

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ADALBERTO ORSATTI

Sulle traslazioni in un ipergruppo additivo

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 32 (1962), p. 313-324

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1962__32__313_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SULLE TRASLAZIONI IN UN IPERGRUPPO ADDITIVO

Nota () di ADALBERTO ORSATTI (a Padova) (**)*

INTRODUZIONE

È noto che in un gruppo additivo G le traslazioni, cioè le corrispondenze espresse da equazioni del tipo $y = a + x$, $a \in G$, sono trasformazioni uniformi costituenti un gruppo isomorfo a G . Inoltre, detti segmenti le coppie ordinate di elementi di G , la relazione, di congruenza diretta, che intercede tra due segmenti che si corrispondono in una traslazione, è una equivalenza. Attribuendo a segmenti direttamente congruenti la medesima lunghezza, le lunghezze costituiscono un gruppo isomorfo a G .

In questo lavoro si cerca di stabilire proposizioni analoghe in un ipergruppo additivo.

Richiamiamo brevemente alcune proprietà degli ipergruppi. Un ipergruppo additivo \mathfrak{M} è un insieme con una operazione (addizione) multiforme, mai vuota e associativa, soddisfacente all'assioma dei complementari:

$$a, b \in \mathfrak{M} \Rightarrow \exists x, y \in \mathfrak{M} : a + x \ni b \ \& \ y + a \ni b .$$

L'elemento $z \in \mathfrak{M}$ è uno zero sinistro se $z + m \ni m$ per ogni $m \in \mathfrak{M}$; $-m$ è un opposto sinistro di m se $-m + m \ni z$, dove

(*) Pervenuta in redazione il 28 gennaio 1962.

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università (Padova).

(**) Lavoro fatto nel gruppo di ricerca del C. N. R.: « Strutture algebriche e loro legami con la geometria moderna ».

z è uno zero sinistro. \mathfrak{M} è reversibile a sinistra se, in \mathfrak{M} , $m_1 \in m_2 + m_3 \Rightarrow m_3 \in -m_2 + m_1$, dove $-m_2$ è un opportuno opposto sinistro di m_2 . L'elemento α di \mathfrak{M} è uno scalare sinistro se il complesso $\alpha + m$ contiene un solo elemento per ogni $m \in \mathfrak{M}$. Analoghe definizioni a destra. Infine un ipergruppo \mathfrak{M} dicesi regolare se possiede uno zero bilatero rispetto al quale ogni elemento ha opposti bilateri, [1].

Detti punti gli elementi x di un ipergruppo additivo \mathfrak{M} e segmenti le coppie ordinate (x_1, x_2) di elementi di \mathfrak{M} , si definisce, attraverso le traslazioni, la relazione \mathfrak{T} di congruenza diretta dei segmenti, in guisa che risulti una equivalenza. Per traslazione si intende, in un primo tempo, una trasformazione multiforme di \mathfrak{M} , di equazione $Y = a + x$ dove a è un elemento di \mathfrak{M} . Se \mathfrak{M} è regolare, reversibile e soddisfa l'ipotesi (*) di pagina 315, \mathfrak{T} è una equivalenza. Successivamente si elimina l'ipotesi (*), si suppone \mathfrak{M} completamente regolare e si scrive l'equazione di una traslazione così: $Y = A_n + x$, dove A_n è un complesso somma di un numero finito n (variabile) di elementi di \mathfrak{M} . \mathfrak{T} risulta senz'altro una equivalenza. In entrambi i casi, definita la lunghezza del segmento (x_1, x_2) come il complesso degli elementi x di \mathfrak{M} tali che il segmento (x_1, x_2) sia direttamente congruente al segmento $(0, x)$, dove 0 è uno zero bilatero in \mathfrak{M} , si vede che \mathfrak{T} induce in \mathfrak{M} una equivalenza regolare \mathfrak{R} in questo modo: la lunghezza del segmento $(0, 0)$ è data da un sottoipergruppo \mathfrak{U} di \mathfrak{M} ivi normale in senso forte (f -normale), tale cioè che il sistema quoziente $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}/\mathfrak{U}$ sia un gruppo, mentre le altre lunghezze coincidono con le altre classi laterali di \mathfrak{M} rispetto a \mathfrak{U} .

