RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

CLAUDIO MARGAGLIO

Una caratterizzazione di certi fasci algebrici coerenti ed una ulteriore applicazione della proprietà di estensione

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 34 (1964), p. 369-377
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1964__34__369_0>

UNA CARATTERIZZAZIONE DI CERTI FASCI ALGEBRICI COERENTI ED UNA ULTERIORE APPLICAZIONE DELLA PROPRIETÀ DI ESTENSIONE

Nota *) *di* Claudio Margaglio (*a Padova*) **)

Sommario.

Sia K un corpo commutativo algebricamente chiuso, sia V una varietà algebrica su K e sia $\mathscr{A}$ il fascio degli anelli locali di V.

(nn. 1,2). È noto ([1]) che se V è irriducibile e soddisfa alla *P.E.* (si legga « proprietà di estensione ») allora ogniqualvolta vi è una sequenza esatta (di fasci ed omomorfismi algebrici) [1]) del tipo:

$$0 \longrightarrow \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{A}^p \longrightarrow \mathscr{A}^q \quad (p, q \text{ interi positivi}),$$

il fascio $\mathscr{M}$ soddisfa alla *P.E.* Ci si può chiedere se viceversa ogni fascio su V, algebrico coerente e liscio (cioè privo di torsione) che inoltre soddisfi alla *P.E.* sia localmente isomorfo al nucleo di un omomorfismo algebrico del tipo $\mathscr{A}^p \longrightarrow \mathscr{A}^q$. La risposta è, per varietà localmente normali, affermativa e ciò segue dal fatto che ivi i fasci del tipo sopra detto risultano riflessivi (cioè canonicamente isomorfi al loro biduale).

Considerando in particolare una varietà affine si ha allora anche che i fasci algebrici coerenti e lisci soddisfacenti alla *P.E.*, definiti su una varietà affine del tipo di cui sopra sono caratteriz-

---

*) Pervenuta in Redazione il 21 gennaio 1964.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R.

[1]) Gli omomorfismi qui considerati sono tutti algebrici, anche quando ciò non è detto esplicitamente.

zati sia dal fatto di essere riflessivi che dal fatto di essere isomorfi al nucleo di un omomorfismo algebrico del tipo $\mathscr{A}^p \longrightarrow \mathscr{A}^q$ giacchè in generale, se R è un dominio d'integrità noetheriano e se M è un R-modulo di tipo finito e privo di torsione, sono equivalenti le tre proprietà:

a) « M è riflessivo »;

b) « M è (isomorfo ad) un duale »;

c) « M è (isomorfo ad) un nucleo d'omomorfismo R-lineare $R^p \longrightarrow R^q$ ».

(nn. 3,4). Sia V una varietà affine, irriducibile, avente anello delle coordinate a fattorizzazione unica. Risulta allora che ogni qualvolta si ha una sequenza esatta del tipo: $0 \longrightarrow \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{A}^n \longrightarrow \mathscr{A}$, ($n$ intero positivo), se $n \leqslant 3$ il fascio $\mathscr{M}$ risulta isomorfo al suo duale mentre per ogni intero $n > 3$ si trovano esempi in cui $\mathscr{M}$ non è isomorfo al suo duale.

§ 1.

PROPOSIZIONE 1.: « *Ogni fascio $\mathscr{F}$ algebrico coerente e liscio su una varietà algebrica V irriducibile, soddisfacente alla P.E. e localmente normale, è canonicamente isomorfo al suo fascio biduale se e soltanto se $\mathscr{F}$ soddisfa alla P.E.* ».

Dimostrazione.

Si indichi con $\mathscr{F}^*$ il duale $\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{A})$ del fascio $\mathscr{F}$.

