

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

BRUNO PINI

Proprietà locali delle soluzioni di una classe di equazioni ipoellittiche

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 32 (1962), p. 221-238

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1962__32__221_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

**PROPRIETÀ LOCALI DELLE SOLUZIONI
DI UNA CLASSE DI EQUAZIONI IPOELLITTICHE**

Nota () di BRUNO PINI (a Bologna)*

1. - Indichiamo con $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $s = (s_1, \dots, s_n)$ punti di R^n (spazio euclideo reale n -dimensionale), con $s' + is''$, s' e $s'' \in R^n$, punti di C^n (spazio euclideo complesso n -dimensionale) e poniamo $\|x\| = (\sum_{k=1}^n x_k^2)^{1/2}$, $\|s\| = (\sum_{k=1}^n s_k^2)^{1/2}$.

Sia $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ un polinomio differenziale a coefficienti costanti (reali o complessi); l'equazione lineare

$$(1) \quad P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$$

si dice *ipoellittica* se ogni sua soluzione, supposta una distribuzione, è funzione ordinaria localmente di classe C^∞ .

Si dice *classe di Gevrey* G_β ($\beta \geq 0$) l'insieme di tutte le funzioni $u(x) = u(x_1, \dots, x_n)$, definite in una regione V , dotate delle derivate di tutti gli ordini, a ciascuna delle quali sono associabili delle costanti positive C, B_1, \dots, B_n tali che

$$(2) \quad \left| \frac{\partial^{q_1 + \dots + q_n} u(x)}{\partial x_1^{q_1} \dots \partial x_n^{q_n}} \right| < CB_1^{q_1} \dots B_n^{q_n} q_1^{\beta q_1} \dots q_n^{\beta q_n}$$

per $q_1, \dots, q_n = 0, 1, \dots$

(*) Pervenuta in redazione il 30 aprile, 1962.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Bologna.

È stato provato che affinché ogni soluzione dell'equazione (1) in una qualunque regione limitata appartenga alla classe G_β è necessario e sufficiente che la varietà $N(P)$, definita da $P(-is' + s'') = 0$, appartenga alla parte dello spazio C^n definita dalla disuguaglianza

$$(3) \quad \|s''\| \geq C \|s'\|^{1/\beta} - C_1$$

per certe costanti $C > 0$ e C_1 .

D'altra parte l'equazione (1) è ipoellittica quando e solo quando da $P(-is' + s'') = 0$ e $\|s'\| \rightarrow +\infty$ segue che $\|s''\| \rightarrow +\infty$; in questa ipotesi vale anche la relazione $\|s''\| \geq C \|s'\|^h$ per un certo $h > 0$; da ciò segue che tutte le soluzioni di una stessa equazione ipoellittica appartengono a una certa classe di Gevrey.

Facciamo la seguente osservazione particolare: consideriamo l'equazione parabolica in forma canonica a coefficienti costanti

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial u}{\partial x_2} + a \frac{\partial u}{\partial x_1} + bu = 0;$$

ogni sua soluzione è di classe G_1 in x_1 e di classe G_2 in x_2 ; ovviamente operando una sostituzione lineare (reale) su x_1 e x_2 si potrà affermare solo l'appartenenza alla classe G_2 nel complesso delle nuove variabili.

C'è quindi da aspettarsi che le soluzioni di certe equazioni ipoellittiche, presentate in una certa *forma canonica*, appartengano a una classe di Gevrey rispetto a un gruppo di variabili, a un'altra classe di Gevrey rispetto a un altro gruppo di variabili, ecc. Nella presente Nota consideriamo una classe di equazioni ipoellittiche per le quali si verifica tale presunzione.

Consideriamo l'equazione

$$(4) \quad L(u) \equiv P_1 \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0;$$

$P_1 \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)$ è una combinazione lineare a coefficienti costanti (reali

o complessi) di operatori differenziali del tipo

$$(5) \quad \frac{\partial^{H_1+H_2+\dots+H_\nu}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_{k_1}^{h_{k_1}} \partial x_{k_1+1}^{h_{k_1+1}} \dots \partial x_{k_2}^{h_{k_2}} \dots \partial x_{k_{\nu-1}+1}^{h_{k_{\nu-1}+1}} \dots \partial x_{k_\nu}^{h_{k_\nu}}}$$

ove $H_j = h_{k_{j-1}+1} + \dots + k_{k_j}$, $0 = k_0 < k_1 < \dots < k_\nu$, $k_\nu > 2$ e

$$(6) \quad \frac{H_1}{m_1} + \frac{H_2}{m_2} + \dots + \frac{H_\nu}{m_\nu} = 1$$

essendo m_1, \dots, m_ν numeri naturali tali che $m_1 > m_2 > \dots > m_\nu > 0$.

Proviamo che:

Condizione necessaria e sufficiente affinché l'equazione $P_1(\partial/\partial x)u = 0$ sia ipoellittica è che sia

$$(7) \quad P_1(-is) \neq 0$$

per ogni s reale non nullo.

Poniamo

$$(8) \quad s_{k_{j-1}+l} = \pm |\tau_{k_{j-1}+l}|^{m_1/m_j}$$

per $j = 1, 2, \dots, \nu$; $l = 1, 2, \dots, k_j - k_{j-1}$; e

$$(9) \quad \varrho = \|\tau\| - \left(\sum_{h=1}^{k_\nu} \tau_h^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{\nu} \sum_{h=k_{j-1}+1}^{k_j} |s_h|^{2m_j/m_1}\right)^{1/2}.$$

Scriviamo simbolicamente $P_1(-is) = P'_1(\mp i |\tau|)$; fissati comunque i segni delle s_k , il polinomio $P'_1(\mp i |\tau|)$ riesce omogeneo di grado m_1 e, a causa della (7), si ha che per $\|\tau\| = 1$ esiste una costante positiva C tale che

$$C^{-1} < |P'_1(\mp i |\tau|)| < C$$

onde

$$(10) \quad C^{-1}\varrho^{m_1} < |P_1(-is)| = \varrho^{m_1} |P'_1\left(\mp i \frac{|\tau|}{\|\tau\|}\right)| < C\varrho^{m_1}.$$

Ricordiamo ora che condizione necessaria e sufficiente affinché l'equazione $P(\partial/\partial x)u = 0$ sia ipoellittica è che, indicata con D^q una qualunque derivata d'ordine q rispetto alle s_k , si abbia

$$(11) \quad \frac{D^q P(-is)}{P(-is)} \xrightarrow{\|s\| \rightarrow +\infty} 0.$$

Ora da (10) segue che $|P_1(-is)| = O(\rho^{m_1})$ mentre ovviamente $|D^q P_1(-is)| = o(\rho^{m_1})$; pertanto la (11) è soddisfatta.

