RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

J. L. LIONS

Quelques remarques sur les équations différentielles opérationnelles du 1er ordre

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 33 (1963), p. 213-225

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1963__33__213_0>

QUELQUES REMARQUES SUR LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES OPERATIONNELLES DU 1er ORDRE

Nota *) *di* J. L. LIONS (*a Parigi*) **)

INTRODUCTION

On considère une famille d'opérateurs $A(t)$ dans un espace de Hilbert H, les $A(t)$ étant définis par des formes sesquilinéaires continues sur un espace de Hilbert V, $V \subset H$, V dense dans H, $V \to H$ continue. On suppose que ces formes sont mesurables et bornées en t et vérifient une relation de coercivité (Cf. N° 1, (1.1) et (1.2)).

Dans ces conditions, pour $f \in L^2(0, T; H)$ [1]) et $u_0 \in H$ donnés, il existe une solution (dans un sens convenable) unique de

$$(*) \qquad \begin{cases} A(t)u + \dfrac{du}{dt} = f\,, \\ u(0) = u_0\,. \end{cases}$$

*) Pervenuta in redazione il 18 dicembre 1962.

Indirizzo dell'A.: Instituto Henri Poincaré, Paris (France).

**) This research was supported by United States Air Force under Grant AF-EOAR 62-7 and monitored by the European Office, Office of Aerospace Research.

[1]) $L^p(a, b; X)$ désigne l'espace des (classes de) fonctions sur (a, b) de puissance *p-ème* sommable à valeurs dans X, pour la mesure de Lebesgue dt.

En fait, on peut même prendre f dans $L^2(0, T; V')$, V' étant l'anti-dual de V. (Cf. [1] pour ces résultats).

Nous étudions ici essentiellement le cas où f est donnée dans $L^1(0, T; H)$ au lieu de $L^2(0, T; H)$. Nous montrons par deux méthodes (N^o 1 et N^o 2) qu'il y a encore existence et unicité de la solution u de (*) et nous montrons (N^o 3) qu'après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle, u est continue de $[0, T] \to H$. Quelques compléments sont donnés au N^o 4.

1. Méthode de transposition.

1.1. Soient V et H deux espaces de Hilbert, le produit scalaire dans V (resp. H) étant désigné par $((u, v))$ (resp. (f, g)); $\| u \| = ((u, u))^{1/2}$, $| f | = (f, f)^{1/2}$. On suppose que $V \subset H$, V dense dans H, $V \to H$ continue et V séparable.

On désigne par V' l'anti-dual de V; identifiant H à son antidual, on a:

$$V \subset H \subset V' ;$$

si $f \in V'$, $u \in V$, (f, u) désignera la valeur de f en u; si $f \in H$ est considéré comme élément de V', (f, u) au sens précédent coïncide bien avec le produit scalaire de f et u dans H.

Soit $a(t; u, v)$ une famille de formes sesqui-linéaires continues sur $V \times V$, dépendant de $t \in [0, T]$, $T < \infty$, avec:

$$\text{(1.1)} \quad \text{pour tout } u, v \in V, t \to a(t; u, v) \text{ est dans } L^\infty(0, T) ;$$

$$\text{(1.2)} \quad \begin{cases} \text{il existe } \lambda \text{ et } \alpha > 0 \text{ tels que, pour tout } v \in V, \text{ et p.p. en } t: \\ \operatorname{Re} a(t; v, v) + \lambda \, | v |^2 \leqslant \alpha \, \| v \|^2 . \end{cases}$$

Dans ces conditions on sait ([1], chap. IV) que, pour f donné dans $L^2(0, T; V')$ et u_0 donné dans H, il existe $u \in L^2(0, T; V)$

unique satisfaisant à

$$
(1.3) \qquad \begin{aligned}
&\int_O^T [a(t; u(t), \varphi(t)) - (u(t), \varphi'(t))]dt = \\
&= \int_O^T (f(t), \varphi(t))dt + (u_o, \varphi(0))
\end{aligned}
$$

pour tout fonction φ telle que

$$
(1.4) \qquad \varphi \in L^2(0, T; V) , \qquad \varphi' = \frac{d\varphi}{dt} \in L^2(0, T; H)
$$

et

$$
(1.5) \qquad \varphi(T) = 0 .
$$

(Noter que de (1.4) résulte que, en particulier, φ est p.p. égale à une fonction, encore notée φ, continue de $t \in [0, T] \to H$).

