

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

FABIO MANARESI

**Su alcune serie multiple analoghe alle serie
di Fourier trigonometriche**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 31 (1961), p. 58-76

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1961__31__58_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1961__31__58_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SU ALCUNE SERIE MULTIPLE ANALOGHE ALLE SERIE DI FOURIER TRIGONOMETRICHE

Nota () di FABIO MANARESI (a Bologna)*

1. Nel presente lavoro si estendono alle funzioni di più variabili alcuni risultati, stabiliti dall'A., relativi alle funzioni di una sola variabile ¹⁾.

Per semplicità di esposizione ci si limita al caso di funzioni di due variabili, poichè gli algoritmi svolti e i risultati ottenuti si possono estendere senza difficoltà alle funzioni di un numero qualsivoglia di variabili.

Sia $f(x, y)$ una funzione sommabile nel quadrato fondamentale $Q \equiv (0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi)$: si sostituiscano i valori della $f(x, y)$, corrispondenti ai punti (x, y) tali che $x = 2\pi, 0 \leq y < 2\pi$, con quelli relativi ai punti $(0, y)$; i valori, corrispondenti ai punti (x, y) tali che $0 \leq x < 2\pi, y = 2\pi$, con quelli relativi ai punti $(x, 0)$, e il valore $f(2\pi, 2\pi)$ con $f(0, 0)$. Dopodichè si definisca la $f(x, y)$ in tutto il piano xy , considerandola come funzione periodica, di periodo 2π , rispetto a ciascuna delle variabili.

Siano poi $U = \gamma(T)$, $V = \delta(Z)$ due funzioni assolutamente continue, sempre crescenti e dispari rispettivamente negli intervalli $-1 \leq T \leq 1$, $-1 \leq Z \leq 1$. Inoltre esistano finite e positive le $\gamma'(0)$, $\delta'(0)$, che si possono supporre uguali a 1 ²⁾; infine

(*) Pervenuta in redazione il 27 novembre 1960.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Bologna.

¹⁾ F. MANARESI, *Su alcune serie analoghe alle serie di Fourier trigonometriche*, Boll. U.M.I., 14 (1959), pp. 360-372.

²⁾ Se così non fosse ci si riconduce a tale caso dividendo $\gamma(T)$ per $\gamma'(0)$ e $\delta(Z)$ per $\delta'(0)$.

le $\gamma'(T)$, $\delta'(Z)$ risultino continue nell'origine ³⁾ e i rapporti $\frac{\gamma'(T) - 1}{T}$, $\frac{\delta'(Z) - 1}{Z}$ siano sommabili in un intorno dell'origine stessa.

Si denoti con $T = g(U)$ la funzione inversa della $U = \gamma(T)$ e con $Z = h(V)$ la funzione inversa della $V = \delta(Z)$, sicchè, ove si ponga

$$\varrho = \frac{\pi}{\gamma(1)}, \quad \sigma = \frac{\pi}{\delta(1)}, \quad t = \pi T, \quad z = \pi Z, \quad u = \varrho U, \quad v = \sigma V,$$

riesce

$$u = \varrho \gamma\left(\frac{t}{\pi}\right), \quad r = \sigma \delta\left(\frac{z}{\pi}\right), \quad t = \pi g\left(\frac{u}{\varrho}\right), \quad z = \pi h\left(\frac{r}{\sigma}\right),$$

con

$$-\pi \leq t \leq \pi, \quad -\pi \leq z \leq \pi, \quad -\pi \leq u \leq \pi, \quad -\pi \leq r \leq \pi.$$

Ciò premesso, si considerino le serie

$$(1) \quad \mathfrak{S}[f] \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{m,n} p_{m,n}(x, y),$$

$$(2) \quad \mathfrak{S}_1[f] \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{m,n} q_{m,n}^{(1)}(x, y),$$

$$(3) \quad \mathfrak{S}_2[f] \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{m,n} q_{m,n}^{(2)}(x, y),$$

$$(4) \quad \mathfrak{S}_3[f] \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{m,n} q_{m,n}^{(3)}(x, y),$$

dove

$$\lambda_{m,n} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{se è } m = n = 0; \\ \frac{1}{2}, & \text{se è } m = 0, n > 0, \text{ oppure } m > 0, n = 0; \\ 1, & \text{se è } m > 0, n > 0; \end{cases}$$

³⁾ Si conviene di completare la definizione delle $\gamma'(T)$, $\delta'(Z)$, nei rispettivi intervalli, ponendole uguali rispettivamente a $\gamma'(0)$, $\delta'(0)$ negli eventuali punti in cui esse non esistono o sono infinite.

$$p(x, y) = \frac{1}{\varrho\sigma} \int_0^\pi \int_0^\pi [f(x+u, y+v) + f(x+u, y-v) + \\ + f(x-u, y+v) + f(x-u, y-v)] \cos \left[m\pi g \left(\frac{u}{\varrho} \right) \right] \cdot \\ \cdot \cos \left[n\pi h \left(\frac{v}{\sigma} \right) \right] du dv ,$$

$$q_{m,n}^{(1)}(x, y) = \frac{1}{\varrho\sigma} \int_0^\pi \int_0^\pi [f(x+u, y+v) + f(x+u, y-v) - \\ - f(x-u, y+v) - f(x-u, y-v)] \operatorname{sen} \left[m\pi g \left(\frac{u}{\varrho} \right) \right] \cdot \\ \cdot \cos \left[n\pi h \left(\frac{v}{\sigma} \right) \right] du dv ,$$

