

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

SANTUZZA GHEZZO

Una caratterizzazione geometrica dei reticoli semimodulari

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 31 (1961), p. 381-395

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1961__31__381_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1961__31__381_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

UNA CARATTERIZZAZIONE GEOMETRICA DEI RETICOLI SEMIMODULARI

Nota () di SANTUZZA GHEZZO (a Padova)*

1. - È noto che se in un reticolo L non è contenuto alcun sottoreticolo consistente di cinque elementi $z \cup y = x \cup y > > z > x > x \cap y = z \cap y$ e y non confrontabile con z nè con x (sottoreticolo che noi diremo pentagonale), L è modulare e soddisfa alle due leggi di copertura

$$C'_1) y > x \cap y \Rightarrow x \cup y > x$$

$$C'_2) x \cup y > y \Rightarrow x > x \cap y$$

duali una dell'altra.

Mi sono proposta qualche indagine sulla struttura di un reticolo in presenza di un sottoreticolo pentagonale.

Ho trovato (n. 3, 4) che se un reticolo è atomico e soddisfa alla C'_2 e non alla C'_1 , per ogni suo sottoreticolo pentagonale (per quanto sopra, certo, esistente) generato da z , x e y risulta che tutti gli elementi $\bar{y}$ che coprono y : o generano con z e x ancora sottoreticoli pentagonali, ovvero con y , x e $(z \cap \bar{y}) \cup x$ generano dei sottoreticoli del tipo della fig. 1, che diremo sotto-triquadrangolari.

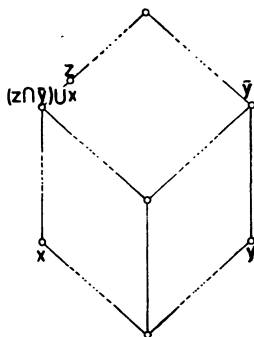


Fig. 1

(*) Pervenuta in redazione il 10 luglio 1961.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

Al n. 5 del presente lavoro definisco l'insieme $P_y^\dagger$ di L che contiene y e per ogni suo elemento a contiene tutti gli elementi di L che coprono a . Deduco alcune proprietà di questo insieme nel caso che y generi con x e z un sottoreticolo pentagonale di L , arrivando ad una condizione perchè L contenga sottoreticoli sotto-triquadrangolari (teor. 5.1).

Al n. 6 considero, in un reticolo qualunque L che contenga un sottoreticolo pentagonale generato da x , z e y , l'insieme H degli elementi dell'intervallo $S : [y, z \cup y]$ che generano con z e x dei sottoreticoli pentagonali. Mi risulta che ogni elemento di H genera in S un ideale principale contenuto in H ; e che, se L è condizionatamente completo e unione-continuo, H ammette elementi massimali, ed H è la riunione degli ideali principali generati dai suoi elementi massimali.

Se g_1 è un elemento massimale di H ed L è anche sotto-semimodulare, cioè soddisfa alla C'_2 , e atomico, gli elementi g_1 , $g_2 > g_1$, x e $(g_2 \cap z) \cup x$ generano in L un sottoreticolo sotto-triquadrangolare.

Infine ai numeri 7 e 8 si arriva ad una condizione necessaria e sufficiente perchè un reticolo atomico, condizionatamente completo e unione-continuo sia sotto-semimodulare (teor. 7.1), condizione che vale in particolare nei reticoli atomici generati in modo compatto (coroll. 8.1).

Insieme con i teoremi enunciati valgono anche i loro duali.

2. - Indicheremo gli elementi di un reticolo con le lettere latine minuscole e gli insiemi di elementi del reticolo stesso con le maiuscole. Inoltre le scritture $a > b$ e $b < a$ staranno ad indicare che a « copre » b , cioè che è $a > b$ e che per nessun c del reticolo è $a > c > b$.

Ricordiamo che vale ¹⁾ il seguente

TEOREMA 2.1: *Un reticolo L è non modulare se e solo se contiene un sottoreticolo isomorfo al reticolo pentagonale della fig. 2.*

¹⁾ V. [1], cap. V, § 2, pag. 66.

