Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Stefano Guazzone

Sui Λ-moduli liberi e alcuni teoremi di J. C. Everett

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 32 (1962), p. 304-312

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1962__32__304_0>

SUI Λ-MODULI LIBERI E ALCUNI TEOREMI DI J. C. EVERETT

Nota (*) *di* STEFANO GUAZZONE (*a Roma*) (**)

Il problema studiato riguarda la estensione ai Λ-moduli del teorema che afferma essere liberi i sottogruppi dei gruppi abeliani liberi. Tale problema si può ritenere banale quando si supponga a priori di considerare solo moduli sopra anelli commutativi. Difatti è ben noto ed elementare che in tal caso la condizione necessaria e sufficiente per la validità del teorema citato è che Λ sia anello principale. Ma nel caso non commutativo si presentano dei fenomeni di natura abbastanza delicata, che rendono in parte ragione del fatto che si sia giunti piuttosto di recente ad una forma corretta del teorema generale. Esso è in verità assai poco sorprendente, almeno « a posteriori »: « Condizione necessaria e sufficiente affinchè in una fissata categoria di Λ-moduli, i sottomoduli di ogni Λ-modulo libero siano liberi, è che Λ sia anello a ideali liberi ». (Sottintendiamo che in questo enunciato si deve aggiungere l'aggettivo *destri* oppure *sinistri* ogni qualvolta si parla di moduli, ideali, ecc., ma sempre lo stesso aggettivo). Tale proposizione è nota, e si può far discendere come corollario da un risultato di I. Kaplanski (cfr. [5] [1]), p. 13). Un notevole contributo era stato dato precedentemente da J. C. Everett (cfr. [7] e [8]), il quale pur superando certe difficoltà

(*) Pervenuta in redazione il 5 giugno 1962.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Roma.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

[1]) I numeri fra [ ] rinviano alla Bibliografia in fondo alla Nota.

peculiari degli anelli non commutativi, non giungeva al teorema generale sopra citato, ma rimaneva legato ad una ipotesi restrittiva, di cui è per altro interessante tener conto a parte. Chi scrive ha compiuto un riesame di tutta la questione che ha permesso di stabilire che:

I) il teorema generale si può dimostrare direttamente mediante una lieve modifica del ragionamento classico valido per i gruppi abeliani liberi;

II) fondandosi su questa dimostrazione del teorema generale, e precisato opportunamente il concetto di *rango* di un Λ-modulo libero, il teorema di Everett segue facilmente come corollario, attingendo dal lavoro [8] di Everett solo quanto occorre per escludere la presenza di divisori dello zero in Λ;

III) l'ipotesi del teorema di Everett è effettivamente restrittiva, perchè esclude dalla considerazione gli anelli a ideali liberi ma non tutti *principali*, fenomeno che può presentarsi solo in anelli non commutativi, ed effettivamente si presenta;

IV) con ragionamento analogo a quello adoperato in [5], p. 11 è agevole caratterizzare i corpi come i soli anelli sopra i quali i moduli sono tutti liberi. Fatto presumibilmente noto a qualche specialista, ma di cui non sembra esserci menzione esplicita nella letteratura.

Passiamo pertanto a dimostrare la validità delle affermazioni *I*, ..., *IV*.

1. Gli anelli Λ che interverranno saranno tutti anelli (associativi) dotati di unità moltiplicativa $\neq 0$. I Λ-moduli saranno supposti unitari, e poichè Λ può essere non commutativo, svolgeremo l'esposizione con riferimento a moduli, ideali, etc. d e s t r i, valendo però, com'è ben noto, una teoria equivalente per enti s i n i s t r i. Ci atterremo del resto alla terminologia e notazioni di Bourbaki-Eilenberg-Cartan. Rinviamo in particolare a Bourbaki, « Algèbre », Chap. 1, 2, 7, 8 per le definizioni e proprietà elementari degli anelli, Λ-moduli e Λ-omomorfismi.