$$q_{m,n}^{(2)}(x, y) = \frac{1}{\varrho\sigma} \int_0^\pi \int_0^\pi [f(x+u, y+v) - f(x+u, y-v) + \\ + f(x-u, y+v) - f(x-u, y-v)] \cos \left[m\pi g \left(\frac{u}{\varrho} \right) \right] \cdot \\ \cdot \operatorname{sen} \left[n\pi h \left(\frac{v}{\sigma} \right) \right] du dv ,$$

$$q_{m,n}^{(3)}(x, y) = \frac{1}{\varrho\sigma} \int_0^\pi \int_0^\pi [f(x+u, y+v) - f(x+u, y-v) - \\ - f(x-u, y+v) + f(x-u, y-v)] \operatorname{sen} \left[m\pi g \left(\frac{u}{\varrho} \right) \right] \cdot \\ \cdot \operatorname{sen} \left[n\pi h \left(\frac{v}{\sigma} \right) \right] du dv .$$

Si mostrerà che le condizioni di convergenza e di sommabilità $(C, 1, 1)$ per la (1) e per le (2), (3), (4), che diconsi *serie coniugate* della (1), sono del tutto simili a quelle relative alla serie doppia di Fourier trigonometrica e alle serie coniugate di questa.

2. *Convergenza di* $\mathfrak{S}[f]$. - Con facili calcoli, posto

$$F(x, y, u, v) = f(x + u, y + v) + f(x + u, y - v) + \\ + f(x - u, y + v) + f(x - u, y - v),$$

si trae

$$S_{m,n}(x, y) = \sum_{h=0}^m \sum_{k=0}^n \lambda_{h,k} p_{h,k}(x, y) = \frac{1}{\varrho \sigma} \int_0^\pi \int_0^\pi F(x, y, u, v) \cdot \\ \cdot \frac{\operatorname{sen} \left[\left(m + \frac{1}{2} \right) \pi g \left(\frac{u}{\varrho} \right) \right]}{2 \operatorname{sen} \left[\frac{\pi}{2} g \left(\frac{u}{\varrho} \right) \right]} \frac{\operatorname{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi h \left(\frac{v}{\sigma} \right) \right]}{2 \operatorname{sen} \left[\frac{\pi}{2} h \left(\frac{v}{\sigma} \right) \right]} du dv,$$

da cui, applicando il teorema di integrazione per sostituzione di De La Vallée Poussin ⁴⁾,

$$S_{m,n}(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi F \left[x, y, \varrho \gamma \left(\frac{t}{\pi} \right), \sigma \delta \left(\frac{z}{\pi} \right) \right] \cdot \\ \cdot \frac{\operatorname{sen} \left(m + \frac{1}{2} \right) t}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} t} \frac{\operatorname{sen} \left(n + \frac{1}{2} \right) z}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} z} \cdot \gamma' \left(\frac{t}{\pi} \right) \delta' \left(\frac{z}{\pi} \right) dt dz = \\ = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} F^*(x, y, \xi, \eta) \frac{\operatorname{sen} (2m + 1) \xi}{\operatorname{sen} \xi} \frac{\operatorname{sen} (2n + 1) \eta}{\operatorname{sen} \eta} \cdot \\ \cdot \gamma' \left(\frac{2\xi}{\pi} \right) \delta' \left(\frac{2\eta}{\pi} \right) d\xi d\eta,$$

con

$$F^*(x, y, \xi, \eta) = F \left[x, y, \varrho \gamma \left(\frac{2\xi}{\pi} \right), \sigma \delta \left(\frac{2\eta}{\pi} \right) \right].$$

⁴⁾ Cfr., ad esempio, G. SANSONE, *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabili reali*, Soc. Ed. Universitaria, Firenze, (1952), n. 101 a) e b).

D'altra parte si ha

$$\gamma' \left(\frac{t}{\pi} \right) \sim \frac{\pi}{\varrho} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \cos mt \int_{-\pi}^{\pi} \gamma' \left(\frac{\xi}{\pi} \right) \cos m\xi d\xi,$$

$$\delta' \left(\frac{z}{\pi} \right) \sim \frac{\pi}{\sigma} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos nz \int_{-\pi}^{\pi} \delta' \left(\frac{\eta}{\pi} \right) \cos n\eta d\eta,$$

e inoltre, per il teorema di Dini,

$$1 = \gamma'(0) = \frac{\pi}{\varrho} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \gamma' \left(\frac{\xi}{\pi} \right) \cos m\xi d\xi,$$

$$1 = \delta'(0) = \frac{\pi}{\sigma} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \delta' \left(\frac{\eta}{\pi} \right) \cos n\eta d\eta.$$

Ne consegue

$$1 = \gamma'(0)\delta'(0) = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} s'_m s''_n = \lim_{m \rightarrow \infty} s_{m,n},$$

con

$$s'_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \gamma' \left(\frac{2\xi}{\pi} \right) \frac{\text{sen } (2m+1)\xi}{\text{sen } \xi} d\xi,$$

$$s''_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \delta' \left(\frac{2\eta}{\pi} \right) \frac{\text{sen } (2n+1)\eta}{\text{sen } \eta} d\eta,$$

$$s_{m,n} = s'_m s''_n.$$

Se $\Phi(x, y)$ è una funzione definita in tutto il piano xy e periodica, di periodo 2π , rispetto a x e a y , risulta allora

$$\begin{aligned}
 H_{m,n}(x, y) &= S_{m,n}(x, y) - s_{m,n}\Phi(x, y) = \\
 &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \varphi^*(x, y, \xi, \eta) \frac{\operatorname{sen}(2m+1)\xi}{\operatorname{sen} \xi} \frac{\operatorname{sen}(2n+1)\eta}{\operatorname{sen} \eta} \cdot \\
 &\quad \cdot \gamma' \left(\frac{2\xi}{\pi} \right) \delta' \left(\frac{2\eta}{\pi} \right) d\xi d\eta,
 \end{aligned}$$

dove

$$\varphi^*(x, y, \xi, \eta) = F^*(x, y, \xi, \eta) - 4\Phi(x, y).$$

Riuscirà pertanto

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} S_{m,n}(x, y) = \Phi(x, y)$$

se, e soltanto se,

$$(5) \quad \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} H_{m,n}(x, y) = 0.$$