Supponiamo ora che per un certo $s_0 = (s_{0,1}, \dots, s_{0,k_p})$ non nullo sia $P_1(-is_0) = 0$; da $P_1'(\mp i\lambda | \tau_0 |) = \lambda^{m_1} P_1'(\mp i | \tau_0 |)$ segue che per ogni $\lambda > 0$ riesce

$$P_1(-i\lambda s_{0,1}, \dots, -i\lambda s_{0,k_1}, -i\lambda^{m_1/m_2} s_{0,k_1+1}, \dots, -i\lambda^{m_1/m_2} s_{0,k_2}, \dots, \\ -i\lambda^{m_1/m_{p-1}} s_{0,k_{p-1}+1}, \dots, -i\lambda^{m_1/m_p} s_{0,k_p}) = 0.$$

Ora, fissato uno qualunque dei termini (5), si ha

$$\frac{\partial^{H_1+\dots+H_p}}{\partial s_1^{h_1} \dots \partial s_{k_p}^{h_{k_p}}} P_1(-is) = \text{cost} \neq 0$$

mentre $P_1(-is) = 0$ per degli s opportuni con $\|s\|$ arbitrariamente grande; ciò contraddice la (11).

Nel seguito consideriamo l'equazione (4) con la condizione $P_1(-is) \neq 0$ per s reale non nullo.

2. ¹⁾ - Indichiamo con K lo spazio delle funzioni di classe C^∞ a supporto compatto con la nota topologia e con K' lo spazio delle distribuzioni su K . Consideriamo l'equazione lineare

¹⁾ Per una esposizione completa di quanto sommariamente è riportato nel n. 2 rimandiamo a G. E. SHILOV, *Proprietà locali delle soluzioni delle equazioni differenziali alle derivate parziali con coefficienti costanti*, Uspehi mat. nauk XIV, n. 5 (89) 1959 (in russo).

a coefficienti costanti

$$(12) \quad P \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0 .$$

Per soluzione di (12) intendiamo una distribuzione $u(x)$ definita in una regione $G \subset R^n$ tale che per ogni $\varphi(x) \in K$ concentrata in G sia

$$\left(P \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) u, \varphi \right) \equiv \left(u, \bar{P} \left(- \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi \right) = 0 ,$$

intendendo col soprasegno il coniugio. La u si può prolungare su tutto K restando invariata in una regione V interna a G . Pertanto se G è limitata la u si può pensare a supporto limitato concentrato in G dopo che sia stata moltiplicata per una funzione di classe C^∞ eguale a zero fuori di G ed eguale ad 1 in V .

Seguendo Schwartz si chiama soluzione fondamentale di (12) una distribuzione $\varepsilon(x)$ di K' tale che

$$P \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \varepsilon(x) = \delta(x) .$$

Risulta che se una soluzione fondamentale $\varepsilon(x)$ dell'equazione (12) è di classe C^∞ dappertutto tranne che nell'origine delle coordinate, allora ogni soluzione locale $u(x)$ dell'equazione (12), supposta una distribuzione di K' , è una funzione ordinaria di classe C^∞ . Pertanto un'equazione è ipoellittica se e soltanto se ammette una soluzione fondamentale del tipo indicato.

Se la (12) è ipoellittica i valori di una sua soluzione $u(x)$ in una regione limitata si possono esprimere nel modo consueto mediante i valori di essa e di certe sue derivate sulla frontiera.

Sia infatti $\alpha(x)$ una funzione di classe C^∞ eguale a zero fuori di un intorno U dell'origine delle coordinate dello spazio R^n ed eguale ad 1 in un intorno più ristretto dell'origine. Indichiamo con $W \subset V$ una regione dotata della proprietà che la somma aritmetica $W + U$ sia contenuta in V . Allora in W (che risulta non vuoto se U è sufficientemente ristretto) si ha

$$P \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) [(1 - \alpha)\varepsilon] * u(x) = u(x) .$$

Questa, nel caso ipoellittico, è un'eguaglianza tra funzioni ordinarie e può scriversi

$$\begin{aligned} u(x) &= (1 - \alpha)\varepsilon * P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = \\ &= \int (1 - \alpha)\varepsilon(\xi)P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x - \xi)d\xi. \end{aligned}$$

Passando al limite per $\alpha(\xi)$ tendente alla funzione caratteristica di U si ha

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{R^n - U} \varepsilon(\xi)P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x - \xi)d\xi = \\ &= \int_{R^n - U} \varepsilon(\xi)P\left(-\frac{\partial}{\partial \xi}\right) u(x - \xi)d\xi. \end{aligned}$$

La $u(x)$ si può pensare di classe C^∞ dappertutto e nulla fuori di una regione $V' \supset V$, pur non essendo, in generale, soluzione di (12) fuori di V . Eseguendo delle integrazioni per parti, poichè in $R^n - U$ è $P(\partial/\partial \xi)\varepsilon(\xi) = 0$, si ottiene

$$\begin{aligned} (13) \quad u(x) &= \int_{\Gamma} \sum P_k\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right) \varepsilon(\xi) \cdot Q_k\left(-\frac{\partial}{\partial \xi}\right) u(x - \xi)d\xi = \\ &= \sum \int_{\Gamma} c_k(\xi)Q_k\left(-\frac{\partial}{\partial \xi}\right) u(x - \xi)d\xi, \end{aligned}$$

ove P_k e Q_k sono polinomi di grado $< m$ (grado di $P(\partial/\partial x)$), $c_k(\xi) = P_k(\partial/\partial \xi)\varepsilon(\xi)$, e Γ indica la frontiera di U .