Anzitutto si osservi che se $\mathscr{L}$ è fascio localmente libero sulla varietà algebrica U (qualunque) l'omomorfismo canonico ω: $\mathscr{L} \longrightarrow \mathscr{L}^{**}$ definito associando ad ogni germe $f_x \in \mathscr{L}_x$ l'omomorfismo $\varphi_x : \mathscr{L}^*_x \longrightarrow \mathscr{A}_x$ che porta $f^*_x \in \mathscr{L}^*_x$ in $f^*_x(f_x)$, è un isomorfismo. Ciò si può verificare sia osservando che se $\mathscr{L}$ è definito da una certo $\mathfrak{U}$-cociclo φ, ($\mathfrak{U}$ essendo un ricoprimento aperto di U), allora $\mathscr{L}^*$ è definito dal controgrediente φ^{-1}_{-1} di φ e quindi $\mathscr{L}^{**}$ è definito nuovamente da φ, sia osservando che l'omomorfismo canonico ω: $\mathscr{L} \longrightarrow \mathscr{L}^{**}$ ha restrizione biiettiva ω_x: $\mathscr{A}_x \longrightarrow \mathscr{A}^{**}_x$ alle fibre.

Sia ora $\mathscr{M}$ un fascio algebrico coerente e liscio soddisfacente alla *P.E.* definito su V. Sia $X(\mathscr{M}) = W$ (cfr. [1]) il chiuso di V costituito con i punti $(x) \in V$ tali che la fibra $\mathscr{M}_x$ non sia $\mathscr{A}_x$-modulo libero e sia $U = cW$. È noto (cfr. [1], tenendo conto che la questione è locale) che $Cdm(W) > 1$. Per quanto precede si ha allora che l'omomorfismo canonico $\omega : \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{M}^{**}$ ha restrizione biiettiva ad U e pertanto è un isomorfismo, tenuto conto che i fasci $\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{M}, \mathscr{M}^{**})$, $\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{M}^{**}, \mathscr{M})$, $\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{M}^{**}, \mathscr{M}^{**})$, $\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{M}, \mathscr{M})$ sono lisci e soddisfano alla *P.E.* (cfr. [1], [5] tenendo conto che la questione è locale).

OSSERVAZIONE: Sia $\mathscr{F}$ un fascio algebrico coerente e liscio su V. Poichè $Cdm(X(\mathscr{F})) > 1$ l'omomorfismo canonico: $\omega : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}^{**}$ fornisce una iniezione di $\mathscr{F}$ nel fascio $\mathscr{F}^{**}$ algebrico coerente e liscio, soddisfacente alla *P.E.* tale che $\omega(\mathscr{F})$ sia sottofascio ammissibile di $\mathscr{F}^{**}$ (cioè tale che $Cdm(Supp(\mathscr{F}^{**}/\omega(\mathscr{F}))) > 1$). Se ne può trarre un'altra prova dell'esistenza, per ogni fascio $\mathscr{F}$ come sopra, del fascio $\overline{\mathscr{F}}$ (determinato a meno di isomorfismi) soprafascio ammissibile di $\mathscr{F}$ ed algebrico coerente liscio e soddisfacente alla *P.E.* (Cfr. [5]).

COROLLARIO 1.1: « *Per ogni coppia $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$ di fasci algebrici coerenti e lisci su V si ha* [1]) $\mathscr{M}^* \approx \mathscr{N}^*$ *se e solo se* $\overline{\mathscr{M}} \approx \overline{\mathscr{N}}$; *in particolare, se $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ sono fasci algebrici coerenti su V, se U è un aperto ammissibile di V e se* $\mathscr{F} \mid U \approx \mathscr{G} \mid U$ *allora* $\mathscr{F}^* \approx \mathscr{G}^*$ ».

COROLLARIO 1.2.: « *Ogni fascio algebrico $\mathscr{M}$, coerente liscio e soddisfacente alla P.E. definito su V, è localmente isomorfo al nucleo di un omomorfismo algebrico* $\mathscr{A}^p \longrightarrow \mathscr{A}^q$ ».

COROLLARIO 1.3.: « *Se $\mathscr{F}$ è fascio algebrico coerente e liscio, soddisfacente alla P.E., definito su V ed è irriducibile per somma diretta, allora anche ogni suo sottofascio ammissibile G è irriducibile per somma diretta* ».

Dimostrazione dei corollari della proposizione 1.