Si ritrovano proposizioni analoghe a quelle che valgono sopra una retta elementare generale o in un gruppo G [3]. Constatato che \mathfrak{U} è il più piccolo sottoipergruppo f -normale di \mathfrak{M} , si dimostra che \mathfrak{R} è la più fine equivalenza regolare in \mathfrak{M} . Pertanto \mathfrak{T} può essere definita con riferimento ad un ipergruppo qualunque mediante le \mathfrak{R} -traslazioni, corrispondenze di equazione $Y = A + x$ dove A è una classe modulo \mathfrak{R} . Le \mathfrak{R} -traslazioni costituiscono un gruppo isomorfo al gruppo delle lunghezze e omomorfo a \mathfrak{M} .

§ 1. Traslazioni

Sia \mathfrak{M} un ipergruppo additivo regolare e reversibile. Supporremo che tutti gli zeri di $\mathfrak{M} : 0, 0', 0'' \dots$ e tutti gli opposti di ogni elemento siano bilateri. L'equazione $Y = a + x (a \in \mathfrak{M})$ definisce la *traslazione* T_a che muta l'elemento corrente x di \mathfrak{M} nel complesso Y . Consideriamo in $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ la relazione binaria \mathfrak{T} : $(x_1, x_2) \mathfrak{T} (y_1, y_2) \Leftrightarrow \exists a \in \mathfrak{M} : y_1 \in a + x_1 \ \& \ y_2 \in a + x_2$.

\mathfrak{T} è riflessiva, ma, in generale, non è simmetrica nè transitiva. Supponiamo che, in \mathfrak{M} ,

$$(*) \quad \left. \begin{array}{l} z_1 \in a + b + x_1 \\ z_2 \in a + b + x_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c : \left\{ \begin{array}{l} z_1 \in c + x_1 \\ z_2 \in c + x_2 \end{array} \right.$$

allora:

T. 1,1.: *Se la relazione \mathfrak{T} è transitiva (cioè se vale l'ipotesi (*)) allora essa è anche simmetrica.*

Infatti se (y_1, y_2) corrisponde a (x_1, x_2) nella traslazione T_a segue, poichè \mathfrak{M} è reversibile:

$$(1) \quad x_1 \in -a' + y_1 ; \quad x_2 \in -a'' + y_2$$

con $-a'$ e $-a''$ opposti opportuni di a e con riferimento agli zeri $0', 0''$. Ora, per la (*),

$$\left. \begin{array}{l} -a' \in -a' + 0'' \subseteq -a' + a - a'' \\ -a'' \in 0' - a'' \subseteq -a' + a - a'' \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -a' \in c - a'' \\ -a'' \in c - a'' \end{array} \right.$$

dove c è un opportuno elemento di \mathfrak{M} .

Sostituendo nelle (1) ed ancora in virtù della (*) segue la conclusione.

\mathfrak{T} è dunque una equivalenza. Proseguiamo il nostro studio nella ipotesi (*).

T. 1,2.: *Se l'ipergruppo \mathfrak{M} è completamente regolare e se la relazione \mathfrak{T} è una equivalenza, \mathfrak{M} è un gruppo.*

Premesso che un ipergruppo è completamente regolare quando

possiede un solo zero ed ogni elemento ha un solo opposto che è bilatero [1], si ha:

$$(0, l) \equiv (x_1, x_2)(\mathcal{T}) \Leftrightarrow l \in -x_1 + x_2,$$

da cui:

$$(x_1, x_2) \equiv (y_1, y_2)(\mathcal{T}) \Leftrightarrow -x_1 + x_2 = -y_1 + y_2,$$

quindi:

$$h, k \in a + b \Rightarrow (h, k) \equiv (0, 0)(\mathcal{T}) \Rightarrow -h + k = 0 + 0 \ni 0 \Rightarrow h = k.$$

T. 1,3.: *Se \mathfrak{M} possiede una zero, 0, scalare a destra e se \mathcal{T} è una equivalenza, \mathfrak{M} è un gruppo.*

$$h, k \in a + b \Rightarrow h, k \equiv (0, 0)(\mathcal{T}) \Rightarrow h \in d + 0,$$

$$k \in d + 0 \Rightarrow h = k = d.$$

D'ora in poi supporremo \mathfrak{M} privo di scalari e chiameremo congruenza diretta dei segmenti la relazione \mathcal{T} .

