Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Mario Dolcher

Su un criterio di convergenza uniforme per le successioni monotone di funzioni quasi-periodiche

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 34 (1964), p. 191-199

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1964__34__191_0>

SU UN CRITERIO DI CONVERGENZA UNIFORME PER LE SUCCESSIONI MONOTONE DI FUNZIONI QUASI-PERIODICHE

Nota (*) *di* MARIO DOLCHER (*a Trieste*) (**)

A guisa di lemma per il raggiungimento di risultati sulle soluzioni quasi-periodiche di certe equazioni alle derivate parziali, L. Amerio [2] ha dimostrato un interessante teorema sulle successioni monotone di funzioni quasi-periodiche. La dimostrazione, del tutto diretta, che egli ne dà e il controesempio che costruisce mi hanno indotto ad indagare sul significato del teorema, ridimostrandolo per una via più « naturale ».

Trattandosi di un teorema che genericamente può dirsi « del tipo del Dini » (dalla convergenza monotona di una successione di funzioni se ne deduce la convergenza uniforme), la via più naturale mi è parsa l'applicazione del teorema del Dini, profittando del fatto che un ambiente compatto è a portata di mano, potendosi utilizzare la cosiddetta compattizzazione di Bohr della retta reale. L'ambientare le funzioni quasi-periodiche in tale spazio compatto rende ragione del significato di alcune proprietà che limitatamente alla retta reale si presentano fin troppo riposte.

Per lo studio della questione mi è stato utile un recente lavoro di E. M. Alfsen e P. Holm [1], nel quale appaiono rielaborati e generalizzati i fondamenti topologici della detta compattizzazione.

(*) Pervenuta in redazione il 30 luglio 1963.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Trieste.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R.

Aggiungo che il teorema di Amerio ha attirato l'attenzione di S. Bochner [3], il quale, con intendimento tutto diverso da quello della presente Nota, lo ha ravvicinato al teorema del Dini [1]).

Nelle Premesse ho indicato per esteso tutte e sole le proposizioni che servono come ingredienti per la dimostrazione del Teorema: si tratta di proposizioni banali o ben note, ad eccezione forse della prop. 5, della quale dò dimostrazione.

PREMESSE

1. – Sia f una funzione definita in un insieme E, con valor in uno spazio di Hausdorff E'; detto $\mathfrak{F}$ un filtro su E, $\lim_{\mathfrak{F}} f = y$ $(\in E')$ significa che per ogni intorno V di y esiste $F \in \mathfrak{F}$ tale che $f(F) \subset V$.

PROP. 1: *Siano E, E', $\mathfrak{F}$, f quali ora si è detto, e sia $F \in \mathfrak{F}$. Allora, se esiste* $\lim_{\mathfrak{F}_F} f|_F$ [2]), *esiste anche* $\lim_{\mathfrak{F}} f$ *ed è uguale a quello.*

PROP. 2: *Sia f un'applicazione continua di uno spazio topologico E in uno spazio di Hausdorff E'; sia $\mathfrak{F}$ un filtro su E, ed esista* $\lim_{\mathfrak{F}} f = y$. *Allora, per ogni punto $\alpha (\in E)$ aderente ad $\mathfrak{F}$* (ossia tale che sia $U \cap F \neq \emptyset$ per ogni intorno U di α e per ogni $F \in \mathfrak{F}$) *si ha $f(\alpha) = y$.*

Ad ogni successione $\mathfrak{a} = \{\alpha_k\}$ di elementi di un insieme E resta associato un filtro su E [3]), che indicheremo con lo stesso simbolo $\mathfrak{a}$. Se E è spazio topologico e se f è una sua applicazione in uno spazio di Hausdorff E', l'esistenza di $\lim\limits_{k \to \infty} f(\alpha_k)$ equivale all'esistenza di $\lim_{\mathfrak{a}} f$, e i due limiti coincidono.