1.1. Poichè per ogni fascio algebrico coerente e liscio $\mathscr{F}$ su V il fascio $\mathscr{F}^*$ è riflessivo (cfr. [1], Teor. 5) e poichè $\mathscr{F}^{**} \approx \overline{\mathscr{F}}$ segue che $\overline{\mathscr{M}} \approx \overline{\mathscr{N}}$ equivale a $\mathscr{M}^{**} \approx \mathscr{N}^{**}$ e che $\mathscr{M}^{**} \approx \mathscr{N}^{**}$ equivale a $\mathscr{M}^* \approx \mathscr{N}^*$; se $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ sono fasci algebrici coerenti si ha, posto $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}/(t\mathscr{F})$, (essendo $t\mathscr{F}$ il sottofascio di torsione di $\mathscr{F}$), $\mathscr{G}_1 = \mathscr{G}/(t\mathscr{G})$: $\mathscr{F} \mid U \approx \mathscr{G} \mid U$ implica $\mathscr{F}_1 \mid U \approx \mathscr{G}_1 \mid U$ e di seguito $\overline{\mathscr{F}}_1 \approx \overline{\mathscr{G}}_1$, $\mathscr{F}_1^{**} \approx \mathscr{G}_1^{**}$, $\mathscr{F}^* \approx \mathscr{G}^*$ (giacchè $\mathscr{F}_1^* \approx \mathscr{F}^*$).

[1]) Gli isomorfismi verranno indicati con $\approx$ oppure con $\longleftrightarrow$.

1.2. È noto che se $\mathscr{M} = \mathscr{F}^*$ allora $\mathscr{M}$ è localmente isomorfo al nucleo di un omomorfismo $\mathscr{A}^p \longrightarrow \mathscr{A}^q$ (che si può dedurre dalla sequenza duale di una sequenza esatta del tipo: $\mathscr{A}^q \longrightarrow \mathscr{A}^p \longrightarrow$ $\longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow 0$) e d'altra parte, se $\mathscr{M} \approx \mathscr{M}^{**}$, basta porre $\mathscr{F} = \mathscr{M}^*$.

1.3. Se $\mathscr{G} = \mathscr{G}_1 \oplus \mathscr{G}_2$ allora $\mathscr{G}^{**} = \mathscr{G}_1^{**} \oplus \mathscr{G}_2^{**}$ e pertanto $\mathscr{F} \approx \overline{\mathscr{F}} \approx \overline{\mathscr{G}} \approx \overline{\mathscr{G}}_1 \oplus \overline{\mathscr{G}}_2$.

§ 2.

LEMMA: « *Sia R un dominio d'integrità noetheriano e sia M un R-modulo di tipo finito. Sono allora equivalenti fra loro le seguenti condizioni*:

a) *M è riflessivo (cioè l'omomorfismo canonico $\omega : M \longrightarrow M^{**}$ è un isomorfismo)*;
b) *$M \approx N^*$ (cioè M è isomorfo al duale di qualche R-modulo N di tipo finito)*;
c) *Esiste una sequenza esatta del tipo* $0 \longrightarrow M \longrightarrow R^p \xrightarrow{\varphi} R^q$ ».

Dimostrazione.

È immediato che *a*) implichi *b*) e che *b*) implichi *c*). Proviamo che *c*) implica *a*). Si ponga $H = Im\,(\varphi)$ e si consideri la sequenza esatta:

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow R^p \xrightarrow{\varphi} H \longrightarrow 0$$

(avendo indicato con φ anche l'omomorfismo $R^p \longrightarrow H$ indotto da $R^p \longrightarrow R^q$).

Dualizzando si ottengono le due sequenze esatte:

$$0 \longrightarrow H^* \longrightarrow R^p \longrightarrow N \longrightarrow 0\,,$$
$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M^* \longrightarrow Ext_R^1(H, R) \longrightarrow 0\,,$$

tenuto conto che $Ext_R^1(R^p, R) = 0$, e dualizzando ancora si ottengono le sequenze esatte:

$$0 \longrightarrow N^* \longrightarrow R^p \longrightarrow H^{**} \longrightarrow Ext_R^1(N, R) \longrightarrow 0\,,$$
$$0 \longrightarrow (Ext_R^1(H, R)^* \longrightarrow M^{**} \longrightarrow N^*\,.$$

Si osservi ora (cfr. [2] § 7, n. 10) che il modulo $(Ext_R^1(H, R))^*$ è nullo poichè ha rango zero in quanto duale di un modulo di tipo finito di rango zero ed è privo di torsione in quanto duale.

