

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

EDMONDO MORGANTINI

**Il sistema invariante delle omologie armoniche,
come generatore del gruppo delle omografie del
piano proiettivo complesso o reale**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 31 (1961), p. 374-380

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1961__31__374_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1961__31__374_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

IL SISTEMA INVARIANTE DELLE OMOLOGIE ARMONICHE,
COME GENERATORE DEL GRUPPO DELLE
OMOGRAFIE DEL PIANO PROIETTIVO
COMPLESSO O REALE

Nota () di EDMONDO MORGANTINI, a Padova*

Durante i lavori svolti nel 1960-61 in seno al XXV Gruppo di ricerca, finanziato dal C. N. R. e diretto dal Prof. U. Morin, si è presentata fra le altre anche la questione seguente: *Se, nel piano proiettivo (complesso o reale) quello delle omologie armoniche sia un sistema di generatori per il gruppo delle omografie non singolari.*

La risposta affermativa a tale quesito si poteva inferire dal noto teorema di S. Lie¹⁾: « Un gruppo (continuo) di omografie del piano lascia sempre fisso (almeno) un punto od una retta, fatta eccezione per il gruppo ∞^3 delle omografie che trasformano in sè una conica ».

Comunque ritengo non privo d'interesse, per il suo carattere costruttivo, il contenuto delle pagine seguenti, dove — assunto come modello del piano proiettivo complesso quello euclideo, ampliato con l'aggiunta degli elementi impropri e di quelli complessi — si dimostra il seguente:

LEMMA I: *Nel piano proiettivo complesso una omografia generale si può ottenere come prodotto di quattro omologie armoniche (al più).*

(*) Pervenuta in redazione il 14 Giugno 1961.

Indirizzo dell'A. Seminario matematico, Università, Padova.

¹⁾ Cfr. LIE S.: *Theorie der Transformationsgruppen*, III^{te} Abschnitt (Leipzig, Teubner, 1893), p. 94.

La scomposizione si può fare in più modi, come risulta dal seguito.

In una prima redazione di questo manoscritto avevo creduto opportuno premettere anche qualche riga per dimostrare che, com'è noto: « *Sulla retta proiettiva (complessa) ogni proiettività non singolare si può ottenere come prodotto di due involuzioni.* Mi sono accorto però che la dimostrazione di H. Wiener, riportata dal Bachmann ²⁾ è più semplice e più generale della mia, che perciò non ho qui riportato.

Tornando al piano, dal precedente Lemma risulta facilmente la risposta affermativa alla questione iniziale, col seguente

TEOREMA II: *Nel piano proiettivo complesso ogni omografia non singolare si può ottenere come prodotto di cinque omologie armoniche (al più).*

Basta perciò tener presenti le seguenti osservazioni:

A) *ogni omografia non singolare si può (in più modi) ottenere come prodotto di due omologie, una delle quali si può addirittura supporre armonica ³⁾.*

B) *ogni omologia speciale si può (in più modi) ottenere come prodotto di due omologie armoniche ⁴⁾.*

C) *una omologia non speciale è generale (cioè possiede tre punti uniti distinti e non allineati) e per essa vale dunque il Lemma I.*

* * *

D'altra parte ogni reciprocità piana non singolare si può ottenere come prodotto di un'arbitraria reciprocità fissa per una omografia variabile. Resta così anche provato che il gruppo di tutte le proiettività non singolari del piano proiettivo complesso

²⁾ Cfr. BACHMANN F.: *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff* (Berlin, Springer, 1959), p. 84.

³⁾ Cfr. ad es. COMESSATTI A.: *Lezioni di Geometria analitica e proiettiva*. P. II, (rist. 2ª ed., Padova, C.E.D.A.M., 1946), p. 212.

⁴⁾ Portandone, nel modello, l'asse all'infinito, ciò equivale a dire che ogni traslazione piana si può ottenere (in ∞^2 modi) come prodotto di due simmetrie puntuali o rispettivamente assiali.

ammette come sistema di generatori quello costituito da tutte le omologie armoniche e da una reciprocità (ad es. una polarità) fissata. Questo sistema non è però invariante. Lo diviene ad es. quando si atteggi il piano a « piano metrico » fissandovi una conica « assoluto » ω irriducibile e si considerino solo quelle proiettività non singolari che mutano in sé ω (« movimenti generalizzati », ove si riservi il nome di « movimenti » alle sole omografie).