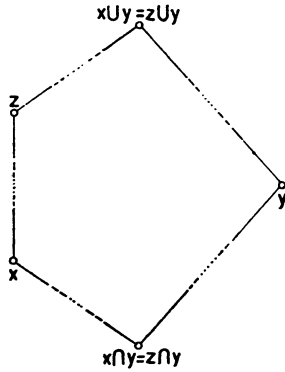


Fig. 2

Da cui segue che in un reticolo modulare sono soddisfatte le seguenti condizioni:

C_1) se $y > a$ e $a < x$ non confrontabile con y , allora $x \cup y > x$,

e dualmente

C_2) se $a > y$ e $a > x$ non confrontabile con y , allora $x > x \cap y$.

Quindi valgono le:

C'_1) se $y > x \cap y$, allora $x \cup y > x$

e

C'_2) se $x \cup y > y$, allora $x > x \cap y$.

Noi indicheremo il reticolo della fig. 1, che è generato dagli elementi x , z e y per i quali è $x \cup y = z \cup y$ e $x \cap y = z \cap y$, con la scrittura $\{z > x; y \text{ non confrontabile con } z \text{ nè con } x\}$.

Assumiamo inoltre, come d'uso ²⁾, le seguenti definizioni di semimodularità:

DEFINIZIONE 2.1: Un reticolo è sopra-semimodulare se verifica la C'_1); e sotto-semimodulare se verifica la C'_2).

²⁾ V. [2], n. 3, Def. 3.2, pag. 4.

Inoltre:

DEFINIZIONE 2.2: Diremo sopra-triquadrangolare ³⁾ un reticolo del tipo della fig. 3.

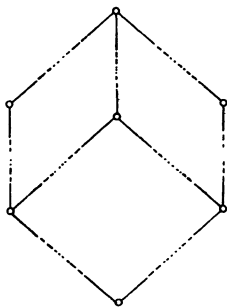


Fig. 3

Un reticolo siffatto è sopra-semimodulare senza essere sotto-semimodulare.

Dualmente

DEFINIZIONE 2.3: Diremo sotto-triquadrangolare un reticolo del tipo della fig. 4.

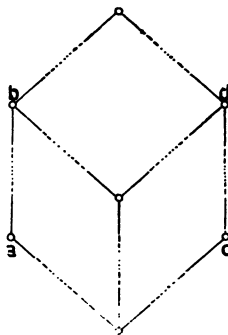


Fig. 4

e lo indicheremo, a volte, con $\{b > a, d > c; a, b \text{ non confrontabili con } c, d\}$.

Ricordiamo ⁴⁾ infine la seguente:

DEFINIZIONE 2.4: Un reticolo L si dice atomico se $a, b \in L$ ed $a > b$ implicano $a \geq c > b$ per qualche $c \in L$.

³⁾ V. [4], Cap. II, § 1, n. 69, pag. 102.

⁴⁾ V. [2], n. 2, nota ¹⁾, pag. 3.

3. - Dal teorema 2.1 e dalla definizione 2.1 segue che un reticolo che non contenga sottoreticoli pentagonali è semimodulare.

Siano ora a e b , con $a > b$, due elementi di un reticolo L e indichiamo con P_b l'insieme, eventualmente vuoto, degli elementi di L che coprono b ; e con P_a^* l'insieme degli elementi c di P_b tali che si abbia $a > c$.

Si ha intanto il seguente lemma:

LEMMA 3.1: *Se un reticolo L sotto-semimodulare contiene un sottoreticolo pentagonale $M \{z > x; y \text{ non confrontabile con } z \text{ nè con } x\}$, per ogni elemento y' , se esiste, dell'insieme $P_y^{x \cup y}$, risulta che: se $y' \cap x \neq y' \cap z$ allora $y', y, x \cup (y' \cap z) \leq z$ e x generano in L un reticolo sotto-triquadrangolare; se invece $y' \cap x = y' \cap z$ allora x, z e y' generano un sottoreticolo pentagonale di L , con $z \cup y' = x \cup y$ e $x \cap y' \geq z \cap y$.*

Infatti:

se esiste in $P_y^{x \cup y}$ un elemento y' , si ha:

$$y' \cup x = y' \cup z = y \cup x$$

e

$$y' \cap z \geq y' \cap x \geq y \cap x = y \cap z.$$

Sia $t' = y' \cap z$ e supponiamo $y' \cap x \neq y' \cap z$ e quindi $t' > y' \cap x$, e $t' > y \cap z$, di conseguenza t' non è minore nè uguale ad y altrimenti sarebbe $y \cap z \geq t' > y \cap z$.

