

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ETTORE BENTSIK

**Sulle deformazioni elastiche dovute ad una  
sollecitazione riducibile a due coppie in equilibrio**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 33 (1963), p. 297-304

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1963\\_\\_33\\_\\_297\\_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1963__33__297_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SULLE DEFORMAZIONI ELASTICHE DOVUTE AD UNA SOLLECITAZIONE RIDUCIBILE A DUE COPPIE IN EQUILIBRIO

*Nota \*) di ETTORE BENTSIK (a Padova) \*\*)*

Mostrerò come l'applicazione di note proprietà di media dello stress porti ad interessanti limitazioni per le deformazioni dei corpi elastici soggetti a speciali sollecitazioni. Nei casi di sollecitazioni del tipo a flessione uniforme e a torsione si ottengono formule analoghe a quelle valide nello schema di approssimazione di De Saint-Venant, pur non trattandosi ora di corpi cilindrici, e si riconosce che le deformazioni ottenute in quello schema di approssimazione sono in media inferiori a quelle presunte dal sistema differenziale dell'elasticità.

## 1. Premesse di carattere generale.

Sia  $\mathcal{C}$  un qualunque corpo elastico poco deformabile il cui contorno consti di tre parti  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$  tali che: a) su  $\Sigma_1$  agisce un sistema di forze parallele di vettore  $f_1$  e versore  $v_1$  riducibile ad una coppia di momento  $M \neq 0$ ; b) su  $\Sigma_2$  agisce un sistema di

---

\*) Pervenuta in redazione il 3 marzo 1963.

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

\*\*) Lavoro eseguito nell'ambito della attività dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R.

forze parallele di vettore  $f_2$  e versore  $v_2$  riducibile alla coppia di momento- $M$ ; c)  $\Sigma_2$  non è soggetto a forze.

Si pensi diviso  $\Sigma_i$  ( $i = 1, 2$ ) in due parti  $\Sigma'_i, \Sigma''_i$  e siano  $R'_i$  e  $R''_i = -R'_i$  i risultanti delle sollecitazioni agenti su di esse e, supposto  $R'_i \neq 0$ , siano  $C'_i, C''_i$  i loro centri.

Si ha pertanto

$$\begin{aligned} (1) \quad f_1 &= f_1 v_1, & f_2 &= f_2 v_2, \\ (2) \quad R'_1 &= R'_1 v_1, & R''_1 &= R''_1 v_1, \\ & R'_2 &= R'_2 v_2, & R''_2 &= R''_2 v_2, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} (3) \quad R'_1 &= \int_{\Sigma'_1} f_1 d\Sigma'_1, & R''_1 &= \int_{\Sigma''_1} f_1 d\Sigma''_1 = -R'_1, \\ R'_2 &= \int_{\Sigma'_2} f_2 d\Sigma'_2, & R''_2 &= \int_{\Sigma''_2} f_2 d\Sigma''_2 = -R'_2. \end{aligned}$$

Risulta inoltre

$$\begin{aligned} (4) \quad M &= \int_{\Sigma'_1} OP \wedge f_1 d\Sigma'_1 + \int_{\Sigma''_1} OP \wedge f_1 d\Sigma''_1 = \\ &= - \left[ \int_{\Sigma'_2} OP \wedge f_2 d\Sigma'_2 + \int_{\Sigma''_2} OP \wedge f_2 d\Sigma''_2 \right]. \end{aligned}$$

Posto  $|C'_1 C''_1| = l_1$ ,  $|C'_2 C''_2| = l_2$ , sia

$$(5) \quad C'_1 C''_1 = l_1 u_1, \quad C'_2 C''_2 = l_2 u_2.$$

Se si indicano con  $\varphi_{1r}, \varphi_{2r}, \Psi_{1r}, \Psi_{2r}$  i coseni direttori rispettivamente di  $v_1, v_2, u_1, u_2$  si vede subito che, indicate con  $M_r$  le componenti di  $M$  secondo gli assi di una terna prefissata  $0 x_1 x_2 x_3$

si ha

$$\begin{aligned}
 M_1 &= -l_1 R'_1 (\varphi_{12} \Psi_{12} - \varphi_{12} \Psi_{12}) = l_1 R'_1 (\varphi_{22} \Psi_{22} - \varphi_{22} \Psi_{22}) , \\
 (6) \quad M_2 &= -l_1 R'_1 (\varphi_{11} \Psi_{12} - \varphi_{12} \Psi_{11}) = l_2 R'_2 (\varphi_{21} \Psi_{22} - \varphi_{22} \Psi_{21}) , \\
 M_3 &= -l_1 R'_1 (\varphi_{12} \Psi_{11} - \varphi_{11} \Psi_{12}) = l_2 R'_2 (\varphi_{22} \Psi_{21} - \varphi_{21} \Psi_{22}) .
 \end{aligned}$$