On peut naturellement remplacer $a(t; u, v)$ par $a^*(t; u, v) = \overline{a(t; v, u)}$; si l'on échange les rôles de 0 et T, on obtient: pour g donné dans $L^2(0, T; V')$ et v_T donné dans H, il existe $v \in L^2(0, T; V)$ unique satisfaisant à

$$
(1.3 \text{ bis}) \qquad \begin{aligned}
&\int_O^T [a^*(t; a(t), \psi(t)) + (v(t), \psi'(t))]dt = \\
&= \int_O^T (g(t), \psi(t))dt + (v_T, \psi(T))
\end{aligned}
$$

pour toute fonction ψ telle que

$$
(1.4 \text{ bis}) \qquad \psi \in L^2(0, T; V) , \qquad \psi' = \frac{d\psi}{dt} \in L^2(0, T; H)
$$

et

$$
(1.5 \text{ bis}) \qquad \psi(0) = 0 .
$$

1.2. Comme $v \to a(t; u, v)$ est (pour presque tout t) une forme antilinéaire continue sur V, on a:

$$(1.6) \qquad a(t; u, v) = (A(t)u, v)\,, \qquad A(t)u \in V'$$

ce qui définit (pour presque tout t) $A(t) \in \mathcal{L}(V; V')$ (espace des applications linéaires continues de V dans V'). De même

$$(1.7) \qquad a^*(t; u, v) = (A^*(t)u, v)\,, \qquad A^*(t) \in \mathcal{L}(V; V')\,^{2)}\,.$$

On déduit de (1.3 bis) que, dans l'ouvert $]0, T[$,

$$(1.8) \qquad A^*(t)v(t) + \frac{dv}{dt} = g(t)\;;$$

mais (Cf. note [1]), p. 44 de [1]) $A^*(t)v(t) \in L^2(0, T; V')$ de sorte que (1.8) entraîne:

$$(1.9) \qquad \frac{dv}{dt} \in L^2(0, T; V')$$

d'où suit que v est (p.p. égale à) une fonction continue de $[0,T] \to$ $\to H$ et vérifie

$$(1.10) \qquad v(T) = v_T\,.$$

Désignons par W l'espace des $u \in L^2(0, T; V)$ telles que $\frac{du}{dt}$ soit dans $L^2(0, T; V')$; muni de la norme

$$\left(\int_0^T (\| u(t) \|^2 + \| u'(t) \|^2_{V'})\, dt\right)^{1/2},$$

c'est un espace de Hilbert. Soit W_T le sous espace fermé de W des $u \in W$ tels que $u(T) = 0$.

---

[2]) Si $A(t)$ (resp. $A^*(t)$) est considéré comme opérateur non borné dans H, de domaine $D(A(t)) = A(t)^{-1}.\, H$ (resp. $D(A^*(t)) = A^*(t)^{-1} \cdot H$), alors $A^*(t)$ est l'adjoint de $A(t)$.

Si, pour $v \in W$, on pose:

$$\Sigma v = A^*(t)v - \frac{dv}{dt}, \tag{1.11}$$

on peut alors énoncer:

(1.12) Σ est un isomorphisme de W_T sur $L^2(0, T; V')$.

1.3. Passons à l'adjoint dans (1.12); identifiant $L^2(0, T; V)$ à l'antidual de $L^2(0, T; V')$, et W'_T désignant l'anti-dual de W_T, on a:

Σ^* est un isomorphisme de $L^2(0, T; V)$ sur W'_T.