Allora un sistema invariante di generatori involutori del gruppo dei movimenti generalizzati è quello costituito dalla « polarità assoluta » e dalle omologie armoniche (« simmetrie ») che mutano in sé ω , ossia aventi il centro O e l'asse o polari rispetto ad ω . In tal caso il gruppo dei movimenti (non generalizzati) è isomorfo a quello delle proiettività non degeneri di ω in sé, cosicché ogni movimento si può pensare come prodotto di *due* simmetrie, ed ogni movimento generalizzato come il prodotto di due simmetrie e della polarità assoluta.

* * *

Il piano proiettivo reale può pensarsi naturalmente immerso in quello complesso, ed una omologia reale ha reali tanto l'asse che il centro, cosicché, nel caso che essa sia speciale, vale ancora la osservazione *B*), essendo reali le due omologie armoniche fattori. Se invece l'omologia è non speciale, avendo (almeno) tre punti uniti reali distinti e non allineati, per essa vale il Lemma I, essendo reali (come risulta dalla dimostrazione del Lemma) le quattro omologie armoniche fattori.

Inoltre, poiché una omografia reale ha sempre almeno un punto unito reale, per essa vale la osservazione *A*), essendo reali le due omologie fattori.

Dunque: *il Teorema II vale anche nel piano proiettivo reale.*

1. - Siano date, nel piano proiettivo complesso due omologie armoniche $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$, di assi u_1, u_2 e centri rispettivi U_1, U_2 . Siano $o = U_1U_2$ la retta congiungente i centri, $V_1 = o \cdot u_1$, $V_2 = o \cdot u_2$

i punti d'intersezione di o con gli assi, e sia $O = u_1 \cdot u_2$ il punto comune agli assi (fig. 1).

Supponiamo Ω_1 ed Ω_2 in « posizione generale », e cioè che il punto O non appartenga ad o e che sia $U_1 \neq V_2 \neq V_1 \neq U_2 \neq U_1$.

Esistono allora e sono distinti i due punti I, J della retta complessa o che separano armonicamente tanto quelli U_1, V_1

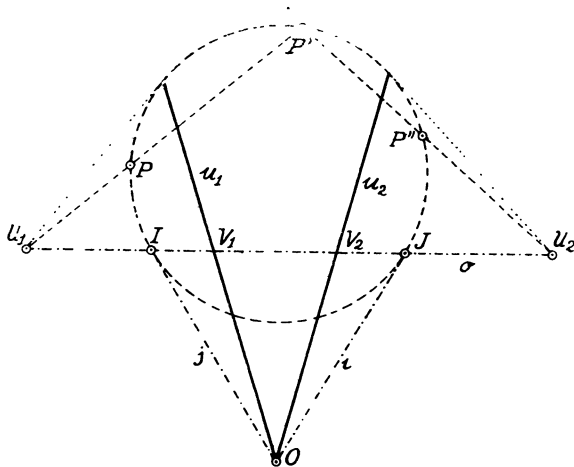


Fig. 1

quanto quelli U_2, V_2 . La coppia I, J appartiene tanto all'omologia Ω_1 che a quella Ω_2 ed è *reale* (iperbolica od ellittica) se Ω_1 ed Ω_2 sono reali.

Nella omografia ⁵⁾ $\Omega = \Omega_1\Omega_2$ i punti I, J ed O sono uniti. A meno di una trasformazione omografica si può supporre che la retta o coincida con la retta impropria ed I, J coincidano con i punti ciclici del piano ampliato complesso. Allora Ω_1 ed Ω_2 sono due simmetrie ortogonali, di assi u_1 ed u_2 ed il loro prodotto $\Omega = \Omega_1\Omega_2$ è una similitudine (diretta) di centro O , tale che le distanze di due punti corrispondenti P, P'' da O sono uguali,

⁵⁾ Con la scrittura $\Omega = \Omega_1\Omega_2$ intendiamo significare che si opera prima con la Ω_1 e poi con la Ω_2 . Ciò è comodo se si indica con $P\Omega_1$ il trasformato P' di P mediante la Ω_1 e con $P'\Omega_2 = P\Omega_1\Omega_2$ il trasformato P'' di P' con Ω_2 .

e dunque (fig. 2) una *rotazione* attorno ad O , di un angolo 2φ doppio di quello $\varphi = \widehat{u_1 u_2}$.

La Ω muta in sè ciascuno dei cerchi di centro O , ossia ognuna delle coniche del fascio schiera individuato dalla retta doppia o e dalla coppia di rette OI, OJ .