Tenuto conto di ciò e della semimodularità di L risulta che $t' \cup y = y' > y$ implica che $t' > t' \cap y = (y' \cap z) \cap y = y \cap z$, e quindi t' è non maggiore di x e non maggiore di y .

Dovendo inoltre essere $t' > y' \cap x \geq y \cap x = y \cap z$, risulterà $y' \cap x = y \cap x$, e perciò anche t' non minore nè uguale ad x altrimenti $y' \cap x \geq t' > y' \cap x$.

In questo caso dunque (v. fig. 5), gli elementi $y', y, t' \cup x \leq z$ e x generano in L un reticolo sotto-triquadrangolare N , come si verifica facilmente.

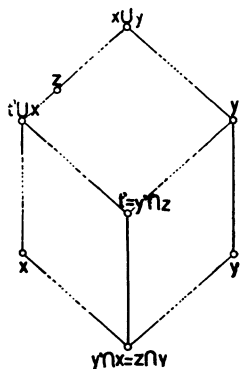


Fig. 5

Il sottoreticolo pentagonale M risulta inscritto in N se e solo se (z, y') è una coppia modulare ⁵⁾.

Supponiamo ora che $y' \cap x = y' \cap z \geq y \cap z$, allora essendo $y' \cup x = y' \cup z = y \cup x$, gli elementi x, z e y' , generano un sottoreticolo pentagonale di L , come in fig. 6.

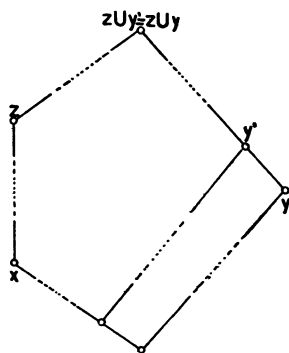


Fig. 6

Il lemma 3.1 è così completamente dimostrato.

Notiamo le seguenti osservazioni:

OSSEVAZIONE 3.1: *Nelle ipotesi del lemma 3.1 nessun elemento di P , può esser confrontabile con z o con x .*

Infatti essendo $x \cup y = z \cup y > z > x$, potrebbe solo essere $y' = z \cup y$. Ma per la sotto-semimodularità di L , poichè z non copre $z \cap y$, $z \cup y$ non può coprire y .

OSSEVAZIONE 3.2: *Se $\{z > x$ e y non confrontabile con z nè con $x\}$ è un sottoreticolo pentagonale di un reticolo L , la condizione $y' \cap x = y' \cap z$ è equivalente alla $y' \cap z < x$, per qualunque $y': z \cup y > y' > y$.*

Infatti in tali ipotesi risulta:

$$y \cap x \leq y' \cap x \leq y' \cap z < z;$$

e inoltre è

$$y' \cap z \text{ non maggiore nè uguale ad } x \quad \text{e} \quad y' \cap x < x$$

⁵⁾ Una coppia (z, y) è detta modulare quando: $z > x \Rightarrow z \cap (y \cup x) = (z \cap y) \cup x$. Cfr. [1], Cap. VII, § 1, pag. 100.

poichè in caso contrario sarebbe $x \leq y'$ e quindi $x \cup y = y'$, mentre è $x \cup y = z \cup y > y'$.