Donc, si $v \to L(v)$ est une forme anti-linéaire continue sur W'_T il existe $u \in L^2(0, T; V)$ unique avec

$$(u, \Sigma v) = L(v) \tag{1.13}$$

où

$$(u, \Sigma v) = \int_O^T (u(t), \Sigma v(t))dt = \int_O^T [(u(t), A^*(t)v(t)) - (u(t), v'(t))]dt =$$

$$= \int_O^T [a(t; u(t), v(t)) - (u(t), v'(t))dt ;$$

donc

THÉORÈME 1.1: *Sous les hypothèses* (1.1) *et* (1.2) *et* $v \to L(v)$ *étant une forme anti-linéaire continue sur* W'_T, *il existe une fonction* u *et une seule dans* $L^2(0, T; V)$ *telle que*

$$\int_O^T [a(t; u(t), v(t)) - (u(t), v'(t))]dt = L(v) \tag{1.14}$$

pour tout $v \in W_T$.

Cas particulier.

Si $f \in L^1(0, T; H)$ et $u_0 \in H$, alors

$$(1.15) \qquad L(v) = \int_0^T (f(t), v(t))dt + (u_0, v(0))$$

définit une forme anti-linéaire *continue* sur W_T.

On voit donc que l'on a pu *en particulier* remplacer dans (1.3) l'hypothèse « $f \in L^2(0, T; V')$ » par l'hypothèse « $f \in L^1(0, T; H)$ ». Plus généralement, on peut prendre dans (1.15)

$$(1.16) \qquad f \in L^1(0, T; H) + L^2(0, T; V')\ ^{3)},$$

et aussi pour f une mesure à valeur dans H [4]).

L'application $\{f, u_0\} \rightarrow u$ est continue de

$$(L^1(0, T; H) + L^2(0, T; V')) \times H \rightarrow L^2(0, T; V)\ ^{5)}.$$

1.4. On peut aussi considérer Σ comme opérateur non borné dans $L^2(0, T; H)$, de domaine $D(\Sigma)$ l'espace des $v \in W_T$ tels que $\Sigma v \in L^2(0, T; H)$; alors ($D(\Sigma)$ étant muni de la norme du graphe) Σ est un isomorphisme de $D(\Sigma)$ sur $L^2(0, T; H)$; donc, passant aux adjoints:

$$(1.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{il existe } u \in L^2(0, T; H) \text{ unique, satisfaisant à} \\ \displaystyle\int_0^T (u(t), A^*(t)v(t) - v'(t))dt = M(v), \text{ pour tout } v \in D(\Sigma) \\ \text{où } v \rightarrow M(v) \text{ est une forme anti-linéaire continue sur } D(\Sigma). \end{array} \right.$$

On a donc *en particulier*: *si* $M(v) = 0$ *alors* $u = 0$.

3) Si X et Y sont deux Banach (par ex.), contenus dans un espace vectoriel topologique localement convexe ψ, on munit $X + Y$ de la topologie suivante. On considère l'application $\{x, y\} \xrightarrow{\pi} x + y$ de $X \times Y \rightarrow \psi$; soit Z le noyau de π; alors $X + Y \approx (X \times Y)/Z$.

4) On peut aussi prendre pour f des distributions convenables d'ordre 1 à valeurs dans V', en introduisant des poids, comme dans [3].

5) Cf. précisions sur les propriétés de u au N° 3.

Dans [1], p. 94, on a montré un résultat de ce genre en prenant les v dans une classe plus petite mais avec plus d'hypothèses sur $a(t; u, v)$. Ceci ne résout donc pas le problème posé en [1], p. 95.

2. La méthode des solutions approchées.

On va dans ce N° démontrer ceci:

THÉORÈME 2.1: *Hypothèses du Théorème* 1.1. *On donne f avec*

(2.1) $f \in L^1(0, T; H)$

et u_0 dans H. Il existe u unique dans $L^2(0, T, V) \cap L^\infty(0, T; H)$ telle que

$$\int_0^T [a(t; u(t), v(t)) - (u(t), v'(t))]dt = \int_0^T (f(t), v(t))dt + (u_0, v(0)) \tag{2.2}$$

pour tout $v \in L^2(0, T; V)$ avec $v' \in L^2(0, T; H)$ et $v(T) = 0$.

DEMONSTRATION:

1) L'unicité est donnée au N° 1, i.e. en fait dans [1], Chap. IV.