La (13) si può anche scrivere

$$u(x) = \int_{x-\Gamma} \sum c_k(x - \eta)Q_k\left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right) u(\eta)d\eta.$$

Poichè U si può far variare insieme con x con molta arbitrarietà, allora, fissato un punto x_0 , almeno per x abbastanza pros-

simo a x_0 si può scrivere

$$(14) \quad u(x) = \int_{x_0 - \Gamma} \sum c_k(x - \eta) Q_k \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \right) u(\eta) d\eta .$$

Per le derivate di $u(x)$ si ottengono espressioni del tipo

$$(15) \quad R \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) u(x) = \int_{x_0 - \Gamma} \sum R \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) c_k(x - \eta) \cdot Q_k \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \right) u(\eta) d\eta .$$

3. - Chiameremo classe di Gevrey $G_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p}^{k_1, k_2, \dots, k_p}$ l'insieme di tutte le funzioni $u(x)$, $x = (x_1, \dots, x_{k_1}; x_{k_1+1}, \dots, x_{k_2}; \dots; x_{k_{p-1}+1}, \dots, x_{k_p})$ definite in una regione V dotate delle derivate di tutti gli ordini verificanti le diseuguaglianze

$$(16) \quad \left| \frac{\partial^{H_1 + \dots + H_p} u(x)}{\partial x_1^{h_1} \dots \partial x_{k_1}^{h_{k_1}} \dots \partial x_{k_{p-1}+1}^{h_{k_{p-1}+1}} \dots \partial x_{k_p}^{h_{k_p}}} \right| \leq \\ \leq C \prod_{j=1}^p (B_{k_{j-1}+1}^{h_{k_{j-1}+1}} \dots B_{k_j}^{h_{k_j}}) (h_{k_{j-1}+1}^{h_{k_{j-1}+1}} \dots h_{k_j}^{h_{k_j}})^{\beta_j}$$

$h_1, \dots, h_{k_p} = 0, 1, \dots$, ciascuna per certe costanti positive C, B_k . È chiaro che la classe $G_{\beta_1, \dots, \beta_p}^{k_1, \dots, k_p}$ è chiusa rispetto all'addizione e alla moltiplicazione per numeri. Proviamo che lo stesso avviene per la derivazione. Fissiamo $x_{k_{p-1}+l}$ ($1 \leq l \leq k_p - k_{p-1}$) e poniamo $u(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_{k_{p-1}+l}}$ con $u(x) \in G_{\beta_1, \dots, \beta_p}^{k_1, \dots, k_p}$.

Si ha

$$\frac{\partial^{H_1 + \dots + H_p} u_1(x)}{\partial x_1^{h_1} \dots \partial x_{k_1}^{h_{k_1}} \dots \partial x_{k_{p-1}+1}^{h_{k_{p-1}+1}} \dots \partial x_{k_p}^{h_{k_p}}} \left| = \left| \frac{\partial^{H_1 + \dots + (H_p+1) + \dots + H_p} u(x)}{\partial x_1^{h_1} \dots \partial x_{k_{p-1}+l}^{1+h_{k_{p-1}+l}} \dots \partial x_{k_p}^{h_{k_p}}} \right| \leq \\ \leq C B_1^{h_1} \dots B_{k_{p-1}+l}^{1+h_{k_{p-1}+l}} \dots B_{k_p}^{h_{k_p}} h_1^{\beta_1 h_1} \dots (1+h_{k_{p-1}+l})^{\beta_p(1+h_{k_{p-1}+l})} \dots h_{k_p}^{\beta_p h_{k_p}} = \\ = C B_1^{h_1} \dots B_{k_{p-1}+l}^{1+h_{k_{p-1}+l}} \dots B_{k_p}^{h_{k_p}} h_1^{\beta_1 h_1} \dots h_{k_{p-1}+l}^{\beta_p h_{k_{p-1}+l}} \dots \\ \dots h_{k_p}^{\beta_p h_{k_p}} \frac{(1+h_{k_{p-1}+l})^{\beta_p(1+h_{k_{p-1}+l})}}{(h_{k_{p-1}+l})^{\beta_p h_{k_{p-1}+l}}} .$$

Si ha

$$\frac{(1 + \alpha)^{\beta(1+\alpha)}}{\alpha^{\beta\alpha}} = \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^{\beta\alpha} (1 + \alpha)^\beta < e^\beta (e^\beta)^\alpha$$

onde

$$\left| \frac{\partial^{H_1 + \dots + H_\nu} u_1(x)}{\partial x_1^{h_1} \dots \partial x_\nu^{h_\nu}} \right| < C^* \prod_{j=1}^{\nu} (B_{k_{j-1}+1}^{*h_{k_{j-1}+1}} \dots B_{k_j}^{*h_{k_j}}) (h_{k_{j-1}+1}^{h_{k_{j-1}+1}} \dots h_{k_j}^{h_{k_j}})^{\beta_j}$$

con $C^* = CB_{k_{p-1}+l} e^{\beta p}$, $B_k^* = B_k$ per $k \neq k_{p-1} + l$ e $B_{k_{p-1}+l}^* = e^{\beta p} B_{k_{p-1}+l}$.

Supponiamo ora che la soluzione fondamentale $\xi(x)$ relativa all'operatore $P(\partial/\partial x)$ appartenga alla classe $G_{\beta_1, \dots, \beta_\nu}^{k_1, \dots, k_\nu}$ in ogni regione limitata non contenente l'origine delle coordinate (nè nell'interno nè sulla frontiera).

Torniamo alla formula (14). Le funzioni $c_k(x)$ sono certe somme di derivate di $\xi(x)$ prese in una regione non contenente l'origine delle coordinate e perciò appartenenti, insieme ad $\xi(x)$, alla classe $G_{\beta_1, \dots, \beta_\nu}^{k_1, \dots, k_\nu}$. Quindi per $D^h u = \frac{\partial^{H_1 + \dots + H_\nu} u}{\partial x_1^{h_1} \dots \partial x_\nu^{h_\nu}}$ si ottengono le valutazioni

$$\begin{aligned} |D^h u| &\leq \int_{x_0 - \Gamma} \sum |D^h c_k(x - \eta)| |Q_k \left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right) u(\eta)| d\eta \leq \\ &\leq \sum \max_{x - \eta \in \Gamma + x - x_0} |D^h c_k(x - \eta)| \int_{x_0 - \Gamma} |Q_k \left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right) u(\eta)| d\eta \leq \\ &\leq C \sum_{\xi \in \Gamma + x - x_0} \max |D^h c_k(\xi)|, \end{aligned}$$

da cui segue che, insieme con $\xi(x)$, anche $u(x) \in G_{\beta_1, \dots, \beta_\nu}^{k_1, \dots, k_\nu}$.