Dunque se $y' \cap z = y' \cap x$, è $y' \cap z < x$; viceversa se $y' \cap \cap z < x$, essendo anche $y' \cap z < y'$, risulta

$$y' \cap z \leq y' \cap x \leq y' \cap z.$$

Segue facilmente:

OSSERVAZIONE 3.3: *Se $\{z > x; y$ non confrontabile con z nè con $x\}$ è un sottoreticolo pentagonale di un reticolo L , ed è $z \cup y > y' \geq y$, allora anche $\{z > x; y'$ non confrontabile con z nè con $x\}$ è un sottoreticolo pentagonale di L se e solo se $y' \cap z < x$.*

Vale inoltre il seguente:

LEMMA 3.2: *Se il reticolo L di cui al lemma 3.1 è atomico, l'insieme $P_{\mathbf{y}}^{\mathbf{u}\mathbf{v}}$ è certamente non vuoto.*

Infatti se L è sotto-semimodulare e contiene $\{z > x; y$ non confrontabile con z nè con $x\}$ esso contiene anche qualche elemento a tale che si abbia

$$y \cup z > a > y$$

altrimenti z dovrebbe coprire $y \cap z$; da ciò, per l'atomicità segue l'asserto.

In base ai lemmi 3.1 e 3.2, sussiste, insieme con il duale, il seguente

TEOREMA 3.1: *Se un reticolo L atomico e sotto-semimodulare contiene un sottoreticolo pentagonale $M: \{z > x, y$ non confrontabile con z nè con $x\}$, esiste in L almeno un elemento $y': z \cup y > y' > y$ il quale, se non genera con x e z ancora un sottoreticolo pentagonale di L , è vertice di un reticolo sotto-triquadrangolare.*

4. - Nel reticolo L di cui al lemma 3.1 consideriamo ora, se esistono, gli elementi y'' di $P_{\mathbf{y}}^{\mathbf{u}\mathbf{v}}$, che non stanno in $P_{\mathbf{y}}^{\mathbf{u}\mathbf{v}}$; vogliamo verificare il seguente:

LEMMA 4.1: *In un reticolo sotto-semimodulare, se un elemento y genera insieme con due fissati elementi z e x , $z > x$, un sottoreticolo pentagonale, lo stesso accade ad ogni elemento y'' di $P_{\mathbf{y}}^{\mathbf{u}\mathbf{v}}$, che non stia in $P_{\mathbf{y}}^{\mathbf{u}\mathbf{v}}$.*

Infatti per un siffatto y'' si ha

$$z \cap y = x \cap y \leq x \cap y'' \leq z \cap y'' \leq (x \cup y) \cap y'' = y$$

e inoltre $z \cap y'' \neq y$ altrimenti sarebbe $z > z \cap y'' = y$, e $z \cap y$ è non minore di $z \cap y''$ poichè da $z \cap y'' < z$ e $z \cap y'' < y$ risulta $z \cap y'' \leq z \cap y$; perciò $x \cap y = z \cap y = x \cap y'' = z \cap y''$.

Per le unioni si ha:

$$x \cup y = z \cup y \leq x \cup y'' \leq z \cup y'' = (z \cup y) \cup y'' = (x \cup y) \cup y'' = x \cup y'' ,$$

dove

$$x \cup y'' = (x \cup y) \cup y'' \neq x \cup y ;$$

dunque

$$x \cup y = z \cup y < x \cup y'' = z \cup y'' .$$

Se ne deduce che x , z e y'' generano anch'essi un sottoreticolo pentagonale di L , come volevasi.

Dai lemmi 3.1 e 4.1 segue:

TEOREMA 4.1: *Se un reticolo L sotto-semimodulare contiene un sottoreticolo pentagonale $\{z > x; y \text{ non confrontabile con } z \text{ nè con } x\}$, ogni eventuale elemento che copra y , se non è vertice di un reticolo sotto-triquadrangolare di L , genera con z e x ancora un sottoreticolo pentagonale.*

E dualmente.

5. - Sia ora L un reticolo sotto-semimodulare e atomico, e sia $P_1^\dagger$ l'insieme così definito:

DEFINIZIONE 5.1: $b \in P_1^\dagger$ e per ogni elemento $a \in P_1^\dagger$ sia anche $P_a \subset P_1^\dagger$.

L'insieme $P_1^\dagger$ risulta filtrante inferiormente e tale che per ogni suo elemento c esiste almeno una catena massimale^{*)} finita che lo congiunge con b .