Viceversa, una rotazione di centro O ed ampiezza (e verso) assegnata φ si può in ∞^1 modi pensare ottenuta come prodotto

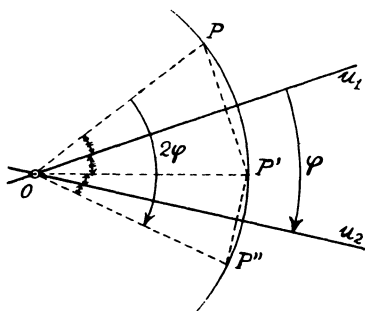


Fig. 2

di due simmetrie assiali ortogonali. Basti pensare che, fissatone il centro O e due qualsiasi punti corrispondenti P, P'' (che la determinano), si può assegnare ad arbitrio l'asse u_1 , restando quindi determinati P' e l'altro asse u_2 .

D'altra parte, la circostanza di avere uniti i punti ciclici I, J ed il punto proprio O e di trasformare in sè (uno non degenero, e quindi) ciascuno dei cerchi di centro O , caratterizza fra le omografie del piano ampliato complesso le rotazioni di centro O . Dunque:

« Nel piano proiettivo complesso ogni omografia Ω con tre punti uniti distinti e non allineati O, I, J che muti in sè (una irriducibile, e quindi) ciascuna delle coniche per I, J ed ivi tangenti alle rette OI, OJ si può in ∞^1 modi pensare come prodotto di due omologie armoniche Ω_1, Ω_2 , i cui assi u_1, u_2 passano per O ed i cui centri U_1, U_2 appartengono ad o . Posto $V_1 = o \cdot u_1, V_2 = o \cdot u_2$, le due coppie $U_1 V_1, U_2 V_2$ appartengono alla involuzione di punti doppi I, J . Se la Ω , il punto O e la coppia I, J sono reali, anche Ω_1 ed Ω_2 si possono scegliere reali.

2. - Sia ora Ω una omografia generale, con tre punti uniti distinti e non allineati A_1, A_2, A_3 e sia Σ_i il fascio-schiera delle coniche γ_i per A_k, A_l ed ivi tangenti alle rette $A_i A_k, A_i A_l$ ($i \neq k \neq l = 1, 2, 3$).

La Ω è individuata quando siano ulteriormente assegnati due suoi punti corrispondenti P, P' . Si osservi che tanto per P quanto per P' passano una ed una sola conica γ_i e rispettivamente γ'_i di ciascuno dei tre fasci Σ_i *).

Se una delle γ_i coincide con la γ'_i , allora Ω si può ottenere come prodotto di due omologie armoniche nel modo visto sopra, essendo ora $O = A_i, I, J = A_k, A_l$.

Altrimenti, si tenga presente che una γ_i ed una γ'_j ($i \neq j$) si tagliano (fuori di A_i ; $l \neq i, j$) in altri tre punti $\bar{P}_{ij}$. Si osservi che, se A_1, A_2, A_3, P, P' sono reali, è reale anche almeno uno dei punti $\bar{P}$ (fig. 3).

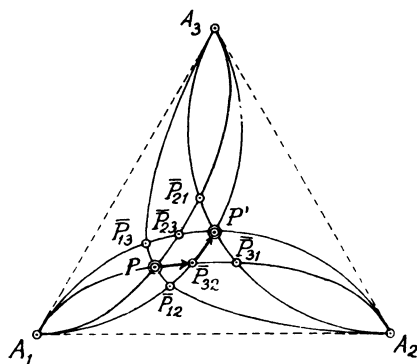


Fig. 3

La Ω si può pensare come il prodotto delle due omografie generali Ω' ed Ω'' con i punti uniti A_1, A_2, A_3 che portano rispettivamente P in $\bar{P}_{ij}$ e $\bar{P}_{ij}$ in P' , ognuna delle quali, per quanto

*) È altresì noto che le tre coniche γ_i per P hanno in comune altri due punti Q, R . Confronta E. MORGANTINI: *Su una relazione di armonia fra i triangoli del piano proiettivo complesso* (Annali Triestini, XXI (1951), Sez. 2*), n. 1.

precede, è scomponibile (in ∞^1 modi) nel prodotto di due omologie armoniche.

In definitiva: *la Ω si può scomporre nel prodotto di quattro omologie armoniche.*

Si tenga anche presente che, *se la Ω è reale e possiede tre punti uniti reali A_1, A_2, A_3 distinti e non allineati*, da quanto precede risulta che *la Ω è decomponibile nel prodotto di quattro omologie armoniche reali*. In particolare l'asserto sussiste anche quando P e P' sono allineati con uno dei tre punti A_i , ed allora la Ω è essa stessa una omologia (in generale non armonica) di centro A_i ed asse $A_k A_l$.