Si ottiene quindi la sequenza d'ordine 2 ed esatta in M^{**}: $0 \longrightarrow M^{**} \longrightarrow R^p \longrightarrow H^{**}$ che per di più soddisfa al seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & R^p & \longrightarrow & H & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle\omega}\downarrow & & \updownarrow & & \downarrow{\scriptstyle\omega'} & & \\ 0 & \longrightarrow & M^{**} & \longrightarrow & R^p & \longrightarrow & H^{**} & & \end{array}$$

ove ω, ω' sono omomorfismi canonici iniettivi (cfr. [4]).

Dal diagramma segue che ω è anche suriettivo e quindi un isomorfismo.

PROPOSIZIONE 2.: « *Sia V una varietà affine, irriducibile, soddisfacente alla P.E. e localmente normale e sia $\mathcal{F}$ un fascio algebrico coerente e liscio su V. Sono allora equivalenti le seguenti condizioni*:

a) *$\mathcal{F}$ è riflessivo, cioè l'omomorfismo canonico $\omega : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^{**}$ è un isomorfismo*;
b) *esiste un fascio algebrico coerente $\mathcal{G}$ tale che $\mathcal{F} \approx \mathcal{G}^*$*;
c) *esiste una sequenza esatta $0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{A}^p \longrightarrow \mathcal{A}^q$*;
d) *$\mathcal{F}$ soddisfa alla P.E.*

Ciò segue immediatamente tenuto conto del precedente lemma e della proposizione 1.

§ 3.

OSSERVAZIONE: « *Sia R un anello commutativo con unità e sia $\varphi : R^p \longrightarrow R^q$ un R-omomorfismo definito con una certa matrice (con q righe e p colonne) $M = \| m_{ij} \|$. Se $\bar{\varphi}$ è l'omomorfismo definito dalla matrice trasposta di M si ha allora $(Cnc(\varphi))^* \approx Nc(\bar{\varphi})$* ».

Infatti, basta tenere conto che dalla sequenza esatta $R^p \longrightarrow R^q \longrightarrow F \longrightarrow 0$ si ottiene, dualizzando, la sequenza esatta:

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow Hom_R(R^q, R) \longrightarrow Hom_R(R^p, R)$$

e si ha pure, indicati con ξ_1, ξ_2 gli usuali isomorfismi con cui si identificano gli R-moduli liberi di tipo finito con il loro duale, il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccc} 0 \longrightarrow F^* \longrightarrow & Hom_R(R^q, R) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\varphi, R)} & Hom_R(R^p, R) \\ & \downarrow \xi_1 & & \downarrow \xi_2 \\ & R^q & \xrightarrow{\quad \overline{\varphi} \quad} & R^p \end{array}$$

Proposizione 3.: « *Sia V una varietà algebrica affine irriducibile avente anello delle coordinate a fattorizzazione unica e si abbia su V la sequenza esatta:*

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{A}^3 \xrightarrow{\varphi} \mathscr{A} .$$

Allora $\mathscr{F}$ è isomorfo al suo duale ».

Dimostrazione.

Sia

$$\varphi(a_1, a_2, a_3) = P_1a_1 + P_2a_2 + P_3a_3 , \quad P_i \in \Gamma(V, \mathscr{A}) , \quad i = 1, 2, 3 .$$

Non è restrittivo supporre che P_1, P_2, P_3 siano primi fra loro. Infatti (escluso il caso banale $P_1 = P_2 = P_3 = 0$) se $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3$ sono primi fra loro e $P_i = Q \cdot \overline{P}_i$, $i = 1, 2, 3$, P_i, $Q \in \Gamma(V, \mathscr{A})$, l'omomorfismo $\varphi' : \mathscr{A}^3 \longrightarrow \mathscr{A}$ definito con $\varphi'(a_1, a_2, a_3) = {}_1^3\Sigma_i P_i a_i$ ha lo stesso nucleo di φ. Si consideri allora (supposti P_1, P_2, P_3 primi fra loro) la zero-sequenza (in generale non esatta):

$$0 \longrightarrow \mathscr{A} \xrightarrow{\psi} \mathscr{A}^3 \xrightarrow{\alpha} \mathscr{A}^3 \xrightarrow{\varphi} \mathscr{A}$$

con $\psi(1) = (P_1, P_2, P_3)$ ed α definito dalla matrice:

$$\left\| \begin{matrix} 0 & P_3 & -P_2 \\ -P_3 & 0 & P_1 \\ P_2 & -P_1 & 0 \end{matrix} \right\| .$$