4. - Diamo ora per una $\xi(x)$, relativa alla (4), una presentazione che permette di dedurre l'appartenenza alla classe $G_{\beta_1, \dots, \beta_\nu}^{k_1, \dots, k_\nu}$.

Fissiamo a piacere una delle variabili, per esempio $x_{k_{p-1}+a}$, che denotiamo con y , mentre continuiamo per comodità a denotare con x il punto $(x_1, \dots, x_{k_{p-1}+a-1}, x_{k_{p-1}+a+1}, \dots, x_{k_p})$.

Applichiamo formalmente la trasformata di Fourier rispetto a x . Da

$$P_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{k_{p-1}+a-1}}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x_{k_{p-1}+a+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{k_p}} \right) u = 0$$

si deduce un'equazione differenziale ordinaria la cui equazione caratteristica è

$$(17) \quad P_1(-is_1, \dots, -is_{k_{p-1}+q-1}, \lambda, -is_{k_{p-1}+q+1}, \dots, -is_{k_p}) = 0.$$

Poichè $P_1(-is) \neq 0$ per ogni s reale non nullo, la (17), che è di grado m_p , non ha radici immaginarie pure. Essa avrà un numero costante M di radici a parte reale negativa e un numero costante N di radici a parte reale positiva, $M + N = m_p$; continuando a denotare con s il punto $(s_1, \dots, s_{k_{p-1}+q-1}, s_{k_{p-1}+q+1}, \dots, s_{k_p})$ siano $\lambda_1(s), \dots, \lambda_M(s)$ le prime e $\lambda_{M+1}(s), \dots, \lambda_{m_p}(s) = \lambda_{M+N}(s)$ le seconde; per semplicità supponiamo queste radici tutte semplici.

Poniamo

$$s_{k_{j-1}+l} = \pm |\tau_{k_{j-1}+l}|^{m_1/m_j}$$

per $j = 1, \dots, v; 1 \leq l \leq k_j - k_{j-1}$ esclusa la coppia $j = p, l = q$, e

$$\begin{aligned} \varrho^2 = & \sum_{j=1}^{k_1} s_j^2 + \dots + \sum_{j=k_{p-2}+1}^{k_{p-1}} s_j^{2m_{p-1}/m_1} + \sum_{\substack{j=k_{p-1}+1 \\ j \neq k_{p-1}+q}}^{k_p} s_j^{2m_p/m_1} + \\ & + \sum_{j=k_p+1}^{k_{p+1}} s_j^{2m_{p+1}/m_1} + \dots + \sum_{j=k_{v-1}+1}^{k_v} s_j^{2m_v/m_1} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k_{p-1}+q}}^{k_p} \tau_j^2. \end{aligned}$$

Posto $\lambda = \mu \varrho^{m_1/m_p}$ si ha

$$\begin{aligned} P_1' \left(\mp i \frac{|\tau_1|}{\varrho}, \dots, \mp i \frac{|\tau_{k_{p-1}+q-1}|}{\varrho}, \mu, \mp i \frac{|\tau_{k_{p-1}+q+1}|}{\varrho}, \dots, \right. \\ \left. \mp i \frac{|\tau_{k_p}|}{\varrho} \right) \varrho^{m_1} = P_1 \left(-i \frac{s_1}{\varrho}, \dots, -i \frac{s_{k_1}}{\varrho}; -i \frac{s_{k_1+1}}{\varrho^{m_1/m_2}}, \dots, -i \frac{s_{k_2}}{\varrho^{m_1/m_2}}; \right. \\ \dots; -i \frac{s_{k_{p-1}+1}}{\varrho^{m_1/m_p}}, \dots, \mu, \dots, -i \frac{s_{k_p}}{\varrho^{m_1/m_p}}; \dots; -i \frac{s_{k_{p-1}+1}}{\varrho^{m_1/m_p}}, \\ \left. \dots, -i \frac{s_{k_p}}{\varrho^{m_1/m_p}} \right) \varrho^{m_1} = P_1(-is_1, \dots, \lambda, \dots, -is_{k_p}) \end{aligned}$$

onde, se $\lambda_j(s) = \mu_j(s) \varrho^{m_1/m_p}$, si trae che le radici $\mu_j(s)$ sono $O(1)$

e quindi

$$(18) \quad \lambda_j(s) = \varrho^{m_1/m_p} O(1);$$

esiste poi una costante positiva c tale che

$$(19) \quad \begin{cases} \Re \lambda_j(s) < -c\varrho^{m_1/m_p} & \text{per } j = 1, 2, \dots, M \\ \Re \lambda_j(s) > c\varrho^{m_1/m_p} & \text{» } j = M + 1, \dots, M + N. \end{cases}$$

Per comodità di scrittura presentiamo $L(u)$ nella forma

$$(20) \quad L(u) = \sum_{k=0}^{m_p} Q_k \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^k u}{\partial y^k}$$

essendo $x = (x_1, \dots, x_{k_{p-1}+a-1}, x_{k_{p-1}+a+1}, \dots, x_{k_p})$.

Se Q_k^* è l'operatore aggiunto di Q_k si ha

$$\begin{aligned} vL(u) - uL^*(v) &= \sum_{k=0}^{m_p} \left[vQ_k \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^k u}{\partial y^k} - (-1)^k uQ_k^* \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^k v}{\partial y^k} \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\sum_{j=0}^{m_p-1} (-1)^j \frac{\partial^j v}{\partial y^j} \sum_{h=j+1}^{m_p} Q_h \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^{h-j-1} u}{\partial y^{h-j-1}} \right) + \\ &+ \sum_{k=0}^{m_p} (-1)^k \left[\frac{\partial^k v}{\partial y^k} Q_k \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) u - uQ_k^* \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^k v}{\partial y^k} \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\sum_{j=0}^{m_p-1} (-1)^j \frac{\partial^j v}{\partial y^j} \sum_{h=j+1}^{m_p} Q_h \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^{h-j-1} u}{\partial y^{h-j-1}} \right) + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\dots) \end{aligned}$$

ove non interessa esplicitare l'ultima sommatoria.