Ne risulta, in particolare, l'analogo del teorema di Dini:

I. - Se, per un dato punto (x, y) , il rapporto $\frac{\varphi(x, y, u, v)}{uv}$, con

$$\varphi(x, y, u, v) = F(x, y, 2u, 2v) - 4\Phi(x, y),$$

è sommabile in $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$, o, ciò che è lo stesso, se il rapporto $\frac{\varphi^*(x, y, \xi, \eta)}{\xi\eta}$ è sommabile in $0 \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \eta \leq \frac{\pi}{2}$,⁵⁾ la (1) converge, nel punto (x, y) , verso $\Phi(x, y)$.

⁵⁾ È facile vedere che dalla sommabilità di $\frac{\varphi(x, y, u, v)}{uv}$ in $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$ segue quella di $\frac{\varphi^*(x, y, \xi, \eta)}{\xi\eta}$ in $0 \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \eta \leq \frac{\pi}{2}$ e inversamente.

Invero, se $\frac{\varphi(x, y, u, v)}{uv}$ è sommabile in $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$, risultano sommabili in $0 \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \eta \leq \frac{\pi}{2}$ la $\frac{\varphi^*(x, y, \xi, \eta)}{\gamma\left(\frac{2\xi}{\pi}\right)\delta\left(\frac{2\eta}{\pi}\right)}$ e

Basta infatti osservare che dalla sommabilità di $\frac{\varphi(x, y, u, v)}{uv}$ in $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$, segue, in base al teorema di integrazione per sostituzione di De La Vallée Poussin (Cfr. loc. cit. in ¹⁾) che la $\frac{\varphi^*(x, y, \xi, \eta)}{\gamma\left(\frac{2\xi}{\pi}\right)\eta\left(\frac{2\eta}{\pi}\right)} \gamma'\left(\frac{2\xi}{\pi}\right) \delta'\left(\frac{2\eta}{\pi}\right)$ è sommabile in $0 \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \eta \leq \frac{\pi}{2}$, e quindi tale risulta pure la

$$\begin{aligned} & \frac{\varphi^*(x, y, \xi, \eta)}{\operatorname{sen} \xi \operatorname{sen} \eta} \gamma'\left(\frac{2\xi}{\pi}\right) \delta'\left(\frac{2\eta}{\pi}\right) = \\ &= \frac{\varphi^*(x, y, \xi, \eta)}{\gamma\left(\frac{2\xi}{\pi}\right) \delta\left(\frac{2\eta}{\pi}\right)} \frac{\gamma\left(\frac{2\xi}{\pi}\right) \delta\left(\frac{2\eta}{\pi}\right)}{\xi \eta} \frac{\xi \eta}{\operatorname{sen} \xi \operatorname{sen} \eta} \gamma'\left(\frac{2\xi}{\pi}\right) \delta'\left(\frac{2\eta}{\pi}\right), \end{aligned}$$

essendo limitata la $\frac{\gamma\left(\frac{2\xi}{\pi}\right) \delta\left(\frac{2\eta}{\pi}\right)}{\xi \eta} \cdot \frac{\xi \eta}{\operatorname{sen} \xi \operatorname{sen} \eta}$.

Per il teorema di Riemann-Lebesgue ²⁾ sussiste allora la (5).

quindi anche la $\frac{\varphi^*(x, y, \xi, \eta)}{\xi \eta} = \frac{\varphi^*(x, y, \xi, \eta)}{\gamma\left(\frac{2\xi}{\pi}\right) \delta\left(\frac{2\eta}{\pi}\right)} \frac{\gamma\left(\frac{2\xi}{\pi}\right) \delta\left(\frac{2\eta}{\pi}\right)}{\xi \eta}$, essendo limitata la $\frac{\gamma\left(\frac{2\xi}{\pi}\right) \delta\left(\frac{2\eta}{\pi}\right)}{\xi \eta}$.

Inversamente, se $\frac{\varphi^*(x, y, \xi, \eta)}{\xi \eta}$ è sommabile in $0 \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \eta \leq \frac{\pi}{2}$, tale risulta pure la $\frac{\varphi^*(x, y, \xi, \eta)}{\gamma\left(\frac{2\xi}{\pi}\right) \delta\left(\frac{2\eta}{\pi}\right)} = \frac{\varphi^*(x, y, \xi, \eta)}{\xi \eta} \cdot \frac{\xi \eta}{\gamma\left(\frac{2\xi}{\pi}\right) \delta\left(\frac{2\eta}{\pi}\right)}$, essendo la $\frac{\xi \eta}{\gamma\left(\frac{2\xi}{\pi}\right) \delta\left(\frac{2\eta}{\pi}\right)}$ limitata, sicchè $\frac{\varphi(x, y, u, v)}{uv}$ riuscirà sommabile in $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$.