In particolare, se si suppone che i vettori  $C'_1 C''_1$  e  $C'_2 C''_2$  siano paralleli al piano  $0 x_2 x_3$  e si indica con  $l$  la distanza tra i piani per  $C'_1 C''_1$  e  $C'_2 C''_2$  paralleli al predetto piano, si ha

$$(7) \quad \Psi_{i1} = 0 \quad (i = 1, 2) ,$$

$$(8) \quad x_1^{c'_1} - x_1^{c''_1} = l , \quad x_1^{c'_2} - x_1^{c''_2} = l .$$

Convien osservare che la direzione del vettore  $C'_1 C''_1$  non dipende dal modo come  $\Sigma_1$  è diviso nelle due parti  $\Sigma'_1$ ,  $\Sigma''_1$ .

Infatti, si ha

$$(9) \quad OC'_1 = \frac{1}{R'_1} \int_{\Sigma'_1} OP f_1 d\Sigma'_1 , \quad OC''_1 = \frac{1}{R''_1} \int_{\Sigma''_1} OP f_1 d\Sigma''_1 ,$$

e quindi, tenuto conto delle (3),

$$(10) \quad C'_1 C''_1 = - \frac{1}{R'_1} \int_{\Sigma_1} OP f_1 d\Sigma_1 .$$

La (10) mostra che la direzione del vettore  $C'_1 C''_1$  è quella del vettore non nullo  $\int_{\Sigma_1} OP f_1 d\Sigma_1$  indipendente dalla suddivisione di  $\Sigma_1$  considerata.

Analogamente il vettore  $C'_2 C''_2$  ha direzione indipendente dalla suddivisione considerata per  $\Sigma_2$ .

## 2. Lavoro della sollecitazione esterna per uno spostamento infinitesimo dei punti di applicazione delle forze.

Detti  $\delta C'_1$ ,  $\delta C''_1$ ,  $\delta C'_2$ ,  $\delta C''_2$  gli spostamenti infinitesimi di  $C'_1$ ,  $C''_1$ ,  $C'_2$ ,  $C''_2$  per effetto della deformazione del corpo, il lavoro,

$\delta L$ , della sollecitazione totale è espresso da

$$(11) \quad \delta L = \mathbf{R}'_1 \times (\delta C'_1 - \delta C''_1) + \mathbf{R}'_2 \times (\delta C'_2 - \delta C''_2) .$$

Dalle (5) segue

$$(12) \quad \begin{aligned} \delta C'_1 - \delta C''_1 &= -\delta l_1 \mathbf{u}_1 - l_1 \boldsymbol{\Theta}_1 \wedge \mathbf{u}_1 , \\ \delta C'_2 - \delta C''_2 &= -\delta l_2 \mathbf{u}_2 - l_2 \boldsymbol{\Theta}_2 \wedge \mathbf{u}_2 , \end{aligned}$$

ove  $\boldsymbol{\Theta}_1$  e  $\boldsymbol{\Theta}_2$  sono i vettori che rispettivamente individuano le rotazioni delle rette  $C'_1 C''_1$  e  $C'_2 C''_2$ .

Dalle (11), (12) segue quindi

$$(13) \quad \delta L = -\delta l_1 \mathbf{R}'_1 \times \mathbf{u}_1 - \delta l_2 \mathbf{R}'_2 \times \mathbf{u}_2 + \boldsymbol{\Theta}^* \times \mathbf{M} ,$$

dove si è posto  $\boldsymbol{\Theta}^* = \boldsymbol{\Theta}_1 - \boldsymbol{\Theta}_2$ .

### 3. Disuguaglianze di carattere generale per l'energia elastica e per il lavoro delle forze interne.

Si supponga la terna di riferimento  $0 x_1 x_2 x_3$  centrale d'inerzia e trirettangolo levogira e si indichino con  $E$  il modulo di Young, con  $\nu$  il coefficiente di Poisson, con  $\mathcal{V}$  il volume del corpo, con  $\varrho^r$  ( $r = 1, 2, 3$ ) le quantità  $\frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} x^r d\mathcal{V}$ , con  $a_{rs}$  e  $b_{rst}$  rispettivamente

le coordinate astatiche ed iperastiche del sistema e con  $c_{rst}$  le quantità

$$(14) \quad c_{rst} = \frac{1}{2} (b_{rts} + b_{srt} - b_{rst}) .$$

Esse coincidono con i valori medi in  $\mathcal{V}$  dei prodotti delle caratteristiche di tensione per le coordinate. Indicando con  $W$  il doppio dell'energia potenziale elastica corrispondente all'intero corpo e supponendo il sistema isotropo ed omogeneo, si ha (<sup>1</sup>)

<sup>1</sup>) G. GRIOLI: *Sulle deformazioni elastiche dovute a due coppie in equilibrio*, Rendiconti di matematica e delle sue applicazioni (1946), pag. 305.