Sia ora $u(x, y) \in K$ e $V(x - \xi; y - \eta) = V(x_1 - \xi_1, \dots, x_{k_{p-1}+a-1} - \xi_{k_{p-1}+a-1}, y - \eta, x_{k_{p-1}+a+1} - \xi_{k_{p-1}+a+1}, \dots, x_{k_p} - \xi_{k_p})$ una funzione regolare tranne che per $x_j = \xi_j, y = \eta$, che nelle variabili x_j, y sia soluzione di $L(u) = 0$ (e nelle variabili ξ_j, η sia soluzione di $L^*(u) = 0$).

Si ottiene

$$\left(\int_{-\infty}^{y-s} + \int_{y+s}^{+\infty} \right) d\eta \int_{R^{k_p-1}} [VL(u) - uL^*(V)] d\xi =$$

$$= \int_{R^{k_p-1}} \left[\sum_{j=0}^{m_p-1} (-1)^j \frac{\partial^j V}{\partial \eta^j} \sum_{h=j+1}^{m_p} Q_h \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right) \frac{\partial^{h-j-1} u}{\partial \eta^{h-j-1}} \right]_{\eta=\eta-\varepsilon} d\xi -$$

$$- \int_{R^{k_p-1}} \left[\sum_{j=0}^{m_p-1} (-1)^j \frac{\partial^j V}{\partial \eta^j} \sum_{h=j+1}^{m_p} Q_h \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right) \frac{\partial^{h-j-1} u}{\partial \eta^{h-j-1}} \right]_{\eta=\eta+\varepsilon} d\xi .$$

Diremo che V è soluzione fondamentale relativa all'operatore L se

$$(-1)^j \int_{R^{k_p-1}} \left[\left(\frac{\partial^j V}{\partial \eta^j} \right)_{\eta=\eta-\varepsilon} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial^j V}{\partial \eta^j} \right)_{\eta=\eta+\varepsilon} \right] \varphi(\xi) d\xi \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} \begin{cases} 0 & \text{per } j = 0, 1, \dots, m_p - 2 \\ \varphi(x) & \text{» } j = m_p - 1 \end{cases}$$

per ogni $\varphi(x)$ sufficientemente regolare.

Poichè l'ultimo integrale scritto è un prodotto di composizione, indicata con $\tilde{V}(s, y - \eta)$ la trasformata di Fourier di $V(x, y - \eta)$, si è condotti a richiedere che sia

$$(-1)^j \left(\frac{\partial^j \tilde{V}(s, \varepsilon)}{\partial \eta^j} - \frac{\partial^j \tilde{V}(s, -\varepsilon)}{\partial \eta^j} \right) \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{per } j = 0, 1, \dots, m_p - 2 \\ 1 & \text{per } j = m_p - 1 \end{cases}$$

e quindi

$$(21) \quad \tilde{V}(s, y - \eta) = \begin{cases} (-1)^{m_p} \sum_{j=1}^M (-1)^j \frac{W(\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_{M+N})}{W(\lambda_1, \dots, \lambda_{M+N})} \cdot \\ \cdot e^{(y-\eta)\lambda_j(s)} & \text{per } y > \eta \\ (-1)^{m_p+M+1} \sum_{j=1}^N (-1)^j \frac{W(\lambda_1, \dots, \lambda_{M+j-1}, \lambda_{M+j+1}, \dots, \lambda_{M+N})}{W(\lambda_1, \dots, \lambda_{M+N})} \cdot \\ \cdot e^{(y-\eta)\lambda_{M+j}(s)} & \text{per } y < \eta \text{ (*)} \end{cases}$$

avendo posto $W(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_m \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{m-1} & \dots & \alpha_m^{m-1} \end{vmatrix}$.

(*) Se $N = 0$ ($M = 0$) si porrà $\tilde{V}(s, y - \eta) \equiv 0$ per $y < \eta$ ($y > \eta$).

Ogni $\lambda_j(s)$ è $O(\rho^{m_1/m_p})$ per $\rho \rightarrow 0$. Se le singolarità presentate dai coefficienti di $e^{(y-\eta)\lambda_j(s)}$ ed $e^{(y-\eta)\lambda_{M+j}(s)}$ per $s = 0$ sono integrabili, allora

$$(22) \quad V(x - \xi; y - \eta) = \frac{1}{(2\pi)^{k_p-1}} \int_{R^{k_p-1}} e^{-i(x-\xi, s)} \tilde{V}(s, y - \eta) ds,$$

avendo posto $(x - \xi, s) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_{p-1}+q}}^{k_p} (x_k - \xi_k) s_k$. In caso contrario si può procedere a una regolarizzazione di tale integrale. Al nostro scopo è però sufficiente valutare le derivate a partire da un certo ordine, e quindi, essendo

$$R(-is) \frac{\partial^k \tilde{V}(s, y - \eta)}{\partial y^k} = R \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^k V(x, y - \eta)}{\partial y^k}$$

con R arbitrario polinomio a coefficienti costanti, possiamo servirci della formula

$$(23) \quad \frac{\partial^{H_1+\dots+H_p} V}{\partial x_1^{h_1} \dots \partial x_{k_{p-1}+q-1}^{h_{k_{p-1}+q-1}} \partial y^{h_{k_{p-1}+q}} \partial x_{k_{p-1}+q+1}^{h_{k_{p-1}+q+1}} \dots \partial x_{k_p}^{h_{k_p}}} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{k_p-1}} \sum_{j=1}^M (-1)^{m_p+j} \int_{R^{k_p-1}} e^{-i(x-\xi, s)} \cdot$$

$$\cdot (-i)^{h_1+\dots+h_{k_{p-1}+q-1}+h_{k_{p-1}+q}+\dots+h_{k_p}} s_1^{h_1} \dots s_{k_{p-1}+q-1}^{h_{k_{p-1}+q-1}} s_{k_{p-1}+q}^{h_{k_{p-1}+q}} \dots s_{k_p}^{h_{k_p}} \cdot$$

$$\cdot \lambda_j^{h_{k_{p-1}+q}}(s) \frac{W(\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_{M+N})}{W(\lambda_1, \dots, \lambda_{M+N})} e^{(y-\eta)\lambda_j(s)} ds,$$

riferendoci per esempio a $y > \eta$, per $H_1 + \dots + H_p \geq$ di una certa costante dipendente soltanto dagli m_j e da k_p .