È noto che ogni anello Λ dotato di $1 \neq 0$ si può considerare come Λ-modulo destro (anzi bilatero) sopra se stesso, e che tale

Λ-modulo, che indicheremo ancora con Λ, è libero, non nullo e monogeno (o ciclico), ammettendo come base l'unità moltiplicativa.

I Λ-moduli destri liberi sono somme dirette di loro sottomoduli ciclici liberi. Pertanto essi sono isomorfi alle somme dirette di copie di Λ.

Se $\Lambda = K$ è un corpo (anche non commutativo) i K-moduli destri sono tutti liberi perchè entro ogni K-modulo i sistemi linearmente indipendenti massimali sono anche sistemi di generatori, cioè « basi » [2]).

Dimostriamo che vale anche il viceversa, cioè che vale il

TEOREMA 1: *Per un anello Λ dotato di $1 \neq 0$ le proprietà*

a) ogni Λ-modulo destro è libero;

b) Λ è un corpo;

sono equivalenti [3]).

Dobbiamo provare che *a*) implica *b*). Se vale l'ipotesi *a*), gli ideali destri di Λ e i suoi moduli quozienti rispetto agli ideali destri sono moduli liberi. Pertanto, in base a un noto teorema elementare, gli ideali destri di Λ sono addendi diretti in Λ. Sia $\lambda \neq 0$ un elemento di Λ, ed M un suo sottomodulo, *massimale* nell'insieme, ordinato per inclusione, dei sottomoduli di Λ che non contengono λ.

Allora è $\Lambda = M \oplus N$ ed N è *semplice* (ammette $\{0\}$ come unico sottomodulo proprio). Infatti ripetendo per N il ragionamento fatto per M, se N non fosse semplice sarebbe anche $N = E \oplus F$ con E, F entrambi $\neq \{0\}$; dunque $\Lambda = E \oplus F \oplus M$ e λ dovrebbe essere fuori di $M \oplus E$ o di $M \oplus F$ perchè $E \cap F = \{0\}$. Ciò contraddice la proprietà massimale di M. Dunque N è semplice, quindi ciclico libero, cioè isomorfo a Λ. Perciò Λ è semplice, ossia non ha ideali destri non banali, non è a quadrato nullo, dunque è un corpo [4]). *c.b.d.*

Se l'anello Λ è l'anello Z degli interi razionali, o, più in ge-

---

[2]) Cfr. [6], p. 103; oppure [11], p. 176.

[3]) Cfr. [9], p. 48.

[4]) Cfr. [1], p. 630; oppure [2], p. 144.

nerale, un anello principale [5]) che non sia un corpo, non tutti i Λ-moduli sono liberi, però è nota ed ovvia la applicabilità ai moduli (liberi) sopra un anello principale del ragionamento che assicura essere liberi i sottogruppi dei gruppi abeliani liberi. Tale ragionamento, unitamente alla facile

PROPOSIZIONE 1: *Se gli ideali di un anello Λ commutativo sono liberi, Λ è principale*;

fornisce una semplice dimostrazione del seguente e ben noto:

TEOREMA 2: *Per un anello commutativo Λ dotato di $1 \neq 0$ le proprietà*:

a) *Λ è principale*;

b) *i sottomoduli di ogni modulo libero sono liberi* (*e di rango* [6]) *non superiore*);

sono equivalenti.

Ciò premesso passiamo senz'altro a considerare il caso più generale, cioè quello dei moduli sopra anelli qualsiasi, e dimostriamo il

TEOREMA 3: *Per un anello Λ dotato di $1 \neq 0$ le seguenti proprietà*:

a) *Λ è a ideali destri liberi*;

b) *se M è Λ-modulo libero, tutti i sottomoduli destri di M sono liberi*;

sono equivalenti.