La seule chose à montrer est donc l'existence de u avec $u \in L^2(0, T; V)$ et

$$u \in L^\infty(0, T; H). \tag{2.3}$$

On peut toujours supposer que (1.2) a lieu avec $\lambda = 0$.

2) Soit $w_1, w_2, \dots, w_n, \dots$ une base de V et soit $u_n(t)$ la solution approchée définie par

$$(u_n'(t), w_j) + a(t; u_n(t), w_j) = (f(t), w_j), \quad j = 1, \dots, n, \tag{2.4}$$

où

$$u_n(t) = \sum_{i=1}^n g_{in}(t) w_i, \tag{2.5}$$

et

$$g_{in}(0) = \alpha_{in}\,, \tag{2.6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{in} w_i = u_{0n} \to u_0 \quad \text{dans } H \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty\,. \tag{2.7}$$

Multipliant (2.4) par $\overline{g_{jn}(t)}$ et sommant en j et intégrant il vient

$$\begin{cases} |\, u_n(t)\,|^2 + 2Re\displaystyle\int_0^t a(\sigma;\, u_n(\sigma),\, u_n(\sigma))d\sigma = \\ = 2\mathrm{Re}\displaystyle\int_0^t (f(\sigma),\, u_n(\sigma))d\sigma + |\, u_{on}\,|^2 \end{cases} \tag{2.8}$$

d'où

$$\begin{cases} |\, u_n(t)\,|^2 + 2\alpha\displaystyle\int_0^t \|\, u_n(\sigma)\,\|^2 d\sigma \leqslant 2 \sup_{O\leqslant\sigma\leqslant t}. \,|\, u_n(\sigma)\,| \int_0^t |\, f(\sigma)\,|\, d\sigma + \\ + |\, u_{on}\,|^2 \leqslant 2 \sup_{O\leqslant\sigma\leqslant T}. \,|\, u_n(\sigma)\,| \cdot \displaystyle\int_0^T |\, f(\sigma)\,|\, d\sigma + |\, u_{on}\,|^2 \end{cases} \tag{2.9}$$

d'où

$$\sup_{O<t\leqslant T} |\, u_n(t)\,|^2 \leqslant 2 \sup_{O\leqslant t\leqslant T} |\, u_n(t)\,| \int_0^T |\, f(\sigma)\,|\, d\sigma + |\, u_{on}\,|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \sup_{O<t\leqslant T} |\, u_n(t)\,|^2 + 2\left(\int_0^T |\, f(\sigma)\,|\, d\sigma\right)^2 + |\, u_{on}\,|^2$$

et donc

$$\sup_{O\leqslant t\leqslant T} |\, u_n(t)\,|^2 \leqslant 4\left(\int_0^T |\, f(\sigma)\,|\, d\sigma\right)^2 + 2\,|\, u_{on}\,|^2 \leqslant C_1 \tag{2.10}$$

(les C_i désignant diverses constantes). On déduit alors de (2.9) que

$$\int_0^T \| u_n(\sigma) \|^2 \, d\sigma \leqslant C_2 . \tag{2.11}$$

De (2.10) (2.11) l'on déduit que l'on peut extraire une suite u_ν convergente dans $L^\infty(0, T; H)$ faible et dans $L^2(0, T; V)$ faible et on en déduit le résultat par le raisonnement habituel (Cf. par ex. [1], Chap. 10).

3. Régularité de la solution.

3.1. Notons d'abord que l'on déduit de (2.2) que

$$A(t)u(t) + \frac{d}{dt} u(t) = f(t) \quad \text{dans l'ouvert} \quad]0, T[. \tag{3.1}$$

Il en résulte ceci: si l'on donne f avec

$$f \in L^1(0, T; H) + L^2(0, T; V') \tag{3.2}$$

alors

$$\frac{du}{dt} \in L^1(0, T; H) + L^2(0, T; V') . \tag{3.3}$$

3.2. On va maintenant démontrer le

THÉORÈME 3.1: *Hypothèses du Th.* 2.1, *avec f donnée avec* (3.2). *Alors u solution de* (2.2) *est* (p.p. égale à) *une fonction continue de* $[0, T] \to H$ *vérifiant*

$$u(0) = u_0 . \tag{3.4}$$

DÉMONSTRATION:

1) On sait que

$$u \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V) . \tag{3.5}$$

On va montrer que *toute* fonction u satisfaisant à (3.5) et (3.3) est continue de $[0, T] \to H$.