Scomponiamo R^{k_p-1} in un numero finito di settori in ciascuno dei quali ogni s_k sia di segno costante. Esaminiamo, limitatamente a una j , l'integrale esteso a quel settore in cui tutte le s_k sono

positive. Eseguendo la sostituzione

$$s_{k_{r-1}+l} = \tau_{k_{r-1}+l}^{m_1/m_r}, \quad r = 1, \dots, \nu; \quad 1 \leq l \leq k_r - k_{r-1}$$

si ottiene

$$(24) \quad C \int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} e^{-s(x-\xi, s)} (-i)^{H_1 + \dots + H_\nu - h_{k_{p-1}+q}} \cdot \\ \cdot \prod_{r=1}^{\nu} \left(\prod_{l=k_{r-1}+1}^{k_r} \tau_{l!}^{m_1/m_r} \lambda_j^{k_{p-1}+q}(s) \right) \cdot \frac{W(\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_{M+N})}{W(\lambda_1, \dots, \lambda_{M+N})} \cdot \\ \cdot e^{(y-\eta)\lambda_j(s)} \prod_{r=2}^{\nu} \left(\prod_{l=k_{r-1}+1}^{k_r} \tau_{l!}^{(m_1/m_r)-1} d\tau \right)$$

dove C è una costante indipendente dalle h_k e il simbolo $\prod' \prod'$ indica il prodotto di tutti i fattori escluso quello corrispondente a $r = p$, $l = k_{p-1} + q$.

A causa delle (18) e (19) esisteranno due costanti positive α e C tali che

$$| e^{(y-\eta)\lambda_j(s)} | < C e^{-\alpha a(y-\eta)} ;$$

d'altra parte, se $\eta + \delta \leq y$ con $0 < \delta$, si ha per un conveniente $\beta > 0$

$$| e^{(y-\eta)\lambda_j(s)} | < C e^{-\beta(\tau_1 + \dots + \tau_{k_{p-1}+q-1} + \tau_{k_{p-1}+q+1} + \dots + \tau_{k_p})}$$

(le τ_k sono attualmente positive).

Supponiamo dapprima $h_{k_{p-1}+q} = 0$.

Se $r = m_1(m_p - 1)/m_p$ si ha

$$\varrho^r \left| \frac{W(\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_{M+N})}{W(\lambda_1, \dots, \lambda_{M+N})} \right| = O(1) \quad \text{per } \varrho \rightarrow 0 \text{ e per } \varrho \rightarrow +\infty.$$

Esprimiamo r come la somma $r_1 + \dots + r_{k_{p-1}+q-1} + r_{k_{p-1}+q+1} + \dots + r_{k_p}$ ove gli r_k siano numeri positivi o nulli.

Perciò il modulo dell'integrando in (24) è maggiorato da

$$C \tau_1^{h_1 - r_1} \dots \tau_{k_1}^{h_{k_1} - r_{k_1}} \tau_{k_1+1}^{(m_1/m_2)(1+h_{k_1+1}) - r_{k_1+1} - 1} \dots \tau_{k_2}^{(m_1/m_2)(1+h_{k_2}) - r_{k_2} - 1} \dots \\ \dots \tau_{k_p}^{(m_1/m_p)(1+h_{k_p}) - r_{k_p} - 1} \cdot e^{-\omega \tau_1} e^{-\omega \tau_2} \dots e^{-\omega \tau_{k_p}}$$

ove non figura $\tau_{k_{p-1}+q}$; C e ω sono convenienti costanti positive indipendenti dagli h_k . Osservando che per ogni $\rho \geq 0$ riesce

$$\rho^m e^{-\beta \rho} < C e^{-\gamma \rho}$$

per due convenienti costanti positive C e $\gamma (< \beta)$ possiamo anche conglobare il fattore $\prod_{r=2}^p \left(\prod_{l=k_{r-1}+1}^{k_r} \tau_l \right)^{(m_1/m_r)-1}$ negli esponenziali aumentando C e diminuendo ω . Quindi il modulo dell'integrando in (24) si può maggiorare con

$$C \tau_1^{h_1 - r_1} \dots \tau_{k_1}^{h_{k_1} - r_{k_1}} \tau_{k_1+1}^{(m_1/m_2)h_{k_1+1} - r_{k_1+1}} \dots \tau_{k_p}^{(m_1/m_p)h_{k_p} - r_{k_p}} \cdot \\ \cdot e^{-\omega \tau_1} \dots e^{-\omega \tau_{k_1}} e^{-\omega \tau_{k_1+1}} \dots e^{-\omega \tau_{k_p}}$$

essendo C ed ω convenienti costanti positive indipendenti dagli h_k .

Gli r_k , di somma costante eguale ad r , si sceglieranno poi nel seguente modo: $r_{k_{j-1}+i} = 0$ se $(m_1/m_j)h_{k_{j-1}+i} < 3$; in caso contrario $r_{k_{j-1}+i}$ in modo tale che sia $(m_1/m_j)h_{k_{j-1}+i} - r_{k_{j-1}+i} \geq 2$; ciò è ovviamente possibile non appena $H_1 + \dots + H_p$ sia abbastanza grande.