Dim.: È ovvio che *b*) implica *a*). Mostriamo come il ragionamento classico con cui si deduce *b*) dall'ipotesi $\Lambda = Z$, permette, con lievi modifiche, di provare che *a*) implica *b*). Sia dunque Λ a ideali destri liberi, e sia M un Λ-modulo destro libero. Sia $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una base di M che supponiamo *bene ordinata*. Possiamo pertanto ritenere che l'insieme di indici A sia un tratto iniziale di ordinali, tale che Card $(A) \leqslant$ Card (M). Scriveremo allora, indicando con $u_\alpha \Lambda$ il modulo ciclico libero generato da u_α:

$$M = \sum_{\alpha \in A} u_\alpha \Lambda$$

ove $\sum$ indica somma diretta.

---

[5]) Cioè commutativo, a ideali principali, e privo di divisori dello 0.

[6]) Cfr. [4], p. 138.

Sia $\beta \in A$ un ordinale fissato. Consideriamo i sottomoduli di M:

$$M_\beta = \sum_{\alpha<\beta} u_\alpha \Lambda \qquad \text{ed} \qquad \overline{M}_\beta = \sum_{\alpha\leqslant\beta} u_\alpha \Lambda$$

con la convenzione $M_\beta = \{0\}$ se β è il primo elemento di A. Sia N un sottomodulo arbitrario di M. Dimostriamo che N è libero costruendone una base con procedimento induttivo rispetto agli indici $\alpha \in A$.

È per definizione

$$\overline{M}_\beta = M_\beta \oplus u_\beta \Lambda$$

ed ogni elemento $u \in \overline{M}_\beta$ ammette un'unica rappresentazione

$$u = v + u_\beta \lambda(u)$$

con $v \in M_\beta$, $\lambda(u) \in \Lambda$.

Consideriamo l'applicazione

$$\varphi_\beta : \overline{M}_\beta \to \Lambda$$

definita da: $\varphi_\beta(u) = \lambda(u)$. La φ_β è un epimorfismo. Infatti se η è l'isomorfismo $u_\beta\lambda \to \lambda$, e p_β è la proiezione canonica di M sopra il suo addendo diretto di indice β, è $\varphi_\beta = \eta \circ p_\beta$

Poniamo

$$N \cap \overline{M}_\beta = \overline{N}_\beta, \; N \cap M_\beta = N_\beta, \; \varphi_\beta \mid \overline{N}_\beta = \psi_\beta, \; \mathrm{Im}(\psi_\beta) = \Lambda_\beta .$$

È ovviamente $\psi_\beta : \overline{N}_\beta \to \Lambda$ un omomorfismo, quindi Λ_β è un ideale destro di Λ, e quindi libero per ipotesi.

È inoltre Ker $(\psi_\beta) = N_\beta$, dunque, posto $\overline{N}_\beta = N_\beta \oplus G$, $G = \sum_{\gamma\in\Gamma} v_\gamma \Lambda$,

$$\overline{N}_\beta = N_\beta \oplus \sum_{\gamma\in\Gamma} v_\gamma \Lambda . \tag{i}$$

Sia β_1 il primo elemento dell'insieme di indici $\{\alpha \in A \mid N \cap \cap \overline{M}_\alpha \neq 0\}$; allora è $N_{\beta_1} = 0$ e la (i) diventa

$$\overline{N}_{\beta_1} = \sum_{\gamma\in\Gamma} v_\gamma \Lambda .$$

Se è $\overline{N}_{\beta_1} = N$ abbiamo concluso. Altrimenti sia β_2 il primo elemento dell'insieme $\{\alpha \in A \mid \alpha > \beta_1 \text{ ed } \overline{N}_\alpha \neq \overline{N}_{\beta_1}\}$; otteniamo allora come in (i):

$$(ii) \qquad \overline{N}_{\beta_2} = N_{\beta_2} \oplus \sum_{\delta \in \Delta} w_\delta \Lambda$$

e poichè $N_{\beta_2} = \overline{N}_{\beta_1}$:

$$\overline{N}_{\beta_2} = \overline{N}_{\beta_1} \oplus \sum_{\delta \in \Delta} w_\delta \Lambda = \sum_{\gamma \in \Gamma} v_\gamma \Lambda \oplus \sum_{\delta \in \Delta} w_\delta \Lambda \,.$$

Proseguendo, se necessario, allo stesso modo fino ad esaurimento di N, si otterrà una rappresentazione di N come somma diretta di Λ-moduli ciclici, rispetto alla base:

$$\{v_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \cup \{w_\delta\}_{\delta \in \Delta} \cup \ldots \qquad \textit{c.b.d.}$$

2. In questo paragrafo vogliamo caratterizzare gli anelli Λ sopra i quali i sottomoduli dei moduli liberi sono liberi ed hanno rango non superiore.

