times \{\delta_n\}.$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. G. KUROSH: *The Theory of Groups*, vol. I, New York, 1955.
- [2] I. D. MAC DONALD: *On Cyclic Commutator Subgroups*. Jour. London Math. Soc., 38 (1963), 419-422.