T. 1,4.: *Due segmenti (x_1, x_2) , (y_1, y_2) sono direttamente congruenti se e solo se esistono degli opposti $-x'_1$ di x_1 e $-y''_1$ di y_1 tali che l'intersezione dei complessi $-x'_1 + x_2$, $-y''_1 + y_2$ sia non vuota.*

La condizione è necessaria: Sia $-x'_1$ un opposto arbitrario di x_1 e con riferimento allo zero $0'$:

$$l \in -x'_1 + x_2 \Rightarrow (0', l) \equiv (y_1, y_2)(\mathcal{T}) \Rightarrow \exists -y'_1 : l \in -y'_1 + y_2;$$

la condizione è sufficiente:

$$\begin{aligned} & l \in (-x'_1 + x_2) \cap (-y''_1 + y_2) \Rightarrow \\ & \Rightarrow (x_1, x_2) \equiv (0', l)(\mathcal{T}) \ \& \ (y_1, y_2) \equiv (0'', l)(\mathcal{T}). \end{aligned}$$

Ma:

$$0' \in 0' + 0''; \quad l \in 0' + l$$

da cui

$$(0', l) \equiv (0'', l)(\mathcal{T}),$$

e però:

$$(x_1, x_2) \equiv (y_1, y_2)(\mathcal{T}).$$

Abbiamo visto, nella dimostrazione precedente, che se (x_1, x_2)

e (y_1, y_2) sono due segmenti direttamente congruenti, prefissato ad arbitrio un opposto $-x_1^j$ di x_1 e scelto comunque un elemento l del complesso $-x_1^j + x_2$, è sempre possibile trovare un opposto $-y_1^k$ di y_1 tale che $l \in -y_1^k + y_2$.

Perciò:

$$-x_1^j + x_2 \subseteq \bigcup_k (-y_1^k + y_2)$$

dove $-y_1^k$ descrive la totalità degli opposti di y_1 .

Dall'arbitrarietà di $-x_1^j$ nel complesso degli opposti di x_1 segue:

$$L_x = \bigcup_j (-x_1^j + x_2) \subseteq \bigcup_k (-y_1^k + y_2) = L_y$$

dove $-x_1^j$ descrive la totalità degli opposti di x_1 .

Analogamente:

$$L_y \subseteq L_x.$$

Si ha pertanto:

$$(x_1, x_2) \equiv (y_1, y_2)(\mathfrak{T}) \Rightarrow L_x = L_y.$$

Inoltre, per il T. 1,4,

$$L_x \cap L_y \neq \emptyset \Leftrightarrow (x_1, x_2) \equiv (y_1, y_2)(\mathfrak{T}),$$

quindi:

$$L_x \cap L_y \neq \emptyset \Leftrightarrow L_x = L_y \Leftrightarrow (x_1, x_2) \equiv (y_1, y_2)(\mathfrak{T}).$$

In definitiva i complessi L_x, L_y, \dots danno una partizione di \mathfrak{M} alla quale è associata una equivalenza \mathfrak{R} . Ciascuna classe modulo \mathfrak{R} potrà interpretarsi come *lunghezza* di una classe di segmenti direttamente congruenti. È ovvio che:

T. 1,5.: \mathfrak{R} è l'uguaglianza se e solo se \mathfrak{M} è un gruppo.

Consideriamo il segmento (x_1, x_2) e sia L_x la sua lunghezza. Sia 0 uno zero di \mathfrak{M} prefissato ad arbitrio. È chiaro che:

$$x \in L_x \Leftrightarrow (0, x) \equiv (x_1, x_2)(\mathfrak{T}).$$

Perciò:

$$L_x = \bigcup_{p \in \Omega} (p + x) = \Omega + x \quad (x \in L_x)$$

dove Ω indica la totalità degli opposti di 0. Tra questi gli eventuali altri zeri di \mathfrak{M} . E l'equivalenza \mathfrak{R} potrà esprimersi così:

$$x \equiv y(\mathfrak{R}) \Leftrightarrow \Omega + x = \Omega + y .$$

In particolare la lunghezza del segmento $(0, 0)$ è data dalla classe

$$\mathfrak{U} = \Omega + 0 .$$

T. 1,6.: \mathfrak{U} è un sottoipergruppo di \mathfrak{M} .

$p_1, q_1 \in \mathfrak{U} \Rightarrow p_1 \in p + 0, q_1 \in q + 0$ con $p, q \in \Omega$;
se $r \in p_1 + q_1$ si ha:

$$r \in p_1 + q_1 \subseteq p + 0 + q + 0$$

$$0 \in 0 + 0 \subseteq p + 0 + q + 0$$

perciò:

$$(0, r) \equiv (0, 0)(\mathfrak{T}) ,$$

quindi

$$r \in \mathfrak{U} .$$

Sia $-p_1$ un opposto di p_1 rispetto a 0: allora:

$$0 \in p_1 - p_1 \subseteq p + 0 - p_1 ;$$

$$0 \in p + 0 \subseteq p + 0 + 0 ,$$

da cui:

$$(0, -p_1) \equiv (0, 0)(\mathfrak{T}) ,$$

perciò

$$-p_1 \in \mathfrak{U} .$$

È evidente che $\Omega + x \subseteq \mathfrak{U} + x = \Omega + 0 + x$; d'altra parte si dimostra facilmente che $\mathfrak{U} + x \subseteq \Omega + x$. Infatti se $l \in \mathfrak{U} + x$ si ha: $l \in p + 0 + x$ con $p \in \Omega$; ma $0 \in p + 0 + 0$, quindi $(0, l) \equiv (0, x)(\mathfrak{T})$, $l \in \Omega + x$; e pertanto le classi sinistre di \mathfrak{M} rispetto a \mathfrak{U} coincidono con le classi sinistre di \mathfrak{M} rispetto a Ω . Poichè queste sono a due a due disgiunte, \mathfrak{U} è reversibile in \mathfrak{M} e quindi l'insieme quoziente $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}/\mathfrak{U}$ è un ipergruppo omomorfo a \mathfrak{M} , avente \mathfrak{U} come zero bilatero e scalare a sinistra, [1].

Osserviamo che:

$$(2) \quad m + \Omega \subseteq \Omega + m$$

per ogni

$$m \in \mathfrak{M} .$$

Infatti, detto $-m$ un opposto di m rispetto a 0 , e p un elemento qualunque di Ω , abbiamo:

$$0 \in m - m \subseteq m + 0 - m$$

$$m \in m + 0 \subseteq m + 0 + p$$

da cui:

$$(-m, p) \equiv (0, m)(\mathfrak{T}) ,$$

cioè

$$m + p \subseteq \Omega + m .$$

Dalla (2) si deduce

$$(2') \quad m + \mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{U} + m$$

e da questa segue che \mathfrak{U} è in \mathfrak{M}^* uno zero scalare anche a destra (e quindi è l'unico zero di \mathfrak{M}^* , [1]). Ora, se l'ipotesi (*) vale in \mathfrak{M} essa vale, attesa la (2'), anche in \mathfrak{M}^* , ed \mathfrak{M}^* è reversibile al pari di \mathfrak{M} , come è facile verificare. Pertanto, a norma del T. 1,3,

T. 1,7.: *Il sistema delle lunghezze $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}/\mathfrak{U}$ è un gruppo omomorfo a \mathfrak{M} e quindi \mathfrak{U} è un sottoipergruppo f -normale di \mathfrak{M} , anzi è il più piccolo sottoipergruppo di \mathfrak{M} che gode di questa proprietà.*

Si può quindi definire la somma dei segmenti per isomorfismo fra le classi in \mathfrak{M} modulo \mathfrak{R} e quelle in $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ modulo \mathfrak{T} . Si trova che: *somme di segmenti direttamente congruenti sono direttamente congruenti.*

Un modello aritmetico: Sia G un gruppo additivo (non abeliano) ed H un suo sottogruppo invariante. Chiamiamo \mathfrak{M} l'insieme degli elementi di G con l'operazione multiforme \oplus definita come segue:

$$a \oplus b = H + a + b$$

dove la somma a secondo membro è effettuata in G . Per l'invarianza di H tale operazione è associativa. Tutti gli elementi di \mathfrak{M} provenienti da H e costituenti il sottoinsieme \mathfrak{U} di \mathfrak{M} sono zeri bilateri in \mathfrak{M} . \mathfrak{M} non ha altri zeri. Ogni elemento del com-

plesso $-a + H$ è in \mathfrak{M} un opposto bilatero di a con riferimento a qualunque zero. a non ha altri opposti. \mathfrak{U} è il più piccolo sotto ipergruppo di \mathfrak{M} ivi normale in senso forte. \mathfrak{M} risulta regolare, reversibile e soddisfa all'ipotesi (*).

§ 2. n -Traslazioni

Ci proponiamo ora di ritrovare i risultati precedenti senza fare uso dell'ipotesi (*). A questo scopo generalizzeremo, nel modo più naturale, la definizione di traslazione. Ci riferiremo, per il momento, ad un ipergruppo \mathfrak{M} completamente regolare e reversibile. Chiameremo n -complesso di \mathfrak{M} e lo indicheremo con A_n un complesso che sia somma di un numero finito n (variabile) di elementi di \mathfrak{M} .

$$A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n .$$

Gli elementi di \mathfrak{M} saranno considerati 1-complessi.