²⁾ Si veda, per esempio, L. TONELLI, *Serie trigonometriche*, Zanichelli, Bologna (1928), n. 163 a), p. 438.

OSSERVAZIONE. - Il ragionamento fatto nell'osservazione finale del n. 2 di loc. cit. in ¹⁾ non si può estendere alle serie doppie, poichè il rapporto

$$\frac{\gamma'(T)\delta'(Z) - 1}{TZ},$$

a meno che non riesca $\gamma'(T) \equiv 1$, $\delta'(Z) \equiv 1$, non può essere limitato in $-1 \leq T \leq 1$, $-1 \leq Z \leq 1$.

3. *Convergenza di* $\mathfrak{S}_1[f]$, $\mathfrak{S}_2[f]$, $\mathfrak{S}_3[f]$. - Posto:

$$F_1(x, y, u, v) = f(x + u, y + v) + f(x + u, y - v) - \\ - f(x - u, y + v) - f(x - u, y - v),$$

$$F_2(x, y, u, v) = f(x + u, y + v) - f(x + u, y - v) + \\ + f(x - u, y + v) - f(x - u, y - v),$$

$$F_3(x, y, u, v) = f(x + u, y + v) - f(x + u, y - v) - \\ - f(x - u, y + v) + f(x - u, y - v),$$

$$\Delta_1(x, y, u, v) = [f(x + u, y + v) - f(x - u, y + v) - \\ - f(x + u, y) + f(x - u, y)] + \\ + [f(x + u, y - v) - f(x - u, y - v) - \\ - f(x + u, y) + f(x - u, y)] = \\ = F_1(x, y, u, v) - 2\psi_1(x, y, u),$$

$$\psi_1(x, y, u) = f(x + u, y) - f(x - u, y),$$

$$\Delta_2(x, y, u, v) = [f(x + u, y + v) - f(x + u, y - v) - \\ - f(x, y + v) + f(x, y - v)] + \\ + [f(x - u, y + v) - f(x - u, y - v) - \\ - f(x, y + v) + f(x, y - v)] = \\ = F_2(x, y, u, v) - 2\psi_2(x, y, v),$$

$$\psi_2(x, y, v) = f(x, y + v) - f(x, y - v),$$

e indicando con le stesse notazioni munite di un asterisco le suddette espressioni, quando in esse si ponga $\varrho\gamma\left(\frac{2u}{\pi}\right)$, $\sigma\delta\left(\frac{2v}{\pi}\right)$

in luogo di u , v rispettivamente, con facili calcoli si ricava

$$\begin{aligned}
 S_{m,n}^{(1)}(x, y) &= \sum_{h=0}^m \sum_{k=0}^n \lambda_{h,k} q_{h,k}^{(1)}(x, y) = \\
 &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} [\Delta_1^*(x, y, \xi, \eta) + 2\psi_1^*(x, y, \xi)] \cdot \\
 &\quad \cdot \left[\cotg \xi - \frac{\cos (2m+1)\xi}{\operatorname{sen} \xi} \right] \frac{\operatorname{sen} (2n+1)\eta}{\operatorname{sen} \eta} \cdot \\
 &\quad \cdot \gamma' \left(\frac{2\xi}{\pi} \right) \cdot \delta' \left(\frac{2\eta}{\pi} \right) d\xi d\eta, \\
 S_{m,n}^{(2)}(x, y) &= \sum_{h=0}^m \sum_{k=0}^n \lambda_{h,k} q_{h,k}^{(2)}(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} [\Delta_2^*(x, y, \xi, \eta) + 2\psi_2^*(x, y, \eta)] \cdot \\
 &\quad \cdot \frac{\operatorname{sen} (2m+1)\xi}{\operatorname{sen} \xi} \left[\cotg \eta - \frac{\cos (2n+1)\eta}{\operatorname{sen} \eta} \right] \cdot \\
 &\quad \cdot \gamma' \left(\frac{2\xi}{\pi} \right) \delta' \left(\frac{2\eta}{\pi} \right) d\xi d\eta, \\
 S_{m,n}^{(3)}(x, y) &= \sum_{h=0}^m \sum_{k=0}^n \lambda_{h,k} q_{h,k}^{(3)}(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} F_3^*(x, y, \xi, \eta) \cdot \\
 &\quad \cdot \left[\cotg \xi - \frac{\cos (2m+1)\xi}{\operatorname{sen} \xi} \right] \left[\cotg \eta - \frac{\cos (2n+1)\eta}{\operatorname{sen} \eta} \right] \cdot \\
 &\quad \cdot \gamma' \left(\frac{2\xi}{\pi} \right) \delta' \left(\frac{2\eta}{\pi} \right) d\xi d\eta.
 \end{aligned}$$

Ne conseguono, tenendo presente il teorema di Riemann-Lebesgue (loc. cit. in *), gli analoghi del teorema di Pringsheim:

I. Se, per un dato punto (x, y) , il rapporto $\frac{\Delta_1(x, y, 2u, 2v)}{uv}$ è

sommabile in $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$ e il rapporto $\frac{\psi_1(x, y, 2u)}{u}$ è sommabile in $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$, o, ciò che è lo stesso (Cfr. nota ⁵), se il rapporto $\frac{\Delta_1^*(x, y, \xi, \eta)}{\xi\eta}$ è sommabile in $0 \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \eta \leq \frac{\pi}{2}$ e il rapporto $\frac{\psi_1^*(x, y, \xi)}{\xi}$ è sommabile in $0 \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}$, la (2) converge, nel punto (x, y) , verso

$$f_1(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \psi_1^*(x, y, \xi) \cotg \xi \gamma' \left(\frac{2\xi}{\pi} \right) d\xi.$$