Occorre anzitutto precisare cosa convenga intendere per « rango » di un Λ-modulo libero. Può infatti accadere che un anello Λ sia isomorfo, come Λ-modulo, alla somma diretta di un numero finito qualunque di copie di Λ stesso (ad es. l'anello degli endomorfismi del gruppo somma diretta di un'infinità numerabile di copie di Z; cfr. [3], p. 41, eserc. 8).

DEFINIZIONE 1: *Si dirà rango di un Λ-modulo libero M, e si indicherà con $b(M)$, il minimo numero cardinale fra quelli delle basi di M* (cfr. [4] p. 39).

DEFINIZIONE 2: *Si dirà che un Λ-modulo libero M soddisfa alla condizione di monotonia per il rango quando ogni suo sottomodulo N è libero ed è inoltre $b(N) \leqslant b(M)$.*

PROPOSIZIONE 2: *Per un anello Λ dotato di $1 \neq 0$ le seguenti proprietà:*

a) Λ è a ideali destri ciclici e liberi;

b) ogni Λ-modulo destro libero soddisfa alla condizione di monotonia per il rango;

sono equivalenti.

Dim.: *a*) implica *b*). Infatti se M è Λ-modulo libero, possiamo rappresentarlo rispetto ad una base $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ tale che Card $(A) =$ $= b(M)$. Poichè gli ideali di Λ sono liberi e *monogeni*, la costruzione della base di un sottomodulo N come nel teorema 3 fornisce una base $\{v_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ di N tale che Card $(\Gamma) \leqslant b(M)$.

Poichè $b(N) \leqslant$ Card (Γ), segue l'asserto.

b) implica *a*). Infatti da *b*) segue in particolare che Λ come modulo soddisfa alla condizione di monotonia per il rango. Ma è $b(\Lambda) = 1$, dunque Λ è a ideali destri ciclici e liberi.

Le argomentazioni svolte appaiono più semplici e di maggior generalità di quelle usate da C. J. Everett in [7], (*E*) ed (*F*). Veramente ivi è dato un risultato un po' diverso dalla proposizione 2 e precisamente la seguente:

PROPOSIZIONE 3: *Per un anello Λ dotato di $1 \neq 0$ le seguenti proprietà:*

a) *Λ è a ideali destri ciclici e liberi*;

b) *esiste almeno un Λ-modulo destro libero $\neq 0$ e di rango finito che soddisfa alla condizione di monotonia per il rango*;

sono equivalenti.

Proponiamo la seguente dimostrazione di questo enunciato:

Dim.: Abbiamo in realtà da provare solamente che *b*) implica *a*).

Sia M il Λ-modulo, supposto esistente, libero e di rango finito e soddisfacente alla condizione di monotonia per il rango. Ciò implica la condizione della catena ascendente in M, e quindi in Λ. Allora gli ideali di Λ, liberi perchè isomorfi a sottomoduli di M, devono essere anche monogeni com'è facile verificare ragionando per assurdo. *c.b.d.*

Allo scopo di dare un enunciato più espressivo della proposizione 2 (o 3) basato su di un approfondimento della natura degli anelli a ideali ciclici e liberi osserviamo alcune notevoli proprietà di detti anelli, seguendo C. J. Everett [8]. Premettiamo la

DEFINIZIONE 3: *Un anello Λ si dice n o e t h e r i a n o d e s t r o se vale in Λ la condizione della catena ascendente per gli ideali destri.*

È ovvio che un anello a ideali destri ciclici e liberi è noetheriano destro.