---

1) Più precisamente, il BOCHNER stabilisce, in condizioni molto generali, e cioè per quelle che chiama *funzioni quasi-automorfe*, un risultato che contiene come casi particolari tanto il teorema del DINI quanto quello di AMERIO: si prescinde del tutto — per la parte che riguarda il teorema di AMERIO — dalla topologia dell'insieme dove le funzioni sono definite, e si fanno invece opportune ipotesi sul comportamento delle funzioni rispetto a un gruppo di sostituzioni operante sull'insieme.

2) Con $f|_F$ ed $\mathfrak{F}|_F$ indichiamo risp. la restrizione della f ad F e la traccia di $\mathfrak{F}$ su F.

3) Cfr. N. BOURBAKI, [4], chap. I, § 6.

Se $\{a_k\}$ è una successione di punti di uno spazio topologico E, diremo che $a(\in E)$ è *aderente alla successione* se e solo se è aderente al relativo filtro. Essendo che la compattezza [4]) di uno spazio topologico E equivale all'esistenza di un punto aderente per ogni filtro su E, si ha, in particolare, che in uno spazio compatto ogni successione ammette almeno un punto aderente; cosa che peraltro non implica l'esistenza di una sottosuccessione convergente.

PROP. 3: *Un'applicazione continua di uno spazio topologico E in uno spazio di Hausdorff resta individuata dalla sua restrizione ad un insieme D denso in E.*

PROP. 4: *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni continue, a valori reali, definite in uno spazio topologico E. Se la successione $\{f_n|_D\}$ delle loro restrizioni ad un insieme D denso in E è monotona, per esempio non-crescente, lo stesso è per la successione $\{f_n\}$.*

PROP. 5: *Sia φ una funzione a valori reali semicontinua, per esempio superiormente, definita in uno spazio topologico E; detta $\{D_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una famiglia di sottoinsiemi densi in E ricoprente E, si supponga che per ogni $\alpha \in I$ la restrizione $\varphi|_{D_\alpha}$ sia prolungabile ad una funzione continua φ_α definita iu E. In queste ipotesi, la φ è continua, ed è $\varphi = \varphi_\alpha$ per ogni $\alpha \in I$.*

DIM.: Suppongansi esistere α, $\beta \in I$ con $\varphi_\alpha \neq \varphi_\beta$; sia per esempio $\varphi_\alpha(x_0) > \varphi_\beta(x_0)$. Dalla continuità delle due funzioni segue allora l'esistenza di un intorno U di x_0 tale che per x', $x'' \in U$ è $\varphi_\alpha(x') > > \varphi_\beta(x'') + \eta$ con opportuno $\eta > 0$. In ogni punto x_β di $D_\beta \supset U$ si ha $\varphi(x_\beta) = \varphi_\beta(x_\beta)$; inoltre, per la supposta semicontinuità (in x_β) della φ, si ha, in un opportuno intorno $V(\subset U)$ di x_β:

$$\varphi(x) < \varphi(x_\beta) + \eta = \varphi_\beta(x_\beta) + \eta < \varphi_\alpha(x) ,$$

il che contraddice all'esistenza in V di punti di D_α, nei quali il valore della φ coincide per ipotesi con quello della φ_α.

---

[4]) Parlando di spazi compatti, non intendiamo limitarci agli spazi di Hausdorff (anche se poi quello che interviene nel Teorema lo è).

Le funzioni continue φ_α $(\alpha \in I)$ coincidono dunque tutte e, tenuto conto del fatto che è $\bigcup_{\alpha \in I} D_\alpha = E$, la φ coincide con esse.

La proposizione ora dimostrata verrà utilizzata nelle condizioni seguenti: E è un gruppo abeliano topologico, D_0 è un suo sottogruppo denso in E, D_α (per ogni $\alpha \in E$) sono le classi laterali di E rispetto a D_0 (cfr. prop. 7).

PROP. 6 (*Teorema del Dini*): *Se $\{f_n\}$ è una sua successione monotona di funzioni continue a valori reali definite in uno spazio compatto e convergente puntualmente verso una funzione f continua, la convergenza della successione verso la f è uniforme.*

2. – Detto G un gruppo abeliano topologico e G_0 un suo sottogruppo, indicheremo con $G_\alpha (\alpha \in G)$ le classi laterali rispetto a G_0; ossia $G_\alpha = \alpha + G_0$.