Rileviamo che gli n -complessi costituiscono un gruppoide associativo nel quale \mathfrak{M} è immerso.

L'equazione:

$$Y = A_n + x$$

individua una trasformazione multiforme di \mathfrak{M} in sè che chiameremo n -traslazione. La relazione binaria definita in $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$:

$$(x, x_2) \mathfrak{C}(y_1, y_2) \Leftrightarrow \exists A_n : y_1 \in A_n + x_1 \ \& \ y_2 \in A_n + x_2$$

è la relazione di congruenza diretta dei segmenti. \mathfrak{C} è manifestamente riflessiva e transitiva. Quanto alla simmetria basta osservare che, posto:

$$-A_n = -a_n - a_{n-1} - \dots - a_1$$

si ha:

$$(3) \quad l \in A_n \Leftrightarrow -l \in -A_n .$$

Infatti se $l \in a_1 + a_2$ segue, per la reversibilità di \mathfrak{M} , $-l \in -$

— $a_2 - a_1$. Si procede quindi per induzione. \mathcal{T} è pertanto una equivalenza.

Osserviamo in primo luogo che:

$$(4) \quad (0, 0) \equiv (0, l)(\mathcal{T}) \Leftrightarrow \exists A_n^0 : l \in A_n^0$$

dove A_n^0 indica un n -complesso il quale contiene, nel senso della teoria degli insiemi, lo zero. Detto quindi \mathfrak{U} l'insieme di tutti gli elementi $l \in \mathfrak{M}$ tali che $(0, l) \equiv (0, 0)(\mathcal{T})$, è agevole dimostrare, in base alla (3) ed alla (4) che \mathfrak{U} è un sottoipergruppo di \mathfrak{M} . È poi chiaro, per la (4), che \mathfrak{U} è dato dalla riunione in \mathfrak{M} di tutti gli n -complessi i quali contengono lo zero. Per questa ragione:

T. 2,1.: \mathfrak{U} è un sottoipergruppo f -normale di \mathfrak{M} , cioè, [1],

$$m + \mathfrak{U} - m = \mathfrak{U}$$

per ogni

$$m \in \mathfrak{M}.$$

Infatti

$$r \in m + \mathfrak{U} - m \Rightarrow r \in m + A_n^0 - m \subseteq \mathfrak{U}.$$

Viceversa:

$$\mathfrak{U} \subseteq 0 + \mathfrak{U} + 0 \subseteq m(-m + \mathfrak{U} + m) - m \subseteq m + \mathfrak{U} - m.$$

È poi evidente che:

T. 2,2.: \mathfrak{U} è il più piccolo sottoipergruppo f -normale di \mathfrak{M} .

Infine si verifica che:

$$(0, l_1) \equiv (0, l_2)(\mathcal{T}) \Leftrightarrow \mathfrak{U} + l_1 = \mathfrak{U} + l_2$$

Definita quindi la lunghezza del segmento (x_1, x_2) come l'insieme di tutti gli elementi $x \in \mathfrak{M}$ tali che $(x_1, x_2) \equiv (0, x)(\mathcal{T})$, possiamo enunciare il T. 1,7.

§ 3. \mathcal{R} -Traslazioni

Le conclusioni precedenti si ritrovano in un ipergruppo qualunque \mathfrak{M} , generalizzando ulteriormente la definizione di traslazione. Sia \mathcal{R}' una relazione di equivalenza definita in \mathfrak{M} . Diremo che \mathcal{R}' è *regolare* se

$$a \equiv a'(\mathcal{R}') \ \& \ b \equiv b'(\mathcal{R}') \Rightarrow (a + b) \equiv (a' + b')(\mathcal{R}')$$

dove la congruenza dei complessi indica che essi appartengono ad una medesima classe modulo \mathcal{R}' . Risulta, in perfetta analogia con la teoria dei gruppi, [2]:

T. 3,1.: *Ad ogni sottoipergruppo f -normale \mathfrak{U}' corrisponde una equivalenza \mathcal{R}' regolare in \mathfrak{M} tale che:*

$$\mathfrak{M}/\mathfrak{U}' = \mathfrak{M}/\mathcal{R}' .$$

Basta definire \mathcal{R}' così:

$$a \equiv b(\mathcal{R}') \Leftrightarrow \mathfrak{U}' + a = \mathfrak{U}' + b$$

e pensare che $\mathfrak{M}/\mathfrak{U}'$ è un gruppo omomorfo a \mathfrak{M} .