Ne segue che l'integrale si maggiora con

$$C \left(\frac{1}{\omega} \right)^{h_1 - r_1 + 1} \Gamma(h_1 - r_1 + 1) \dots \left(\frac{1}{\omega} \right)^{(m_1/m_p)h_{k_p} - r_{k_p} + 1} \Gamma\left(\frac{m_1}{m_p} h_{k_p} - r_{k_p} + 1 \right)$$

e, poichè $\Gamma(x)$ è crescente per $x \geq 2$, anche con

$$\frac{C}{\omega^{(1-r_1)+\dots+(1-r_{k_p})}} \left(\frac{1}{\omega} \right)^{h_1} \dots \left(\left(\frac{1}{\omega} \right)^{m_1/m_p} \right)^{h_{k_p}} \Gamma(h_1 + 1) \dots \Gamma\left(\frac{m_1}{m_p} h_{k_p} + 1 \right).$$

D'altra parte

$$\Gamma(a + 1) = (\sqrt{2\pi} e^{\theta/12a}) \left(\frac{1}{e} \right)^a a^{a+(1/2)} < \sqrt{2\pi} e^{1/12} \left(\frac{1}{\sqrt{e}} \right)^a a^a$$

($0 < \theta < 1$) per $a \geq 1$, onde in definitiva si ottiene la maggiorazione

$$CB_1^{h_1} \dots B_{k_{p-1}+a-1}^{h_{k_{p-1}+a-1}} B_{k_{p-1}+a+1}^{h_{k_{p-1}+a+1}} \dots B_{k_p}^{h_{k_p}} (h_{k_1}^{h_{k_1}} \dots h_{k_1}^{h_{k_1}}) (h_{k_1+1}^{h_{k_1+1}} \dots h_{k_2}^{h_{k_2}})^{m_1/m_2} \dots$$

$$\dots (h_{k_{p-1}+1}^{h_{k_{p-1}+1}} \dots h_{k_{p-1}+a-1}^{h_{k_{p-1}+a-1}} h_{k_{p-1}+a+1}^{h_{k_{p-1}+a+1}} \dots h_{k_p}^{h_{k_p}})^{m_1/m_p} \dots (h_{k_{p-1}+1}^{h_{k_{p-1}+1}} \dots h_{k_p}^{h_{k_p}})^{m_1/m_p}.$$

Supponiamo ora $h_{k_{p-1}+a} > 0$.

Si ha

$$|\lambda_j(s)| < C \left(1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_{p-1}+a}}^{k_p} \tau_k^{m_1/m_p} \right)$$

onde

$$|\lambda_{j_{k_{p-1}+a}}(s)| < (2^{k_p} C)^{h_{k_{p-1}+a}} \left(1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_{p-1}+a}}^{k_p} \tau_k^{(m_1/m_p) h_{k_{p-1}+a}} \right).$$

Ora

$$\int_0^{+\infty} \tau^{a + (m_1/m_p) h_{k_{p-1}+a}} e^{-\omega \tau} d\tau = \left(\frac{1}{\omega} \right)^{1+a+(m_1/m_p) h_{k_{p-1}+a}} \Gamma \left(1 + a + \frac{m_1}{m_p} h_{k_{p-1}+a} \right)$$

e

$$\left(a + b \frac{m_1}{m_p} \right)^{a + b(m_1/m_p)} = a^a \left(1 + \frac{b(m_1/m_p)}{a} \right)^a \left(b \frac{m_1}{m_p} \right)^{b(m_1/m_p)}$$

$$\cdot \left(\frac{a}{b(m_1/m_p)} + 1 \right)^{b(m_1/m_p)} < a^a e^{b m_1/m_p} \left(\frac{b m_1}{m_p} \right)^{b m_1/m_p} e^a =$$

$$= e^a \left(\left(\frac{e m_1}{m_p} \right)^{m_1/m_p} \right)^b a^a b^{b(m_1/m_p)}.$$

Sommando le maggiorazioni che si ottengono sostituendo $|\lambda_{j_{k_{p-1}+a}}(s)|$ successivamente con $(2^{k_p} C)^{h_{k_{p-1}+a}}$ e $(2^{k_p} C \tau_k^{m_1/m_p})^{h_{k_{p-1}+a}}$, si ottiene in definitiva che l'integrale (24) si maggiora con

$$CB_1^{h_1} \dots B_{k_p}^{h_{k_p}} (h_{k_1}^{h_{k_1}} \dots h_{k_1}^{h_{k_1}}) \dots (h_{k_{p-1}+1}^{h_{k_{p-1}+1}} \dots h_{k_p}^{h_{k_p}})^{m_1/m_p}.$$

Gl'integrali estesi ai restanti settori in cui si è scomposto R^{k_p-1} si valutano allo stesso modo. Si ha così una valutazione relativamente al semispazio $\eta + \delta \leq y$.

Evidentemente lo stesso risultato si ha per il semispazio $y \leq \eta - \delta$.

Dunque la costruita soluzione fondamentale, che ora indicheremo con $V_{k_{p-1}+q}(x - \xi, y - \eta)$, appartiene alla classe $G_{1, (m_1/m_p), \dots, (m_1/m_p)}^{k_1, k_2, \dots, k_p}$ per $|y - \eta| \geq \delta$ con δ numero positivo arbitrario. Essa è di classe C^∞ fuori del punto $x = \xi, y = \eta$; dobbiamo ancora provarne l'appartenenza alla classe $G_{1, (m_1/m_p), \dots, (m_1/m_p)}^{k_1, k_2, \dots, k_p}$ in ogni regione cui sia esterno il punto $x = \xi, y = \eta$.

A questo scopo osserviamo intanto che, supposto ad esempio $y > \eta$, la sostituzione

$$(25) \quad \lambda = \frac{\mu}{y - \eta}, \quad s_{k_{j-1}+l} = \frac{\sigma_{k_{j-1}+l}}{(y - \eta)^{m_p/m_j}},$$

$$j = 1, 2, \dots, p; \quad l = 1, 2, \dots, k_j - k_{j-1}; \quad k_{j-1} + l \neq k_{p-1} + q,$$

muta l'equazione (17) nell'equazione

$$P_1(-i\sigma_1, \dots, -i\sigma_{k_{p-1}+q-1}, \mu, -i\sigma_{k_{p-1}+q+1}, \dots, -i\sigma_{k_p}) = 0.$$