PROP. 7: *Se, nelle condizioni ora dette, G_0 è denso in G* [5], *anche ogni classe G_α è densa in G.*

Se $\mathfrak{F}$ è un filtro su un gruppo abeliano topologico G, indichiamo con $\alpha + \mathfrak{F}$ (quale che sia $\alpha \in G$) il filtro $\{\alpha + F : F \in \mathfrak{F}\}$; ovvio sarà poi il significato del simbolo $-\mathfrak{F}$. Evidentemente, l'essere β aderente ad $\mathfrak{F}$ equivale all'essere $-\beta$ aderente a $-\mathfrak{F}$ e all'essere $\alpha + \beta$ aderente ad $\alpha + \mathfrak{F}$. In particolare, se $\mathfrak{a}$ è il filtro associato ad una successione $\{\alpha_k\}$ di punti di G, $x + \mathfrak{a}$ e $-\mathfrak{a}$ sono i filtri associati rispettivamente alle successioni $\{x + \alpha_k\}$ e $\{-\alpha_k\}$.

Se f è un'applicazione di un gruppo abeliano topologico G in un insieme E' (in particolare, una funzione a valori reali), per ogni $\alpha \in G$ chiamiamo *α-traslata della f* la f_α definita da

$$f_\alpha(x) = f(x - \alpha)\,.$$

La proposizione seguente è un corollario immediato delle prop. 3 e 7.

PROP. 8: *Siano f, g due applicazioni continue di un gruppo abeliano topologico G in uno spazio di Hausdorff E'; sia G_0 un sottogruppo denso di G e si supponga che la restrizione $g|_{G_0}$ sia*

---

[5]) Ossia se è $\overline{G}_0 = G$; non usiamo qui la parola *denso* col significato del « *relatively dense* ».

la c-traslata, con $c \in G_0$, della $f|_{G_0}$. Allora anche la g è la c-traslata della f.

3. – Richiamo infine alcune proposizioni sulle funzioni quasi-periodiche.

Detto G un gruppo abeliano topologico [6]), sia T l'insieme delle funzioni (a valori reali) quasi-periodiche definite in G, e come distanza di due funzioni f, g ($\in T$) si assuma $\sup_{x \in G} | f(x) - g(x) |$. Nello spazio metrico così ottenuto, per ogni f il sottospazio $T_f = \{f_\alpha : \alpha \in G\}$ è precompatto (= totally bounded) [7]). Diciamo che una successione $\{\alpha_k\}$ di elementi di G è *regolare rispetto alla f* se la $\{f_{\alpha_k}\}$ è una successione di Cauchy. Essendo che in uno spazio metrico precompatto ogni successione ammette una sottosuccessione di Cauchy, possiamo formulare la seguente fondamentale constatazione.

Prop. 9: *Se f è quasi-periodica, ogni successione di elementi di G ammette una sottosuccessione regolare per la f.*

Mediante un procedimento di tipo « diagonale » si giunge poi al seguente (apparente) rafforzamento della prop. 9.

Prop. 10: *Se $\{f^i : i \in I\}$ è una famiglia numerabile di funzioni quasi-periodiche su G, ogni successione di elementi di G ammette una sottosuccessione la quale è regolare per ciascuna delle f^i.*

È poi ben noto il fatto seguente.

Prop. 11: *Lo spazio T è completo* [8]); *dunque, se f è quasi-periodica e se $\{\alpha_k\}$ è regolare per essa, anche la funzione-limite delle sue α_k-traslate è quasi-periodica.*

Ogni gruppo topologico G ammette una « rappresentazione compatta massimale » $(\widehat{G}, \varrho)$: esiste cioè un gruppo topologico compatto $\widehat{G}$ ed una rappresentazione (= omomorfismo continuo)

---

[6]) Che il gruppo topologico G sia abeliano è inessenziale ai fini di tutti i risultati qui richiamati e dello stesso teorema di Amerio; senonchè il prescindere dall'ipotesi commutativa darebbe qualche fastidio con l'obbligare, almeno a priori, a distinguere fra quasi-periodicità a destra e a sinistra. Cfr. ad es. E. M. Alfsen e P. Holm [1].