Il secondo membro di (15) può essere accresciuto mediante l'aggiunta

facilmente

$$(15) \quad W \geq \sum_{i=1}^3 \frac{\mathcal{E}}{E} \frac{1}{\varrho_i^2} \{ c_{1i}^2 + 2(1 + \nu)[c_{4i}^2 + c_{5i}^2 + c_{6i}^2] - \\ - 2\nu c_{1i}(c_{2i} + c_{3i}) \} ,$$

ove si suppone

$$(16) \quad c_{rt} = c_{rrt} , \quad c_{4t} = c_{23t} , \quad c_{5t} = c_{31t} , \quad c_{6t} = c_{12t} ; \\ (r = 1, 2, 3) \quad (t = 1, 2, 3) .$$

Da (15), per il teorema di Clapeyron, si ha

$$(17) \quad \delta L \geq \sum_{i=1}^3 \frac{\mathcal{E}}{E} \frac{1}{\varrho_i^2} \{ c_{1i}^2 + 2(1 + \nu)(c_{4i}^2 + c_{5i}^2 + c_{6i}^2) - \\ - 2\nu c_{1i}(c_{2i} + c_{3i}) \} .$$

#### 4. Flessione uniforme.

Consideriamo il caso in cui i vettori  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  siano fra loro paralleli ed inoltre paralleli al versore dell'asse  $x_1$ , i momenti delle coppie paralleli all'asse  $x_2$  e  $C'_1 C''_1$ ,  $C'_2 C''_2$  paralleli e concordi all'asse  $x_3$ .

In tal caso si ha:

$$(18) \quad M_1 = M_2 = 0 , \\ (19) \quad \varphi_{i2} = \varphi_{i3} = 0 ; \quad (i = 1, 2) \\ (20) \quad \varphi_{11} = \mp 1 , \quad \varphi_{21} = \pm 1 , \\ (21) \quad \Psi_{i3} = 1 , \quad \Psi_{i2} = 0 . \quad (i = 1, 2) .$$

di termini corrispondenti ai valori medi dei prodotti delle caratteristiche di tensione per polinomi di grado comunque elevato nelle coordinate, ma le formule ed i raffronti che intendo stabilire non lo richiedono.

Vedi G. GRIOLI: *Relazioni quantitative per lo stato tensionale di un qualunque sistema continuo e per la deformazione di un corpo elastico in equilibrio*, Annali di Matematica pura ed applicata, Serie IV, Tomo XXXIII (1952), pag. 239 .

Supponendo  $v_1$  di verso opposto e  $v_2$  concorde al versore dell'asse  $x_1$  si potranno scegliere in (20) i segni superiori. Si ha così

$$(22) \quad M_2 = l_1 R'_1 = l_2 R'_2 ,$$

$$(23) \quad a_{rs} = 0 , \quad (r, s = 1, 2, 3)$$

$$(24) \quad b_{rst} = 0 \quad (r, s = 1, 2, 3) \quad (t = 2, 3) ,$$

$$(25) \quad b_{r11} = \frac{1}{\mathcal{C}} \left\{ \int_{\Sigma'_1} f_1 x_r x_s d\Sigma'_1 + \int_{\Sigma''_1} f_1 x_r x_s d\Sigma''_1 - \right. \\ \left. - \int_{\Sigma'_2} f_2 x_r x_s d\Sigma'_2 - \int_{\Sigma''_2} f_2 x_r x_s d\Sigma''_2 \right\} \quad (r, s = 1, 2, 3) .$$

Infine per l'espressione del lavoro si ha dalla (13)

$$(26) \quad \delta L = \Theta^*_2 M_2 .$$

Dalla (17) si trae facilmente

$$(27) \quad \Theta^*_2 M_2 > \frac{\mathcal{C}}{E} \sum_{j=2}^3 \alpha_j^2$$

con

$$(28) \quad \alpha_j^2 = \frac{1}{\varrho_j^2} b_{11j}^2 + \frac{1+\nu}{2} \left[ \frac{1}{\varrho_j^2} (b_{21j}^2 - b_{31j}^2) \right] .$$

Da (27) segue

$$(29) \quad |\Theta^*_2| \geq \frac{\mathcal{C}}{E |M_2|} \sum_{j=2}^3 \alpha_j^2 .$$