Osserviamo subito che se L contiene il sottoreticolo penta-

*) È detta « massimale » o « connessa » una catena $x_0 < x_1 < \dots < x_i$ quando $x_i > x_{i-1}$ per ogni i . Cfr. [1], Cap. I, n. 9, p. 11.

gonale $\{z > x; y \text{ non confrontabile con } z \text{ nè con } x\}$, per ogni $\bar{y} \in P_y^\dagger$ il quale generi con z e x un sottoreticolo pentagonale di L , cioè, per l'osserv. 3.3, per ogni $\bar{y} \in P_y^\dagger$ tale che $\bar{y} \cap z < x$, gli elementi di $P_{\bar{y}} \subset P_y^\dagger$ non sono, per l'osserv. 3.1, confrontabili con x nè con z .

Inoltre se $\bar{y} \cap z$ è non minore di x , per nessun elemento $\bar{y} \in P_{\bar{y}}$ può essere $\bar{y} \cap z < x$ poichè $\bar{y} \cap z \geq \bar{y} \cap z$.

Dunque:

PROPOSIZIONE 5.1: *Se in $P_y^\dagger$ c'è un elemento $\bar{y}$ confrontabile con z o con x , allora $\bar{y} \cap z$ è non minore di x ed essendo $y \cap z < x$, nella catena*

$$a_0 = y < a_1 < \dots < a_n = \bar{y}$$

ci sarà un primo elemento a_r tale che $a_r \cap z$ è non minore di x , con $r \leq n - 1$. Gli elementi $a_{r-1}, a_r, x, (a_r \cap z) \cup x \leq z$ generano allora in L un reticolo sotto-triquadrangolare (come in fig. 7).

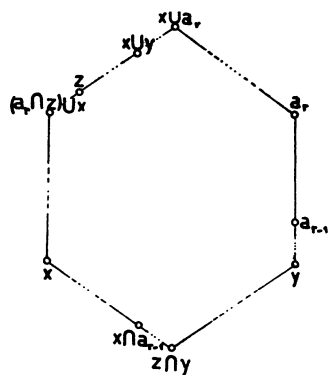


Fig. 7

Vale inoltre la seguente:

PROPOSIZIONE 5.2: *In un reticolo L atomico, se l'insieme $P_i^\dagger$ ha un elemento massimale m , questo è massimo in $P_i^\dagger$, ed è inoltre elemento universale $m = u$ in L .*

Infatti se m non fosse massimo in $P_i^\dagger$, esisterebbe ivi un $\bar{b}$ non confrontabile con m per cui $m < \bar{b} \cup m \in L$, e per l'atomi-

cità di L , ci sarebbe in $P_1^\dagger$ un $m' \succ m$, assurdo dal quale segue la prima parte dell'affermazione precedente.

Ad analoga conclusione si perviene supponendo che esista in L un elemento a non minore nè uguale ad m , cosicchè risulta $m = u \in P_1^\dagger$, c.v.d.

Segue in particolare l'esistenza di una catena massimale finita di estremi b ed u .

Dalle proposizioni 5.1 e 5.2, tenuto conto che se in L esiste elemento universale u , questo è confrontabile con ogni elemento di L , segue ora la

PROPOSIZIONE 5.3: *Se un reticolo L atomico, sotto-semimodulare contiene il sottoreticolo pentagonale $\{z > x, y \text{ non confrontabile con } z \text{ nè con } x\}$, e se ammette elemento universale che appartenga a $P_1^\dagger$, esistono due elementi $a_r \succ a_{r-1} \geq y$ i quali con x e $(a_r \cap z) \cup x$ generano in L un reticolo sotto-triquadrangolare.*

Riassumendo i risultati finora ottenuti possiamo enunciare il seguente:

TEOREMA 5.1: *Se un reticolo L atomico, sotto-semimodulare e tale che ogni suo elemento b sia origine di una catena massimale finita avente per ultimo elemento l'elemento universale u di L , contiene un sottoreticolo pentagonale $\{z > x; y \text{ non confrontabile con } z \text{ nè con } x\}$, esso contiene, nella sezione terminante $z \cap y$ ⁷⁾, anche un sottoreticolo sotto-triquadrangolare generato da $x, a_{r-1} \geq y, a_r \succ a_{r-1}$ e $(a_r \cap z) \cup x \leq z$, per certi convenienti a_{r-1}, a_r (come in fig. 7).*

E dualmente.