[7]) Questa proprietà è contenuta nella definizione (o criterio) di Bochner. Cfr. ad es. L. H. Loomis [5], pag. 165.

[8]) Vedi ad es. L. H. Loomis [5], pag. 166.

$\varrho : G \to \widehat{G}$ tale che ogni rappresentazione $\xi : G \to G'$ con G' gruppo topologico compatto si fattorizzi in unico modo attraverso la ϱ (ossia, esista una e una sola $\xi' : \widehat{G} \to G'$ tale che $\xi = \xi' \circ \varrho$).

L'importanza di questo risultato ai nostri fini appare dalla

PROP. 12: *Una funzione f a valori reali definita in un gruppo topologico G è quasi-periodica se e solo se esiste una funzione $\widehat{f}$ continua definita in $\widehat{G}$ tale che sia $\widehat{f} \circ \varrho = f$* [9]).

Se il gruppo topologico G è tale che per ogni coppia x_1, x_2 di suoi elementi distinti esiste una funzione quasi-periodica f per la quale è $f(x_1) \neq f(x_2)$, allora è manifesto che l'applicazione ϱ è biunivoca fra G e $\varrho(G)$. Tale è il caso del gruppo additivo R dei numeri reali dotato della topologia ordinaria: posto $\varrho(R) = R_0 \subset \widehat{R}$, R_0 come gruppo è isomorfo ad R, ed è dotato di una topologia più grossa di quella di R. Più precisamente [10]), la struttura uniforme del gruppo topologico R_0 è precompatta, ed R ne è il completamento.

TEOREMA

Sia $\{f_n\}$ una successione non-crescente di funzioni quasi-periodiche equilimitate inferiormente, f la sua funzione-limite. Per ogni successione $\mathfrak{a} = \{\alpha_k\}$ di numeri reali regolare per tutte le f_n, posto $f_{n,\alpha_k}(x) = f_n(x - \alpha_k)$, si indichi con $f_{n,\mathfrak{a}}$ la funzione-limite (che è quasi-periodica) della $\{f_{n,\alpha_k}\}_{k=1,2,\ldots}$.

In questa situazione, se per ogni successione $\mathfrak{a}$ regolare per tutte le f_n la funzione $f_{\mathfrak{a}}$ definita da

$$f_{\mathfrak{a}}(x) = \lim_{n\to\infty} f_{n,\mathfrak{a}}(x)$$

è quasi-periodica, allora la convergenza di $\{f_{n,\mathfrak{a}}\}$ verso $f_{\mathfrak{a}}$ è uniforme per ogni $\mathfrak{a}$ regolare. In particolare — essendo che la successione nulla è, in ogni caso, regolare — la $\{f_n\}$ converge uniformemente verso la f.

---

[9]) Questi risultati risalgono sostanzialmente, almeno per il caso dei gruppi abeliani localmente compatti, a A. WEIL [6]. Per una loro esposizione nelle ipotesi più larghe vedi ancora E. M. ALFSEN e P. HOLM [1].

[10]) Vedasi E. M. ALFSEN e P. HOLM [1].

DIMOSTRAZIONE.

La quasi-periodicità delle funzioni f_n, f, f_{n,α_k}, $f_{n,\mathfrak{a}}$, $f_{\mathfrak{a}}$ implica (prop. 12 e osservazione che la segue) l'esistenza di funzioni $\widehat{f_n}$, $\widehat{f}$, $\widehat{f_{n,\alpha_k}}$, $\widehat{f_{n,\mathfrak{a}}}$, $\widehat{f_{\mathfrak{a}}}$ che le prolungano con continuità ad $\widehat{R}$ [11]). Le $\widehat{f_{n,\alpha_k}}$ sono le α_k-traslate delle $\widehat{f_n}$ poichè le loro restrizioni f_{n,α_k} ad R_0 lo sono delle f_n (prop. 8).