Si osservi che poichè P_1, P_2, P_3 sono relativamente primi e $\mathscr{N}c(\alpha)$ è fascio localmente libero (cfr. [1]) su una varietà con anello delle coordinate a fattorizzazione unica, si ha che $\mathscr{I}m(\psi) = \mathscr{N}c(\alpha)$ e si osservi anche che il sottofascio $\mathscr{I}m(\alpha)$ di $\mathscr{A}^3$ è generato dalle tre sezioni globali s_1, s_2, s_3 ottenute con le tre righe della matrice sopra scritta.

Sia W il chiuso formato con i punti $(x) \in V$ per i quali tutti e tre i germi P_{ix}, $(i = 1, 2, 3)$, appartengono all'ideale massimale di $\mathscr{A}_x$. Proviamo che, posto $U = cW$, risulta: $(\mathscr{E}nc(\psi))|U \approx \approx (\mathscr{N}c(\varphi))|U$.

Si ha infatti: se ad esempio P_{1x} ammette inverso in $\mathscr{A}_x$, segue che se $(a_1, a_2, a_3)_x \in \mathscr{N}c(\varphi)$ allora $a_{1x} = -(P_2/P_1)_x a_{2x} - (P_3/P_1)_x a_{3x}$ e quindi posto $f_1 = 1$, $f_2 = (P_{2x} + a_{3x})P_{1x}$, $f_3 = (P_{3x} - a_{2x})/P_{1x}$ si ottiene:

$$(a_1, a_2, a_3)_x = {}_1^3\Sigma_i f_i s_{ix}, \ (x \in V), \qquad \text{cioè} \qquad (a_1, a_2, a_3)_x \in \mathscr{I}m(\alpha).$$

Poichè $Cdm(W) > 1$, da $\mathscr{E}nc(\psi) \mid U \approx \mathscr{N}c(\varphi) \mid U$ segue (corollario 1.1) che $(\mathscr{E}nc(\psi))^* \approx (\mathscr{N}c(\varphi))^*$ e in base alla precedente osservazione (applicata all'omomorfismo $\mathscr{A}^3 \xrightarrow{\varphi} A$) $\mathscr{N}c(\varphi) \approx \approx (\mathscr{N}c(\varphi))^*$.

Osservazione: È banale che, data la sequenza esatta $0 \longrightarrow \longrightarrow \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{A}^2 \longrightarrow \mathscr{A}$ risulta $\mathscr{M} \approx \mathscr{M}^*$ giacchè in questo caso M è localmente libero e per le ipotesi fatte su V, libero.

§ 4.

Esempio di sequenza esatta del tipo: $0 \longrightarrow \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{A}^4 \longrightarrow \mathscr{A}$ su V (come sopra) per la quale $\mathscr{M}$ risulta non isomorfo ad $\mathscr{M}^*$.

Sia: $\mathscr{A}^4 \xrightarrow{\varphi} \mathscr{A}$ l'omomorfismo (su $V = K^4$) definito con: $\varphi(a_1, a_2, a_3, a_4) = {}_1^4\Sigma_i X_i a_i$ ($K[X_1, X_2, X_3, X_4]$ essendo l'anello dei polinomi a quattro variabili su K) e sia $\mathscr{F} = \mathscr{N}c(\varphi)$.