6. - Sia ora L un reticolo qualunque.

Supponiamo che L contenga un sottoreticolo pentagonale $\{z > x; y \text{ non confrontabile con } z \text{ nè con } x\}$ indichiamo con S l'intervallo $[y, z \cup y]$ di L , cioè l'insieme degli elementi s di L tali che si abbia $y \leq s \leq z \cup y$, e consideriamo l'insieme H degli

⁷⁾ Gli insiemi degli elementi x di un reticolo L soddisfacenti a $x < b$ oppure ad $a < x$, si dicono rispettivamente «sezione cominciante di b : $(b)^\circ$ », e «sezione terminante di a : $a(\circ)$ ». Cfr. [3], parte I, Cap. I, n. 2, pag. 4.

elementi di S che generano con x e z dei sottoreticoli pentagonali.

OSSERV. 6.1: H risulta non vuoto poichè $y \in H$; inoltre se $\bar{s} \in H$ ogni elemento $s \in S$ tale che sia $s < \bar{s}$, appartiene ad H .

Infatti se $\bar{s} \in H$ allora $\bar{s} \cap z < x$, e quindi $s < \bar{s}$ implica $s \cap z \leq \bar{s} \cap z < x$. Da ciò per l'osserv. 3.3 segue l'asserto. In altre parole: ogni elemento h di H genera in S (sottoreticolo di L) un ideale principale $(h) \subset H$.

Imponiamo ora ad L di essere *condizionatamente completo*⁹⁾, cioè supponiamo che ogni suo sottoinsieme non vuoto e limitato abbia maggiorante minimo. In tal caso esiste in L un elemento $\bar{h} = UH$ tale che per ogni $h \in H$ si abbia $h \leq \bar{h}$. È subito visto che:

OSSERVAZIONE 6.2: Siccome per ogni h di H si ha $h \leq z \cup y$, risulta anche $\bar{h} = UH \leq z \cup y$.

Inoltre ogni catena H' di elementi di H è limitata, e dunque ammette in L un maggiorante minimo $UH' = \bar{h}' \leq \bar{h}$.

OSSERVAZIONE 6.3: L'insieme H'_1 che contiene gli elementi h' di una catena H' di H ed ogni elemento s di S tale che sia $s \leq h'$ per qualche $h' \in H'$, è un ideale di S contenuto in H . Inoltre $UH'_1 = UH'$.

Infatti la prima affermazione consegue dall'osserv. 1.5 e dal fatto che se h'_1 e $h'_2 \in H'_1$ allora $h'_1 \leq h'$ e $h'_2 \leq h'$ per qualche $h' \in H'$ e perciò $h'_1 \cup h'_2 \leq h'$ da cui $h'_1 \cup h'_2 \in H'_1$. Per dimostrare che $UH'_1 = UH'$, basta osservare che per ogni elemento $h'_1 \in H'_1$ è $h'_1 \leq h' \leq UH'$ per qualche $h' \in H'$ e quindi (con ragionamento analogo a quello dell'osserv. 6.2) segue

$$UH'_1 \leq UH'$$

D'altra parte ogni $h' \in H'$ appartiene ad H'_1 per costruzione, dunque $h' \leq UH'_1$ e quindi

$$UH' \leq UH'_1.$$

Supponiamo ora che il reticolo L sia anche *unione-continuo*⁹⁾, cioè che $a \cap UB = U(a \cap B)$ ¹⁰⁾ per ogni ideale B di L , e consideriamo l'insieme I ottenuto come segue:

⁹⁾ V. [1], Cap. IV, n. 3, pag. 51.

⁹⁾ V. [2], n. 2, lemma 2.3, pag. 2.

¹⁰⁾ Con $a \cap B$ indichiamo l'insieme degli elementi $a \cap b$, $b \in B$.

Sia H' una catena di H siffatta che il suo maggiorante minimo $\bar{h}'$ sia non minore di alcun elemento $h \in H$, e si definisca I come l'insieme degli elementi h' di H' , e degli elementi l di L tali che $l \leq h'$ per qualche $h' \in H'$.

Con ragionamenti analoghi a quelli dell'osserv. 3.5 si verifica che I è un ideale di L e che $UI = \bar{h}' = UH'$.