Remplaçant u par ϑu où ϑ est une fois continûment différentiable dans $[0, T]$, $\vartheta(t) = 1$ dans $\left[0, \frac{2T}{3}\right]$ par ex. et $= 0$ au voisinage de T, on voit que l'on peut supposer que, outre (3.5) et (3.3), u est $= 0$ au voisinage de T.

Soit ensuite v définie (p.p) dans $(-T, T)$ par:

$$v(t) = u(t) \quad \text{si} \quad t > 0\,, \qquad u(-t) \quad \text{si} \quad t < 0\,.$$

Si $\varphi \in \mathcal{D}^1(-T, T)$ (fonctions scalaires une fois continûment différentiable et à support compact dans $]-T, T[$), alors [6])

$$\frac{dv}{dt}(\varphi) = -v(\varphi') = -\int_O^T u(t)\psi'(t)dt\,, \quad (\psi(t) = \varphi(t) - \varphi(-t))\,.$$

Mais si $\chi \in \mathcal{D}^1(0, T)$, $\frac{du}{dt}(\chi) = -u(\chi')$ et il existe une suite $\chi_n \in \mathcal{D}^1(0, T)$ telle que $\chi_n \to \psi$ uniformément dans $[0, T]$ et $\chi_n' \to \psi'$ dans $L^2(0, T)$ (par exemple); alors $\frac{du}{dt}(\chi_n) \to \frac{du}{dt}(\psi)$ et

$$u(\chi_n') \to u(\psi') \text{ donc } -u(\psi') = \frac{du}{dt}(\psi) = -\int_T^O u'(-t)\varphi(t)dt + \int_O^T u'(t)\varphi(t)dt$$

donc

$$v'(t) = u'(t) \quad \text{si} \quad t > 0\,, \qquad -u'(-t) \quad \text{si} \quad t < 0\,.$$

Donc:

$$v \in L^\infty(-T, T; H) \cap L^2(-T, T; V)\,,$$

$$\frac{dv}{dt} \in L^1(-T, T; H) + L^2(-T, T; V')\,,$$

$$v = 0 \quad \text{au voisinage de } +T\,.$$

---

[6]) $\frac{dv}{dt}$ est calculée au sens des distributions vectorielles.

2) On va en déduire que, pour u donnée avec (3.5) (3.3) et $= 0$ au voisinage de T, il existe une suite u_n de fonctions une fois continûment différentiables de $[0, T] \to V$, nulles dans un voisinage (fixe) de T, telles que $u_n \to u$ dans $L^2(0, T; V)$ fort, et dans $L^\infty(0, T; H)$ faible,

$$\text{et} \quad u_n' \to u' \quad \text{dans} \quad L^1(0, T: H) + L^2(0,T; V') .$$

En effet, ϱ_n étant une suite régularisante et v étant défini comme au 1), on prendra $u_n =$ restriction à $[0, T]$ de $v*\varrho_n$.

3) La suite u_n étant comme au 2), on peut écrire, pour $t \geqslant 0$:

$$| u_n(t) |^2 = -\int_t^T [u_n'(\sigma), u_n(\sigma)) + (u_n'(\sigma), u_n(\sigma))]d\sigma$$

d'où résulte que $u_n(t)$ converge *uniformément* vers $u(t)$ sur $[0, T]$ dans H, d'où résulte la continuité de u dans $[0, T]$ à valeurs dans H.

4) De (2.2) et (3.1) on déduit:

$$(3.6) \qquad -\int_0^T (u(t), v'(t))dt = \int_0^T (u'(t), v(t))dt + (u(0), v(0))$$

ce qui, par comparaison avec (3.6), donne (3.4).

4. Compléments.

4.1. L'espace V peut toujours (et d'une infinité de manières) être considéré comme le domaine d'un opérateur Λ auto-adjoint > 0 dans H; on pose

(4.1) $V = D(\Lambda^\vartheta) =$ domaine de Λ^ϑ, $0 < \vartheta < 1$, muni de la norme du graphe.