II. Se, per un dato punto (x, y) , il rapporto $\frac{\Delta_2(x, y, 2u, 2v)}{uv}$ è sommabile in $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$ e il rapporto $\frac{\psi_2(x, y, 2v)}{v}$ è sommabile in $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$, o, ciò che è lo stesso (Cfr. nota ⁵), se il rapporto $\frac{\Delta_2^*(x, y, \xi, \eta)}{\xi\eta}$ è sommabile in $0 \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \eta \leq \frac{\pi}{2}$ e il rapporto $\frac{\psi_2^*(x, y, \eta)}{\eta}$ è sommabile in $0 \leq \eta \leq \frac{\pi}{2}$, la (3) converge, nel punto (x, y) , verso

$$f_2(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \psi_2^*(x, y, \eta) \cotg \eta \delta' \left(\frac{2\eta}{\pi} \right) d\eta.$$

III. Se, per un dato punto (x, y) , il rapporto $\frac{F_3(x, y, 2u, 2v)}{uv}$ è sommabile in $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$, o, ciò che è lo stesso (Cfr. nota ⁵), se il rapporto $\frac{F_3^*(x, y, \xi, \eta)}{\xi\eta}$ è sommabile in $0 \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \eta \leq \frac{\pi}{2}$, la (4) converge, nel punto (x, y) , verso

$$f_3(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} F_3(x, y, \xi, \eta) \cotg \xi \cotg \eta \gamma' \left(\frac{2\xi}{\pi} \right) \delta' \left(\frac{2\eta}{\pi} \right) d\xi d\eta \quad ^7).$$

In particolare si ha che:

IV. Se la $f(x, y)$ è *Lip* α ⁸⁾, $0 < \alpha \leq 1$, nel quadrato fondamentale $Q \equiv (0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi)$, le ipotesi dei teoremi I, II, III sono tutte verificate per ogni punto (x, y) non appartenente alle rette $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$ e $y \equiv 0 \pmod{2\pi}$, e la convergenza delle (2), (3), (4) verso $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, $f_3(x, y)$ rispettivamente è uniforme in ogni dominio rettangolare non contenente punti delle rette suindicate [o in tutto il piano se la $f(x, y)$ è *Lip* α in tutto il piano] ⁹⁾.

Infatti, Cesari ha dimostrato che se la $f(x, y)$ è *Lip* α , $0 < \alpha \leq 1$, in Q , i rapporti, funzioni di u, v , menzionati in I, II, III, sono sommabili. Ne risulta (Cfr. nota ⁵⁾) la sommabilità dei rapporti, funzioni di ξ, η , e quindi, ragionando come per il teorema I del n. 2, quella delle funzioni che da essi si ottengono moltiplicandoli per $\gamma' \left(\frac{2\xi}{\pi} \right) \delta' \left(\frac{2\eta}{\pi} \right)$.

OSSERVAZIONE. - Anche il ragionamento fatto nell'osservazione finale del n. 3 di loc. cit. in ¹⁾ non si può estendere alle serie doppie (Cfr. osservazione alla fine del n. 2).

4. *Sommabilità* $(C, 1, 1)$ di $\mathfrak{S}[f]$. - Si osservi, in primo luogo, che nei ragionamenti di questo n. e del n. seguente si può fare a meno dell'ipotesi della sommabilità, in un intorno dell'origine, dei rapporti $\frac{\gamma'(T) - 1}{T}$, $\frac{\delta'(Z) - 1}{Z}$.

⁷⁾ Si noti che le ipotesi di III sono meno restrittive di quelle di I e II.

⁸⁾ Si dice che la funzione $f(x, y)$ è *Lip* α in Q se esiste una costante $K > 0$ tale che, per ogni coppia di punti (x, y) , (x', y') interni a Q , risulti

$$|f(x, y) - f(x', y')| < K \{ |x - x'|^\alpha + |y - y'|^\alpha \}.$$

Si veda, per esempio, loc. cit. in ⁸⁾, n. 163, osservazione, p. 443.

⁹⁾ Cfr. L. CESARI, *Sulle serie di Fourier delle funzioni lipschitziane*

Si ottiene poi facilmente

$$\begin{aligned}\Sigma_{m,n}(x, y) &= \frac{1}{mn} \sum_{h=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} S_{h,k}(x, y) = \frac{1}{mn\pi^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} F^*(x, y, \xi, \eta) \cdot \\ &\quad \cdot \left(\frac{\text{sen } m\xi}{\text{sen } \xi} \right)^2 \left(\frac{\text{sen } n\eta}{\text{sen } \eta} \right)^2 \gamma' \left(\frac{2\xi}{\pi} \right) \delta' \left(\frac{2\eta}{\pi} \right) d\xi d\eta, \\ \sigma'_m &= \frac{1}{m} \sum_{h=0}^{m-1} s'_h = \frac{2}{m\pi} \int_0^{\pi/2} \gamma' \left(\frac{2\xi}{\pi} \right) \left(\frac{\text{sen } m\xi}{\text{sen } \xi} \right)^2 d\xi, \\ \sigma''_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} s''_k = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi/2} \delta' \left(\frac{2\eta}{\pi} \right) \left(\frac{\text{sen } n\eta}{\text{sen } \eta} \right)^2 d\eta.\end{aligned}$$