Per la condizione ora imposta ad L , risulta

$$(1) \quad z \cap \bar{h}' = z \cap UI = U(z \cap I).$$

Ma per ogni $i \in I$ esiste qualche $h' \in H' \subset H$ tale che sia $i \leq h'$ e quindi $z \cap i \leq z \cap h'$, da cui (osserv. 3.2): $z \cap i < x$; ne segue, analogamente all'osserv. 2.5,

$$(2) \quad U(z \cap I) \leq x.$$

Ricordiamo ora che per nessun $\bar{y} : y \leq \bar{y} \leq z \cup y = x \cup y$ può essere $z \cap \bar{y} = x$, in quanto: se $\bar{y} = z \cup y$ allora $z \cap \bar{y} = z \neq x$ e se $\bar{y} < z \cup y = x \cup y$ allora $z \cap \bar{y} = x$ qui darebbe $x < \bar{y}$ che con $y \leq \bar{y}$ porge l'assurdo $x \cup y = \bar{y} < x \cup y$.

Perciò la (2) si può scrivere, tenuto conto della (1),

$$z \cap \bar{h}' < x.$$

Per l'osserv. 3.3 si conclude che $\bar{h}' \in H' \subset H$ ed anche $\bar{h}' < z \cup y$ poichè $z \cup y$ non appartiene ad H .

Possiamo così affermare che: $UI = \bar{h}'$ è un elemento massimale di H , e perciò I è l'ideale principale ($\bar{h}'$) di L .

Si scelga ora, se esiste, un elemento h di H non appartenente all'ideale I di cui sopra, e si consideri una catena di elementi di H , la quale contenga h , ed il cui maggiorante minimo $\bar{h}$ sia non minore di alcun elemento di H .

Si può costruire in L , in modo analogo ad I , l'ideale $I' = (\bar{h})$.

OSSERVAZIONE 6.4: Gli elementi comuni ad un ideale così ottenuto e all'intervallo S , costituiscono un ideale principale I_s di S , formato di elementi di H .

Dunque da quanto sopra risulta che l'insieme H ammette elementi massimali, i quali generano in S degli ideali principali

costituiti da elementi di H ; ed inoltre che H è la riunione di siffatti ideali.

In base alle osservazioni esposte in questo n. 6, possiamo in particolare, enunciare il seguente:

LEMMA 6.1: *Se un reticolo L , condizionatamente completo e unione-continuo, contiene un sottoreticolo pentagonale $\{z > x; y \text{ non confrontabile con } z \text{ nè con } x\}$, l'insieme H degli elementi i quali con z e x generano sottoreticoli pentagonali contenuti nell'intervallo $[z \cap y, z \cup y]$, ammette un elemento massimale $g_1: z \cup y > g_1 \geq y$.*

Supponiamo infine che L sia atomico e sotto-semimodulare, allora l'insieme $P_{g_1}^{z \cup y}$ associato all'elemento g_1 di cui al lemma 6.1, in virtù del lemma 3.2, contiene almeno un elemento $g_2: z \cup y > g_2 > g_1$, il quale, in base ai lemmi 3.1 e 6.1, genera con g_1 , x e $(g_2 \cap z) \cup x$ un sottoreticolo sotto-triquadrangolare.

Dunque:

TEOREMA 6.1: *Se un reticolo atomico, sotto-semimodulare, condizionatamente completo e unione-continuo, contiene un sottoreticolo pentagonale $\{z > x; y \text{ non confrontabile con } z \text{ nè con } x\}$, esso contiene anche, nell'intervallo $[z \cap y, z \cup y]$, un sottoreticolo sotto-triquadrangolare generato da g_1 , g_2 , x e $(g_2 \cap z) \cup x$, per certi g_1 e g_2 tali che sia $z \cup y > g_2 > g_1 \geq y$.*

E dualmente.