Indicato con (o) il punto origine di K^4, si osservi che l'$\mathscr{A}_0$-modulo $I = \varphi_0(\mathscr{A}_0^4) = Im(\varphi_0)$ ha dimensione coomologica 3 (cfr. [3]) e quindi che la fibra $\mathscr{F}_0$ non è generabile con meno di 5 elementi poichè (tenuto conto che $rg(\mathscr{F}) = 3$) se $\mathscr{F}_0$ fosse generato da tre elementi sarebbe $\mathscr{A}_0$-modulo libero e se fosse generato da quattro elementi si potrebbe costruire una sequenza esatta: $0 \longrightarrow \mathscr{A}_0 \longrightarrow \longrightarrow \mathscr{A}_0^4 \longrightarrow \mathscr{F}_0 \longrightarrow 0$ (ed I avrebbe dimensione coomologica < 3). A maggior ragione il fascio $\mathscr{F}$ non è generabile con meno di 5 sezioni globali.

Per dimostrare che $\mathscr{F}$ non è isomorfo al suo duale basta allora verificare che quest'ultimo è generato da quattro sezioni globali.

Si ha infatti:

definito l'omomorfismo $\mathscr{A} \xrightarrow{\psi} \mathscr{A}^4$ con $\psi(1) = (X_1, X_2, X_3, X_4)$, in base alla precedente osservazione del § 3 risulta, posto $\mathscr{G} = \mathscr{C}nc(\psi)$, che $\mathscr{G}^* \approx \mathscr{F}$ e quindi, per concludere che $\mathscr{F}^* \approx \mathscr{G}$ (e che perciò $\mathscr{F}^*$ è generato da 4 sezioni), basta verificare che $\mathscr{G} = \overline{\mathscr{G}}$ $(\in P.E.)$.

Ciò si può fare direttamente tenendo conto che $X(\mathscr{G}) = (o, o, o, o)$ (cioè tenendo conto che fuori dell'origine di K_4 il fascio $\mathscr{G}$ è localmente libero) oppure osservando che si può costruire una sequenza esatta su K^4:

$$0 \longrightarrow \mathscr{A} \xrightarrow{\psi} \mathscr{A}^4 \xrightarrow{\alpha} \mathscr{A}^6 \xrightarrow{\beta} \mathscr{A}^4 \xrightarrow{\varphi} \mathscr{A}$$

in cui gli omomorfismi φ, ψ sono quelli sopra definiti, l'omomorfismo β è definito con la matrice:

$$B = \| b_{i,k} \| = \left\| \begin{matrix} X_2 & X_3 & X_4 & 0 & 0 & 0 \\ -X_1 & 0 & 0 & X_3 & -X_4 & 0 \\ 0 & -X_1 & 0 & -X_2 & 0 & X_4 \\ 0 & 0 & -X_1 & 0 & X_2 & -X_3 \end{matrix} \right\|$$

ed α con la matrice $C = \| b_{6-k,i} \|$.

Ne segue senz'altro $\mathscr{G} = \overline{\mathscr{G}}$ poichè $\mathscr{C}nc(\psi) = \mathscr{I}m(\alpha) = \mathscr{N}n(\beta) \in P.E.$

Osservazione: Visto il precedente esempio, si può considerare la sequenza esatta:

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \oplus \mathscr{A}^s \longrightarrow \mathscr{A}^{4+s} \longrightarrow \mathscr{A} \quad \text{(con } s \text{ intero qualunque} > 0)$$

dal che seguono analoghi esempi per il caso delle sequenze del tipo:

$$0 \longrightarrow \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{A}^n \longrightarrow \mathscr{A} \quad \text{con} \quad n > 4 .$$

BIBLIOGRAFIA

[1] BALDASSARRI M.: *Osservazioni sulla struttura dei fasci lisci.* Atti del convegno internazionale di geometria algebrica tenuto a Torino nel maggio 1961.

[2] BOURBAKI N.: *Algébre.* Ch. II (II ed.), Hermann, Paris.

[3] GRÖBNER W.: *Moderne algebrische Geometrie.* Springer-Verlag.

[4] JANS J. P.: *Duality in Noetherian rings.* Proceedings of the Amer. Math. Soc. Vol. 12, n. 5, (X-1961).

[5] MARGAGLIO C.: *Una dimostrazione elementare della proprietà di estensione per il fascio degli anelli locali di uno spazio affine ed alcune applicazioni di tale proprietà.* Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova. Vol. XXXIII, (1963).

6] SERRE J. P.: *Faisceaux algébriques cohérents.* Ann. of Math., 61 pp. 197-278.