Per il teorema di Fejér, giusta la continuità nell'origine di $\gamma'(T)$ e $\delta'(Z)$, si ha

$$(6) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma'_m = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma''_n = 1,$$

e quindi, posto $\sigma_{m,n} = \sigma_m \sigma_n$,

$$(7) \quad \lim_{\substack{m, n \\ \rightarrow \infty}} \sigma_{m,n} = 1.$$

Per conseguenza si può scrivere

$$\begin{aligned}\Sigma_{m,n}(x, y) - \sigma_{m,n} \Phi(x, y) &= \frac{1}{mn\pi^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \varphi^*(x, y, \xi, \eta) \cdot \\ &\quad \cdot \left(\frac{\text{sen } m\xi}{\text{sen } \xi} \right)^2 \left(\frac{\text{sen } n\eta}{\text{sen } \eta} \right)^2 \gamma' \left(\frac{2\xi}{\pi} \right) \delta' \left(\frac{2\eta}{\pi} \right) d\xi d\eta,\end{aligned}$$

da cui si deduce l'analogo del teorema di Hardy-Littlewood ¹⁰⁾:

di più variabili, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, II, 7 (1938), pp. 279-295, in particolare, p. 282.

¹⁰⁾ F. MANARESI, *Sulla sommabilità (C, 1, 1) delle serie doppie di Fourier*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, III, 12 (1958), pp. 21-30.

I. Se, per un dato punto (x, y) , riesce

$$(8) \quad \lim_{\substack{u, v \rightarrow 0^+}} \frac{1}{uv} \int_0^u \int_0^v \varphi(x, y, u, v) du dv = 0 ,$$

$$(9) \quad \frac{1}{uv} \int_0^u \int_0^v |\varphi(x, y, u, v)| du dv \leq M$$

per $0 < u \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 < v \leq \frac{\pi}{2},$

con

$$\varphi(x, y, u, v) = F(x, y, 2u, 2v) - 4\Phi(x, y)$$

ed M costante positiva, allora si ha

$$\lim_{\substack{m, n \rightarrow \infty}} \sum_{m, n} \varphi(x, y) = \Phi(x, y) .$$

Infatti si può scrivere

$$(10) \quad \int_0^u \int_0^v \varphi(x, y, u, v) du dv =$$

$$= \frac{\varrho \sigma}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2} \varrho \left(\frac{2u}{\varrho} \right)} \int_0^{\frac{\pi}{2} h \left(\frac{2v}{\sigma} \right)} \varphi^*(x, y, \xi, \eta) \gamma' \left(\frac{2\xi}{\pi} \right) \delta' \left(\frac{2\eta}{\pi} \right) d\xi d\eta$$

e quindi dalla (8) segue che anche il secondo membro della (10), diviso per uv , tende a zero per $\frac{v}{u} \rightarrow 0^+.$

Poichè risulta

$$\lim_{u \rightarrow 0} g \left(\frac{2u}{\varrho} \right) = 0, \quad \lim_{v \rightarrow 0} h \left(\frac{2v}{\sigma} \right) = 0,$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{g \left(\frac{2u}{\varrho} \right)}{u} = \frac{2}{\varrho}, \quad \lim_{v \rightarrow 0} \frac{h \left(\frac{2v}{\sigma} \right)}{v} = \frac{2}{\sigma},$$

$$\frac{\pi}{2} g \left(\frac{2u}{\varrho} \right) = \xi, \quad \frac{\pi}{2} h \left(\frac{2v}{\sigma} \right) = \eta,$$

si avrà pure

$$(11) \quad \lim_{\substack{\xi, \eta \rightarrow 0^+}} \frac{1}{\xi \eta} \int_0^\xi \int_0^\eta \varphi^*(x, y, \xi, \eta) \gamma' \left(\frac{2\xi}{\pi} \right) \delta' \left(\frac{2\eta}{\pi} \right) d\xi d\eta = 0.$$

In secondo luogo, tenendo conto della (10), la (9) diviene

$$\frac{1}{uv\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2} g \left(\frac{2u}{\varrho} \right)} \int_0^{\frac{\pi}{2} h \left(\frac{2v}{\sigma} \right)} |\varphi^*(x, y, \xi, \eta)| \gamma' \left(\frac{2\xi}{\pi} \right) \delta' \left(\frac{2\eta}{\pi} \right) d\xi d\eta \leq \frac{M}{\varrho\sigma},$$

sicchè, avendosi

$$\frac{1}{uv\pi^2} = \frac{g \left(\frac{2u}{\varrho} \right) h \left(\frac{2v}{\sigma} \right)}{4uv} \cdot \frac{1}{\frac{\pi^2}{4} g \left(\frac{2u}{\varrho} \right) h \left(\frac{2v}{\sigma} \right)},$$

risulta

$$(12) \quad \frac{1}{\xi \eta} \int_0^\xi \int_0^\eta |\varphi^*(x, y, \xi, \eta)| \gamma' \left(\frac{2\xi}{\pi} \right) \delta' \left(\frac{2\eta}{\pi} \right) d\xi d\eta \leq \\ \leq \frac{4M}{\varrho\sigma} \left\{ \text{extr sup} \frac{uv}{g \left(\frac{2u}{\varrho} \right) h \left(\frac{2v}{\sigma} \right)} \right\}, \quad \text{per } 0 < \xi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \eta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Dalle (11) e (12), ragionando come nel loc. cit. in ¹⁰), si trae l'assunto.