Indichiamo con $\mathbf{A}_n$ $(n = 1, 2, ...)$ l'insieme delle successioni di numeri reali che sono regolari per la f_n, e sia $\mathbf{A} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbf{A}_n$. Ogni successione di numeri reali ammette una sottosuccessione appartenente ad $\mathbf{A}$ (prop. 10).

Per ogni successione $\mathfrak{a}$, la compattezza di $\widehat{R}$ assicura l'esistenza di almeno un punto α (in generale non reale) aderente ad $\mathfrak{a}$; allora, quale che sia $t \in \widehat{R}$, il punto $t - \alpha$ è aderente alla successione $t - \mathfrak{a}$.

Indicando con $\widehat{f_{n,\alpha}}$, *per ogni* α *di* $\widehat{R}$, la α-traslata della $\widehat{f_n}$, proviamo che se è $\mathfrak{a} \in \mathbf{A}_n$, per ogni α aderente ad $\mathfrak{a}$ si ha $\widehat{f_{n,\mathfrak{a}}} = \widehat{f_{n,\alpha}}$. All'uopo, accertiamo che ogni $\widehat{f_n}$ si trova, in relazione ad ogni $\mathfrak{a} \in \mathbf{A}_n$, nelle condizioni previste dalla prop. 2. Per ipotesi esiste, *per ogni* x *reale*, $\lim_{x-\mathfrak{a}} f_n$, che è $f_{n,\mathfrak{a}}(x)$; dunque anche esiste (prop. 1) $\lim_{x-\mathfrak{a}} \widehat{f_n}$ ed è $f_{n,\mathfrak{a}}(x)$ $(= \widehat{f_{n,\mathfrak{a}}}(x))$. Inoltre, la $\widehat{f_n}$ è continua. Ne viene (prop. 2) $\widehat{f_{n,\mathfrak{a}}}(x) = \widehat{f_{n,\alpha}}(x)$ per ogni $x \in R_0$. Dalla densità di R_0 in $\widehat{R}$ e dalla continuità delle due funzioni si deduce poi (prop. 3) che l'uguaglianza stessa sussiste in tutto $\widehat{R}$.

La successione $\{\widehat{f_n}\}$ è, al pari della $\{f_n\}$, non-crescente (prop. 4) e inferiormente limitata da una costante. Lo stesso vale manifestamente per la successione $\{\widehat{f_{n,\mathfrak{a}}}\}$ che si ottiene, come si è visto, dalla $\{\widehat{f_n}\}$ mediante una α-traslazione.

Esistono dunque in $\widehat{R}$ le funzioni-limite

$$\varphi(t) = \lim_{n\to\infty} \widehat{f_n}(t), \qquad \varphi_{\mathfrak{a}}(t) = \lim_{n\to\infty} \widehat{f_{n,\mathfrak{a}}}(t)$$

---

[11]) Data la corrispondenza biunivoca (che è anche isomorfismo di gruppo) fra R ed R_0 $(\subset \widehat{R})$, indichiamo col medesimo simbolo una funzione definita in R e « la medesima pensata su R_0 ». Poichè tuttavia la topologia di R è (strettamente) più fine di quella di R_0, il termine *prolungamento* che usiamo è alquanto improprio; comunque, il significato ne è chiaro e non può nascerne equivoco.

le quali, in quanto limiti di successioni non-crescenti, sono semicontinue superiormente. Essendosi provato che ogni $\widehat{f}_{n,\mathfrak{a}}$ (con $\mathfrak{a} \in \mathrm{A}$) è la α-traslata di $\widehat{f}_n$ (per ogni α aderente ad $\mathfrak{a}$), lo stesso fatto sussiste per le funzioni-limite; si ha $\varphi_{\mathfrak{a}}(t) = \varphi(t - \alpha)$ per ogni $t \in \widehat{R}$.

Passiamo ora ad accertare la continuità della φ; ne seguirà facilmente la tesi.