7. - Si verifica facilmente che:

LEMMA 7.1: *Se un reticolo L è tale che se contiene un sottoreticolo pentagonale $\{z > x; y \text{ non confrontabile con } z \text{ nè con } x\}$, esso contiene anche un sottoreticolo sotto-triquadrangolare $\{s > x, g_2 > g_1; s, x \text{ non confrontabili con } g_1, g_2\}$ con $s, g_1, g_2 \in L$, $z \geq s > x$ e $z \cup y > g_2 > g_1 \geq y$, L è sotto-semimodulare.*

Infatti ¹¹⁾ se in L per qualche coppia di elementi, z non confrontabile con y e $z \cup y > y$, esistesse un elemento x tale che fosse $z > x > z \cap y$, si sarebbe in presenza di un sottoreticolo pentagonale $\{z > x, y \text{ non confrontabile con } z \text{ nè con } x\}$ il

¹¹⁾ V. analogo ragionamento in [3], parte I, Cap. VII, n. 2, lemma 1, pag. 87.

quale, per l'ipotesi fatta, assicura l'esistenza di almeno un elemento $g_2 \in L$: $z \cup y > g_2 > y$.

Il lemma 7.1, insieme col teor. 6.2 ci permettono di formulare il seguente

TEOREMA 7.1: *Condizione necessaria e sufficiente perchè un reticolo L atomico, condizionatamente completo e unione-continuo, sia sotto-semimodulare è che se contiene un sottoreticolo pentagonale $\{z > x; y \text{ non confrontabile con } z \text{ nè con } x\}$, esso contenga anche, un sottoreticolo sotto-triquadrangolare $\{s > x, g_2 > g_1; s, x \text{ non confrontabili con } g_1, g_2\}$ con $s, g_1, g_2 \in L$, $z \geq s > x$ e $z \cup y > g_2 > g_1 \geq y$ (come in fig. 8).*

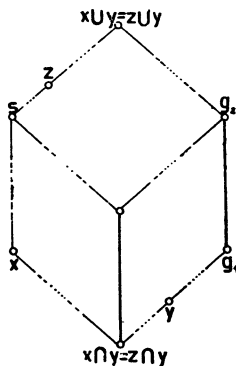


Fig. 8

Col teorema 7.1, vale il suo duale.

8. - Ricordiamo in particolare la seguente

DEFINIZIONE 8.1 ¹²⁾: *Un reticolo L è generato in modo compatto se L è completo e $a = \bigcup \{c \in C(L) \mid c \leq a\}$ per ogni $a \in L$.*

Dove $C(L)$ indica l'insieme degli elementi compatti di L , cioè l'insieme degli elementi c di L tali che se $c \leq \bigcup S$ sia anche $c \leq \bigcup S'$ per qualche sottoinsieme finito S' di S .

Poichè risulta che ogni reticolo generato in modo compatto è unione-continuo ¹³⁾, dal teor. 7.1 si deduce il seguente.

¹²⁾ V. [2], n. 2, def. 2.1 e def. 2.2, pag. 2.

¹³⁾ V. [2], n. 2, lemma 2.3, pag. 2.

COROLLARIO 8.1: *Condizione necessaria e sufficiente perchè un reticolo L atomico, generato in modo compatto sia sotto-semimodulare è che se contiene un sottoreticolo pentagonale $\{z > x; y \text{ non confrontabile con } z \text{ nè con } x\}$, esso contenga anche un sottoreticolo sotto-triquadrangolare $\{s > x, g_2 > g_1; s, x \text{ non confrontabili con } g_1, g_2\}$ con $s, g_1, g_2 \in L, z \geq s > x \text{ e } z \cup y > g_2 > g_1 \geq y$.*

BIBLIOGRAFIA

- [1] BIRKHOFF G.: *Lattice Theory*, rev. ed., Amer. Math. Soc., Colloquium Publications, vol. XXV, New York, 1942.
- [2] DILWORTH R. P. and CRAWLEY PETER: *Decomposition theory for lattices without chain conditions*, Trans. of the Amer. Math. Soc., vol. XCVI, number 1, July, 1960.
- [3] DUBREIL JACOTIN M. L., LESIEUR L., CROISOT R.: *Leçons sur la théorie des treillis des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques*. Gauthier-Villars, Paris, 1953.
- [4] MORIN U.: *Algebra astratta e geometria algebrica*. Parte prima *Algebra astratta*, Cedam, Padova, 1955.