Da I discendono poi, come casi particolari, gli analoghi dei teoremi di Lebesgue e di Fejér.

OSSERVAZIONE. - Si noti che alla (8) si può sostituire la

$$\lim_{\substack{\xi, \eta \rightarrow 0^+}} \frac{1}{\xi \eta} \int_0^\xi \int_0^\eta \varphi^*(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta = 0,$$

poichè da questa e della continuità nell'origine di $\gamma'(T)$, $\delta'(Z)$ si deduce ancora la (11).

Se, di più, le $\gamma'(T)$, $\delta'(Z)$ si suppongono limitate rispettivamente in $-1 \leq T \leq 1$ e in $-1 \leq Z \leq 1$, alla (9) si può sostituire la

$$\frac{1}{\xi\eta} \int_0^\xi \int_0^\eta |\varphi^*(x, y, \xi, \eta)| d\xi d\eta \leq M, \text{ per } 0 < \xi \leq \frac{\pi}{2}, 0 < \eta \leq \frac{\pi}{2},$$

poichè da questa si trae la (12), con $M \left\{ \text{extr sup} \left[\gamma' \left(\frac{2\xi}{\pi} \right) \delta' \left(\frac{2\eta}{\pi} \right) \right] \right\}$ al secondo membro.

5. Sommabilità $(C, 1, 1)$ di $\mathfrak{S}_1[f]$, $\mathfrak{S}_2[f]$, $\mathfrak{S}_3[f]$.

Sussiste l'analogo di un risultato ottenuto da Cesari ¹¹⁾:

I. Se la $f(x, y)$ è Lip α , $0 < \alpha \leq 1$, in Q , per ogni punto (x, y) non appartenente alle rette $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$ e $y \equiv 0 \pmod{2\pi}$, le (2), (3), (4) convergono secondo le medie $(C, 1, 1)$ verso $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, $f_3(x, y)$ rispettivamente. Tale convergenza è uniforme in ogni dominio rettangolare non contenente punti delle rette suindicate [o in tutto il piano se la $f(x, y)$ è Lip α in tutto il piano].

Si dà un cenno della dimostrazione nel caso della $\mathfrak{S}_3[f]$: in modo analogo si ragiona per le $\mathfrak{S}_1[f]$, $\mathfrak{S}_2[f]$.

Se la $f(x, y)$ è Lip α in Q , indicati con r ed s due numeri reali positivi tali che $r + s = \alpha$, riesce

$$|f(x, y) - f(x, y') - f(x', y) + f(x', y')| < 2K |x - x'|^r |y - y'|^s$$

per ogni coppia di punti (x, y) , (x', y') interni a Q ¹²⁾.

Se allora i due punti

$$\left[x - \varrho\gamma \left(\frac{2\xi}{\pi} \right), y - \sigma\delta \left(\frac{2\eta}{\pi} \right) \right], \left[x + \varrho\gamma \left(\frac{2\xi}{\pi} \right), y + \sigma\delta \left(\frac{2\eta}{\pi} \right) \right]$$

¹¹⁾ Loc. cit. in *), p. 287.

¹²⁾ Ibidem, p. 280.

sono interni a Q , si ha

$$\begin{aligned} |F_s^*(x, y, \xi, \eta)| &< 2K \left| 2\sigma\gamma \left(\frac{2\xi}{\pi} \right) \right|^r \left| 2\sigma\delta \left(\frac{2\eta}{\pi} \right) \right|^s = \\ &= K 2^{1+r+s} \sigma^r \sigma^s \left| \frac{\gamma \left(\frac{2\xi}{\pi} \right)}{\xi} \right|^r \left| \frac{\delta \left(\frac{2\eta}{\pi} \right)}{\eta} \right|^s |\xi|^r |\eta|^s \leq \bar{K} |\xi|^r |\eta|^s, \end{aligned}$$

con

$$\bar{K} = K 2^{1+r+s} \sigma^r \sigma^s \left\{ \text{extr sup} \left| \frac{\gamma \left(\frac{2\xi}{\pi} \right)}{\xi} \right|^r \right\} \left\{ \text{extr sup} \left| \frac{\delta \left(\frac{2\eta}{\pi} \right)}{\eta} \right|^s \right\}.$$

Pertanto se $2d$ è la distanza del punto xy dalla frontiera di Q , posto

$$\lambda = \frac{\pi}{2} g \left(\frac{d}{\rho} \right), \quad \mu = \frac{\pi}{2} h \left(\frac{d}{\sigma} \right),$$

si trae

$$\begin{aligned} \left| \frac{F_s^*(x, y, \xi, \eta)}{\text{sen } \xi \text{ sen } \eta} \right| &= \left| \frac{F_s^*(x, y, \xi, \eta)}{\xi \eta} \right| \left| \frac{\xi}{\text{sen } \xi} \right| \left| \frac{\eta}{\text{sen } \eta} \right| = \\ &= \begin{cases} O(\xi^{r-1} \eta^{s-1}), & \text{per } 0 \leq \xi \leq \lambda, \quad 0 \leq \eta \leq \mu; \\ \frac{1}{\mu} O(\xi^{r-1}), & \text{per } 0 \leq \xi \leq \lambda, \quad \mu \leq \eta \leq \frac{\pi}{2}; \\ \frac{1}{\lambda} O(\eta^{s-1}), & \text{per } \lambda \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \eta \leq \mu; \\ \frac{1}{\lambda \mu} O(1), & \text{per } \lambda \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}, \quad \mu \leq \eta \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Dopodichè si ripete sostanzialmente il ragionamento di Cesari.