All'uopo proviamo dapprima che la restrizione della φ ad $R_{-\alpha}$ coincide con la restrizione della $(\widehat{f}_{\mathfrak{a}})_{-\alpha}$, ossia che si ha

$$\varphi\,|_{R_{-\alpha}} = (\widehat{f}_{\mathfrak{a}})_{-\alpha}\,|_{R_{-\alpha}}$$

[con la solita notazione per le traslate: $(\widehat{f}_{\mathfrak{a}})_{-\alpha}(t) = \widehat{f}_{\mathfrak{a}}(t + \alpha)$].

Si ha infatti *per ogni x reale*, ossia per $x - \alpha \in R_{-\alpha}$:

$$\varphi(x - \alpha) = \lim_{n\to\infty} \widehat{f}_n(x - \alpha) = \lim_{n\to\infty} \widehat{f}_{n,\mathfrak{a}}(x) = \widehat{f}_{\mathfrak{a}}(x) = (\widehat{f}_{\mathfrak{a}})_{-\alpha}(x - \alpha).$$

Dunque: su ogni classe laterale $R_{-\alpha}$ la φ ha una restrizione prolungabile con continuità ad $\widehat{R}$. In virtù della prop. 5 possiamo concludere che la φ è continua; ed essendo $\varphi\,|_{R_0} = \widehat{f}\,|_{R_0}$, attesa la densità di R_0 in $\widehat{R}$ si ha

$$\varphi = \widehat{f}.$$

Alla successione monotona $\{\widehat{f}_n\}$ di funzioni continue sul compatto, avente come limite la funzione continua φ, è applicabile il teorema del Dini (prop. 6): la convergenza della successione è uniforme in $\widehat{R}$.

Restringendoci, infine, al campo reale R_0 e tenuto conto che è $\widehat{f}_n\,|_{R_0} = f_n$, $\varphi|_{R_0} = f$, si ha che la $\{f_n\}$ converge uniformemente alla f. E ancora, dall'essere le $\widehat{f}_{n,\mathfrak{a}}$ e la $\varphi_{\mathfrak{a}}$ le α-traslate rispettivamente delle f_n e della φ si deduce la convergenza uniforme di $\{f_{n,\mathfrak{a}}\}$ verso la $\varphi_{\mathfrak{a}}$; in particolare, restringendoci ad R_0, di $\{f_{n,\mathfrak{a}}\}$ verso la $f_{\mathfrak{a}}(= \varphi_{\mathfrak{a}}\,|_{R_0})$.

Osservazione.

L'enunciato e la dimostrazione del Teorema conservano validità per il caso di funzioni quasi-periodiche definite su un gruppo topologico affatto arbitrario: nel caso abeliano la dimostrazione non abbisogna di alcuna modifica, mentre nel caso generale occorrono leggere modifiche, comunque ovvie e di natura esclusivamente espositiva. Va comunque notato che anche la dimostrazione data da Amerio è sostanzialmente valida per il detto caso generale.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. M. ALFSEN e P. HOLM: *A note on compact representations and almost periodicity in topological groups*. Math. Scandinavica 10, p. 127-136 (1962).

[2] L. AMERIO: *Quasi-periodicità degli integrali ad energia limitata dell'equazione delle onde, con termine noto quasi-periodico* (Note I, II, III). Rend. Accad. Naz. Lincei, serie VIII, vol. XXVIII (1960), fasc. 2, p. 147-152; fasc. 3, p. 1-6; fasc. 4, p. 1-6.
(Per i nostri scopi, interessa esclusivamente la Nota II).

[3] S. BOCHNER: *Uniform convergence of monotone sequences of functions*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 47 (1961), p. 582-585.

[4] N. BOURBAKI: *Topologie générale, chap. I, II*. 3ème édition. Hermann, Act. Scient. Ind. n. 1142. Paris, 1951.

[5] L. H. LOOMIS: *An introduction to Abstract Harmonic Analysis*. Van Nostrand, New York, 1953.

[6] A. WEIL: *Sur les fonctions presque périodiques de von Neumann*. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 200 (1935), p. 38.

[7] A. WEIL: *L'intégration dans les groupes topologiques*, 2ème édition (Hermann, Act. Scient. Ind. 1145). Paris, 1953.