PROPOSIZIONE 4: *Se un anello Λ a ideali destri ciclici e liberi contiene divisori dello zero, allora contiene elementi α, β, γ tali che* $\alpha \cdot \beta = 1$, $\alpha \cdot \gamma = 0$, $\gamma \neq 0$.

Dim.: Sia $\delta \cdot \gamma = 0$ con δ, $\gamma \neq 0$. Ma è $\delta\Lambda = \varrho\Lambda$ con $\varrho\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$.

Dunque $\delta = \varrho\alpha$, $\varrho = \delta\beta = \varrho\alpha\beta$; $\varrho(\alpha\beta - 1) = 0 \Rightarrow \alpha \cdot \beta = 1$.

È poi $\delta\gamma = \varrho\alpha\gamma = 0 \Rightarrow \alpha\gamma = 0$ *c.b.d.*

PROPOSIZIONE 5: *Ogni anello Λ a ideali destri ciclici e liberi è privo di divisori dello zero.*

Dim.: Se Λ contiene divisori dello zero allora contiene elementi α, β, γ tali che $\alpha \cdot \beta = 1$, $\alpha \cdot \gamma = 0$, $\gamma \neq 0$. Ciò viola la condizione della catena ascendente. Infatti gli ideali destri generati da:

$$\{\gamma\};\ \{\gamma, \beta\gamma\};\ \{\gamma, \beta\gamma, \beta^2\gamma\}; \dots;\ \{\gamma, \dots, \beta^{n-1}\gamma\}; \dots$$

forniscono una catena ascendente illimitata di ideali propri: da una relazione del tipo $\beta^n\gamma = \gamma\lambda_1 + \beta\gamma\lambda_2 + \dots + \beta^{n-1}\gamma\lambda_n$ seguirebbe $\gamma = \alpha^n\beta^n\gamma = 0$. Ma Λ è noetheriano destro, quindi non ha divisori dello zero. *c.b.d.*

DEFINIZIONE 4: *Un anello si dice* **principale destro** *se è a ideali destri ciclici e privo di divisori dello zero.*

Poichè ovviamente ogni anello principale destro è a ideali destri ciclici e *liberi*, possiamo riassumere i risultati di questo paragrafo nel

TEOREMA 4: *Per un anello Λ dotato di $1 \neq 0$ le proprietà*

a) Λ è principale destro;

b) esiste un Λ-modulo destro libero di rango finito e $\neq 0$ che soddisfa alla condizione di monotonia per il rango;

c) Λ è a ideali destri ciclici e liberi;

d) ogni Λ-modulo destro libero soddisfa alla condizione di monotonia per il rango;

sono equivalenti.

Si noti che non si può asserire che gli anelli sopra i quali i moduli liberi hanno sottomoduli tutti liberi sono gli anelli principali destri [7]), infatti si conoscono anelli a ideali liberi ma non tutti monogeni, come ad es. l'algebra libera generata sopra un corpo da due indeterminate (cfr. [5], p. 46).

BIBLIOGRAFIA

[1] Baer R.: Bull. Am. Math. Soc., 48, 1942.
[2] Bourbaki N.: Algèbre, Chapitre 1 (Hermann, 1958).
[3] Bourbaki N.: Algèbre, Chapitre 2 (Hermann, 1955).
[4] Bourbaki N.: Algèbre, Chapitre 3 (Hermann, 1958).
[5] Cartan H. e Eilenberg S.: Homological Algebra (Princeton University Press, 1956).
[6] Chevalley C.: *Fundamental concepts of algebra* (New York, Academic Press, 1956).
[7] Everett J. C.: Bull. Am. Math. Soc., 48, 1942.
[8] Everett J. C., Bull. Am. Math. Soc., 5, 1945.
[9] Kaplanski I.: *Infinite abelian groups* (Ann Arbor, Univ. of Michigan Press, 1954).
[10] Kurosch A. G.: *The theory of groups*. Vol. 1 (New York, Chelsea, 1955).
[11] Northcott D. G.: *An introduction to homological algebra* (Cambridge, C.U.P., 1960).

[7]) Cfr. [10], p. 161 e [9], p. 77.