Valgono inoltre le seguenti proposizioni, che costituiscono gli analoghi di alcuni risultati ottenuti dall'A. ¹³⁾.

¹³⁾ F. MANARES, *Alcuni teoremi sulle serie coniugate della serie di Fourier di una funzione di più variabili*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 27 (1957), pp. 181-192.

II. Se, per un dato punto (x, y) , riesce

$$\lim_{\substack{u, v \rightarrow 0^+}} \frac{1}{uv} \int_0^u \int_0^v \varphi_1(x, y, u, v) du dv = 0 ,$$

$$\frac{1}{uv} \int_0^u \int_0^v | \varphi_1(x, y, u, v) | du dv \leq M ,$$

$$\text{per } 0 < u \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 < v \leq \frac{\pi}{2}^{14)},$$

con

$$\varphi_1(x, y, u, v) = F_1(x, y, 2u, 2v) - 4\Phi(x, y)$$

ed M costante positiva, allora si ha

$$\lim_{\substack{m, n \rightarrow \infty}} [\Sigma_{2m, 2n}^{(1)}(x, y) - \Sigma_{m, n}^{(1)}(x, y)] = \frac{\log 2}{2\pi} \Phi(x, y) .$$

III. Se, per un dato punto (x, y) , riesce

$$\lim_{\substack{u, v \rightarrow 0^+}} \frac{1}{uv} \int_0^u \int_0^v \varphi_2(x, y, u, v) du dv = 0 ,$$

$$\frac{1}{uv} \int_0^u \int_0^v | \varphi_2(x, y, u, v) | du dv \leq M ,$$

$$\text{per } 0 < u \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 < v \leq \frac{\pi}{4}^{14)}$$

con

$$\varphi_2(x, y, u, v) = F_2(x, y, 2u, 2v) - 4\Phi(x, y)$$

ed M costante positiva, allora si ha

$$\lim_{\substack{m, n \rightarrow \infty}} [\Sigma_{m, 2n}^{(2)}(x, y) - \Sigma_{m, n}^{(2)}(x, y)] = \frac{\log 2}{2\pi} \Phi(x, y) .$$

¹⁴⁾ Questa condizione sostituisce, in modo meno restrittivo, la cosiddetta « condizione L ». Cfr. loc. cit. in ¹⁰⁾, p. 29.

IV. Se, per un dato punto (x, y) , riesce

$$\lim_{u, v \rightarrow 0^+} \frac{1}{uv} \int_0^u \int_0^v \varphi_3(x, y, u, v) du dv = 0,$$

$$\frac{1}{uv} \int_0^u \int_0^v |\varphi_3(x, y, u, v)| du dv \leq M, \text{ per } 0 < u \leq \frac{\pi}{2}, 0 < v \leq \frac{\pi}{2}^{14)},$$

con

$$\varphi_3(x, y, u, v) = F_3(x, y, 2u, 2v) - 4\Phi(x, y)$$

ed M costante positiva, allora si ha

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{m, n \rightarrow \infty}} [\sum_{2m, 2n}^{(3)}(x, y) - \sum_{2m, n}^{(3)}(x, y) - \sum_{m, 2n}^{(3)}(x, y) + \sum_{m, n}^{(3)}(x, y)] = \\ = \left(\log \frac{2}{\pi}\right)^2 \Phi(x, y). \end{aligned}$$

Infatti, si osservi in primo luogo che, mediante lo stesso ragionamento adottato per passare dalle (8), (9) alle (11), (12), dalle condizioni, che esprimono le ipotesi dei teoremi prima enunciati, si traggono condizioni analoghe con

$$\varphi_k^*(x, y, \xi, \eta) = F_k \left[x, y, \varrho \gamma \left(\frac{2\xi}{\pi} \right), \sigma \delta \left(\frac{2\eta}{\pi} \right) \right] - 4\Phi(x, y) \quad (k=1, 2, 3)$$

al posto di $\varphi_k(x, y, u, v)$ ($k = 1, 2, 3$).

Dopodiché si procede come nel loc. cit. in ¹³⁾, tenendo conto del teorema I del n. 4 e, riguardo a II e a III, delle (6) e che riesce

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \int_0^{\pi/2} \sin 2m\xi \left(\frac{\sin m\xi}{\sin \xi} \right)^2 \gamma' \left(\frac{2\xi}{\pi} \right) d\xi = \log 2^{15)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{n} \sin 2n\eta \left(\frac{\sin n\eta}{\sin \eta} \right)^2 \delta' \left(\frac{2\eta}{\pi} \right) d\eta = \log 2^{15)},$$

¹⁵⁾ Cfr. loc. cit. in ¹³⁾, pp. 371-372.

e, riguardo a IV, della (7) e che dalle due precedenti relazioni segue

$$\lim_{\substack{m, n \\ \rightarrow \infty}} \frac{1}{mn} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin 2m\xi \sin 2n\eta \left(\frac{\sin m\xi}{\sin \xi} \right)^2 \left(\frac{\sin n\eta}{\sin \eta} \right)^2 \cdot \\ \cdot \gamma' \left(\frac{2\xi}{\pi} \right) \delta' \left(\frac{2\eta}{\pi} \right) d\xi d\eta = (\log 2)^2.$$

Da ultimo si noti che ci si è limitati a provare per le (1), (2), (3), (4) gli analoghi di alcuni teoremi che valgono per le serie doppie di Fourier trigonometriche, ma è manifesto che numerosi altri risultati si possono estendere alle serie anzidette.