OSSERVAZIONE I. - Qualora si supponga che  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  siano piane e giacciono su due piani paralleli a  $0x_2x_3$  e distanti  $l$  fra loro, si può porre  $x_1 = \text{cost.}$  nelle espressioni che danno le  $b_{rst}$ , per cui

$$(30) \quad b_{111} = 0 , \quad b_{121} = -\frac{l}{\mathcal{C}} M_2 .$$

Sostituendo in (29) si ha quindi, trascurando termini non negativi al secondo membro,

$$(31) \quad |\Theta_1^*| \geq \frac{|M_1| l^3}{E \mathcal{C} \varrho_1^3}.$$

## 5. Torsione.

Consideriamo il caso in cui i momenti delle due coppie siano paralleli all'asse  $x_1$  (e per esempio sia  $M$  concorde col versore di  $x_1$ ) e  $v_1, v_2$  ortogonali rispettivamente ad  $u_1$  e  $u_2$ . Si ha

$$(32) \quad M_2 = M_3 = 0,$$

$$(33) \quad M_1 = l_1 R'_1 = l_2 R'_2,$$

$$(34) \quad \varphi_{i1} = \Psi_{i1} = 0 \quad (i = 1, 2),$$

$$(35) \quad \varphi_{i2} \Psi_{i2} + \varphi_{i3} \Psi_{i3} = 0 \quad (i = 1, 2),$$

$$(36) \quad \varphi_{i2} \Psi_{i3} - \varphi_{i3} \Psi_{i2} = \pm 1,$$

dovendosi scegliere il segno superiore per  $i = 1$  e quello inferiore per  $i = 2$  nella (36).

Ne consegue

$$(37) \quad b_{rs1} = 0 \quad (r, s = 1, 2, 3),$$

$$(38) \quad \delta L = \Theta_1^* M_1.$$

Dalla (17) si ha quindi

$$(39) \quad |\Theta_1^*| \geq \frac{\mathcal{C}}{E |M_1|} \left\{ \sum_{i=2}^3 \frac{1}{\varrho_i^3} \left[ \frac{b_{11i}^2}{4} + 2\nu \frac{b_{11i} b_{11i}}{4} \right] + \right. \\ \left. + 2(1 + \nu) \left[ \frac{(b_{122} - b_{132})^2}{4\varrho_2^2} + \frac{(b_{123} - b_{133})^2}{4\varrho_3^2} \right] + 2(1 + \nu) \left[ \frac{b_{222}^2}{4\varrho_2^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{b_{332}^2}{4\varrho_3^2} \right] + 2\nu \left[ \frac{2b_{112}b_{222} - b_{112}b_{332}}{4\varrho_2^2} + \frac{2b_{113}b_{223} - b_{113}b_{333}}{4\varrho_3^2} \right] \right\}.$$



OSSERVAZIONE II. - Supposte valide le ipotesi della osservazione I, si ha

$$(40) \quad b_{112} = b_{113} = 0 ,$$

e, da (39), trascurando termini non negativi al secondo membro, si deduce

$$(41) \quad \Theta_1^* M_1 \geq \frac{\mathcal{C}}{E} 2(1 + \nu) \left[ \frac{(b_{123} - b_{132})^2}{4} \left( \frac{1}{\varrho_2^2} + \frac{1}{\varrho_3^2} \right) \right] .$$

Di qui, osservando che

$$(42) \quad (b_{123} - b_{132})^2 = \frac{M_1^2 l^2}{\mathcal{C}^2}$$

e sostituendo tale espressione in (41) si trae

$$(43) \quad |\Theta_1^*| \geq \frac{(1 + \nu) l^2}{2\mathcal{C}E} |M_1| \left( \frac{1}{\varrho_2^2} + \frac{1}{\varrho_3^2} \right) .$$

## 6. Conclusioni.

La (29) e la (39) danno delle limitazioni inferiori in casi che possono dirsi di flessione uniforme e di torsione. In particolare, le (31), (43) coincidono con le formule già ottenute da G. Grioli <sup>2)</sup> nel caso in cui le forze agenti siano solo quattro e costituenti due coppie in equilibrio.

Le (31), (43) si possono utilmente confrontare con le corrispondenti che le teorie di De Saint-Venant e di Navier danno rispettivamente per la flessione e per la torsione di un cilindro omogeneo ed isotropo, con la conclusione che quelle teorie danno deformazioni più piccole di quelle che in realtà il sistema differenziale dell'elastostatica presuppone.

---

<sup>2)</sup> Loc. cit. nota <sup>1)</sup>.