Les espaces V^ϑ sont indépendants du choix de Λ ([2]). On désigne par $V^{-\vartheta}$ l'anti-dual de V^ϑ; $V^0 = H$, $V^1 = V$, $V^{-1} = V'$;

on désigne par $\| u \|_\sigma$, $-1 < \sigma < 1$, la norme de u dans V^σ: (donc $\| u \|_0 = | u |$).

4.2. On va montrer le

THÉORÈME 4.1: *On se place dans les hypothèses du Théorème 2.1. avec* (au lieu de (2.1))

$$f \in L^{2/(2-\vartheta)}(0, T; V) , \quad \vartheta \quad \text{fixe dans} \quad]0,1[. \tag{4.2}$$

Conclusions analogues à celles du Théorème 2.1.

DÉMONSTRATION.

Reprenons (2.8). Le deuxième membre est majoré par

$$2\int_0^T \| f(\sigma) \|_{-\vartheta} \| u_n(\sigma) \| \, d\sigma + | u_{on} |^2 ;$$

comme $\| u \|_\vartheta \leqslant \| u \|^\vartheta \, | u |^{1-\vartheta}$, ceci est majoré par

$$2\int_0^t \| u_n(\sigma) \|^\vartheta \, \| f(\sigma) \|_{-\vartheta} \, | u_n(\sigma) |^{1-\vartheta} d\sigma + | u_{on} |^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\int_0^t \| u_n(\sigma) \|^2 \, d\sigma \right)^{\vartheta/2} \sup_{0<\sigma<t} | u_n(\sigma) |^{1-\vartheta} \cdot \left(\int_0^t \| f(\sigma) \|_{-\vartheta}^p \, d\sigma \right)^{1/p} + | u_{on} |^2$$

où $\dfrac{\vartheta}{2} + \dfrac{1}{p} = 1$ donc $p = \dfrac{2}{2-\vartheta}$.

Ceci est encore majoré par

$$\alpha \int_0^t \| u_n(\sigma) \|^2 \, d\sigma + c_1 \sup_{0<\sigma<t} | u_n(\sigma) |^{(1-\vartheta)p} \int_0^t \| f(\sigma) \|_{-\vartheta}^p \, d\sigma + | u_{on} |^2$$

d'où l'on déduit

$$| u_n(t) |^2 + \alpha \int_0^t \| u_n(\sigma) \|^2 \, d\sigma < c_1 \sup_{0<\sigma<T} | u_n(\sigma) |^{(1-\vartheta)p} \cdot \int_0^t \| f(\sigma) \|_{-\vartheta}^p \, d\sigma + | u_{on} |^2 . \tag{4.3}$$

Donc en particulier

$$| u_n(t) |^2 \leqslant c_1 \sup_{O \leqslant \sigma \leqslant T} | u_n(\sigma) |^{(1-p)} \int_O^t \| f(\sigma) \|_{-\theta}^p \, d\sigma + | u_{on} |^2 .$$

d'où l'on déduit que $| u_n(t) |$ est borné par une constante indépendante de n; on achève comme au Théorème 2.1.

Remarque 4.1.

On peut vérifier que

$$L^{2/(2-\theta)}(0, T, V^{-\theta}) \subset L^1(0, T; H) + L^2(0, T; V')$$

(avec injection continue), ce qui, joint au Théorème 2.1, redonne le Théorème 4.1. et ce qui montre (en utilisant le Théorème 3.1) que sous l'hypothèse (4.2), u est encore (après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle) continue de $[0, T]$ dans H.

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

(Pour compléments bibliographiques, consulter [1])

[1] Lions J. L.: *Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites*. Springer. Collection Jaune, t. 111, 1961.

[2] Lions J. L.: *Espaces intermédiaires entre espaces hilbertiens et application*. Bull. Math. R. P. R., Bucarest 2 (1958), pp. 419-432.

[3] Lions J. L., Magenes E.: *Remarques sur les problèmes aux limites linéaires elliptiques*. Rendiconti dei Lincei. Napoli (1962).