T. 3,2.: *Ad ogni equivalenza \mathcal{R}' regolare in \mathfrak{M} corrisponde un sottoipergruppo f -normale \mathfrak{U}' di \mathfrak{M} tale che:*

$$\mathfrak{M}/\mathcal{R}' = \mathfrak{M}/\mathfrak{U}' .$$

Poichè \mathcal{R}' è regolare, la somma di due classi è contenuta in una sola classe modulo \mathcal{R}' . Pertanto l'insieme quoziente $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}/\mathcal{R}'$, dentro il quale la somma viene definita in modo naturale, è un gruppoide associativo che soddisfa l'assioma dei complementari. Se infatti a' e b' sono due classi modulo \mathcal{R}' , detti a , b due rispettivi rappresentanti, esiste in \mathfrak{M} almeno un elemento x tale che $a + x \equiv b$ e quindi, in \mathfrak{M}' , $a' + b' = x'$, dove x' è la classe che contiene x . Analogamente a sinistra. Pertanto \mathfrak{M}' è un gruppo omomorfo a \mathfrak{M} , \mathcal{R}' essendo l'equivalenza indotta in \mathfrak{M} dall'omomorfismo. Esiste allora un sottoipergruppo f -normale \mathfrak{U}' di \mathfrak{M} tale che:

$$\mathfrak{M}/\mathfrak{U}' = \mathfrak{M}/\mathfrak{R}' ,$$

cioè:

$$a \equiv b(\mathfrak{R}') \Leftrightarrow \mathfrak{U}' + a = \mathfrak{U}' + b .$$

L'insieme delle equivalenze regolari in \mathfrak{M} è un reticolo direttamente isomorfo a quello dei sottogruppi f -normali, il quale è modulare, [1].

Ciò premesso, sia \mathfrak{R} la più piccola equivalenza regolare in \mathfrak{M} . Ad essa è associato il più piccolo sottoipergruppo f -normale \mathfrak{U} . È ovvio che \mathfrak{R} coincide con l'uguaglianza se e solo se \mathfrak{M} è un gruppo, nel qual caso \mathfrak{U} coincide con lo zero di \mathfrak{M} . Posto:

$$(x_1, x_2)\mathfrak{T}(y_1, y_2) \Leftrightarrow \exists a, b : y_1 \in a + x_1, y_2 \in b + x_2, a \equiv b(\mathfrak{R}) .$$

\mathfrak{T} è una equivalenza, la congruenza diretta dei segmenti. Sia z un elemento prefissato di \mathfrak{U} . Definiamo *lunghezza* del segmento (x_1, x_2) l'insieme degli elementi $x \in \mathfrak{M}$ tali che $(z, x) \equiv (x_1, x_2)(\mathfrak{T})$. È ovvio che:

$$(z, x) \equiv (z, x')(\mathfrak{T}) \Leftrightarrow x' \in \mathfrak{U} + x$$

e quindi la lunghezza del segmento non dipende dalla scelta di z in \mathfrak{U} . Possiamo ancora enunciare il T. 1,7. Se \mathfrak{M} possiede uno zero, sinistro o destro, abbiamo:

$$(x_1, x_2) \equiv (y_1, y_2)(\mathfrak{T}) \Leftrightarrow (-x_1 + x_2) \equiv (-y_1 + y_2)(\mathfrak{R})$$

dove $-x_1, -y_1$ sono opposti arbitrari di x_1, y_1 .

Osserviamo infine che in ogni caso la relazione \mathfrak{T} si può ottenere attraverso le \mathfrak{R} -traslazioni, intendendo per \mathfrak{R} -traslazione una trasformazione multiforme di equazione:

$$Y = A + x$$

dove A è una classe modulo \mathfrak{R} . Le \mathfrak{R} -traslazioni costituiscono un gruppo, omomorfo a \mathfrak{M} ed isomorfo al gruppo \mathfrak{M}^* delle lunghezze.

BIBLIOGRAFIA

- [1] DRESHER-ORE: *Theory of Multigrups*. Nota pubblicata nell'*American Journal of Mathematics*. Vol. LX n. 3. Luglio 1938.
- [2] DUBREIL PAUL: *Algebre*. Seconda Edizione. Casa Editrice Gauthier & Villars. Parigi 1954.
- [3] MORIN UGO, BUSULINI FRANCA: *Alcune considerazioni sopra una geometria generale*. Estratto dagli Atti dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. Classe Scienze Matematiche. Tomo CXVII. Anno Accademico 1958-59.