Detta $\mu_j(\sigma)$ la radice di questa corrispondente a $\lambda_j(s)$, si ha

$$\mu_j(\sigma) = \varrho^{(m_1/m_p)} O(1) \quad \text{con} \quad \varrho^2 = \sum_{j=1}^{k_1} \sigma_j^2 + \dots + \sum_{\substack{j=k_{p-1}+1 \\ j \neq k_{p-1}+q}}^{k_p} \sigma_j^{(2m_p/m_1)} +$$

$$+ \dots + \sum_{j=k_{p-1}+1}^{k_p} \sigma_j^{(2m_p/m_1)}.$$

L'integrale che figura nel secondo membro della (23), ove si sopprime la potenza di $-i$, con la sostituzione indicata e ponendo anche

$$(26) \quad \frac{x_{k_{j-1}+l} - \xi_{k_{j-1}+l}}{(y - \eta)^{m_p/m_j}} = X_{k_{j-1}+l},$$

si scrive

$$(27) \quad \frac{1}{(y - \eta)^{\alpha m_p / m_1}} \int_{R^{k_p-1}} e^{-i(X, \sigma)} \sigma_1^{h_1} \dots \sigma_{k_{p-1}+q-1}^{h_{k_{p-1}+q-1}} \sigma_{k_{p-1}+q+1}^{h_{k_{p-1}+q+1}} \dots \sigma_{k_p}^{h_{k_p}} \mu_j^{h_{k_{p-1}+q}}(\sigma) \cdot \frac{W(\mu_1, \dots, \mu_{j-1}, \mu_{j+1}, \dots, \mu_{M+N})}{W(\mu_1, \dots, \mu_{M+N})} e^{\mu_j(\sigma)} d\sigma,$$

essendo

$$\omega = \sum_{s=1}^p (H_s + k_s - k_{s-1}) \frac{m_1}{m_s} - m_1, \quad H_s = \sum_{j=k_{s-1}+1}^{k_s} h_j.$$

Detto $T_{k_{r-1}+i}$ l'insieme degli X per cui è $|X_{k_{r-1}+i}|^{m_r/m_1} \geq |X_{k_{j-1}+t}|^{m_j/m_1}$ per ogni $k_{j-1} + t \neq k_{r-1} + i$, in $T_{k_{r-1}+i}$ il modulo dell'integrale che figura nella (27) si può maggiorare come si è fatto in una situazione analoga ³⁾, eseguendo convenienti integrazioni per parti su $\sigma_{k_{r-1}+i}$, tenendo presente che $\partial^\alpha \mu_j / \partial \sigma_{k_{r-1}+i}^\alpha = \varrho^{m_1/m_p - \alpha m_1/m_r} O(1)$.

Posto

$$d(x - \xi) = \sum_{j=1}^{p'} \sum_{h=k_{j-1}+1}^{k_j} |x_h - \xi_h|^{m_j/m_1}$$

(intendendo con $\sum' \sum'$ la somma estesa a tutti i valori degli indici escluso $j = p$, $h = k_{p-1} + q$) la (27) in modulo si può in definitiva maggiorare con

$$(28) \quad \frac{C_\varepsilon(H)}{|y - \eta|^{\alpha m_p / m_1} (|y - \eta|^{m_p / m_1} + d(x - \xi))^{\omega - \varepsilon}},$$

ove ε è un fissato numero positivo arbitrariamente piccolo e $C_\varepsilon(H)$ è una opportuna costante dipendente dalla scelta di ε e degli h_j .

(³⁾ B. Pini, *Precisazioni e aggiunte alla Nota: Soluzione fondamentale per una classe di equazioni a derivate parziali con coefficienti costanti*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, X (1960-61).

Ciò premesso, osserviamo che i ragionamenti fatti precedentemente con la scelta della variabile $x_{k_{p-1}+a}$, che abbiamo denotato con y , si possono ripetere se si sceglie una qualunque altra x , (facendo sempre, per comodità, l'ipotesi che l'equazione corrispondente della (17) abbia radici tutte semplici). Indichiamo con V , la soluzione fondamentale, costruita col procedimento indicato sopra, quando si scelga come y la x_j . Fissiamo ad esempio $j = 1$. Si ha intanto che per $|x_1 - \xi_1| \geq \delta$, con $\delta > 0$ fissata a piacere, $V_1 \in G_{1, (m_1/m_1), \dots, (m_1/m_p)}^{k_1, \dots, k_p}$

Consideriamo l'intervallo I : $0 < a \leq x_1 \leq b$, $-\delta \leq x_2 \leq \delta$, ..., $-\delta \leq x_{k_p} \leq \delta$, e, per comodità, poniamo il punto (ξ, η) nell'origine delle coordinate. Possiamo esprimere una derivata $D^\alpha V_{k_{p-1}+a}$ nell'interno di I per mezzo della V_1 con una formula del tipo

$$D^\alpha V_{k_{p-1}+a}(x, y) = \int_{\Gamma} \sum_j c_j D^{\beta_j} V_1(x-t, y-\tau) D^{\gamma_j} D^\alpha V_{k_{p-1}+a}(t, \tau) dt d\tau,$$

avendo indicato con Γ la frontiera di I e con c_j certe costanti. A causa della maggiorazione di $D^\alpha V_{k_{p-1}+a}$ fornita dalla (28) e dall'analoga per V_1 , non appena le $|h|$ e $|\alpha|$ sono sufficientemente grandi, si può passare al limite per $\delta \rightarrow +\infty$ ottenendo

$$D^\alpha D^\alpha V_{k_{p-1}+a}(x, y) = \int_{R^{k_p-1}} \left[\sum_j c_j D^\alpha D^{\beta_j} V_1(x-t, y-\tau) D^{\gamma_j} D^\alpha V_{k_{p-1}+a}(t, \tau) \right]_{t_1=-b}^{t_1=a} dt_2 \dots dt_{k_p}.$$

Da questa si deduce che per $a + \varepsilon \leq x_1 \leq b - \varepsilon$, $-\bar{\delta} \leq x_2 \leq \bar{\delta}$, ..., $-\bar{\delta} \leq x_{k_p} \leq \bar{\delta}$, con $\varepsilon > 0$ a piacere ($a + \varepsilon < b - \varepsilon$), riesce $D^\alpha D^\alpha V_{k_{p-1}+a} \in G_{1, (m_1/m_1), \dots, (m_1/m_p)}^{k_1, k_2, \dots, k_p}$.

Concludendo: Ogni soluzione dell'equazione $P_1(\partial/\partial x)u = 0$ con $P_1(-is) \neq 0$ per ogni s reale non nullo, è localmente della classe $G_{1, (m_1/m_1), \dots, (m_1/m_p)}^{k_1, k_2, \dots, k_p}$