

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ARNO PREDONZAN

**Su una generalizzazione di una proprietà relativa
a ipersuperficie quadriche e cubiche**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 31 (1961), p. 357-373

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1961__31__357_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1961__31__357_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SU UNA GENERALIZZAZIONE
DI UNA PROPRIETÀ RELATIVA
A IPERSUPERFICIE QUADRICHE E CUBICHE

Nota (*) di ARNO PREDONZAN (a Padova)

1. - L'esistenza (eventuale) di mappe birazionali, o di mappe unirazionali suriettive, tra uno spazio proiettivo $P_{r-1}(K)$ e la generica ipersuperficie V , dell'ordine n , di uno spazio proiettivo $P_r(K)$, (K corpo algebricamente chiuso di caratteristica zero), non permane, in generale, in corrispondenza a tutte le *specializzazioni* di V , anche limitatamente a quelle che danno luogo a ipersuperficie assolutamente irriducibili.

Così, ad es., se $n = 3$, $r = 3$, ogni k -superficie cubica assoluta V di $P_3(K)$, (k sottocorpo di K), è birazionale su un sopra-corpo algebrico k^* di k , a meno che V non sia un cono non birazionale (e perciò di genere uno). Questa proprietà si trasporta facilmente al caso $n = 3$, $r \geq 4$, appena al concetto di birazionalità si sostituisca quello più ampio di unirazionalità¹⁾, e quindi

(*) Pervenuta in Redazione il 5 luglio 1961.

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

¹⁾ Se infatti V è una k -ipersuperficie cubica non singolare, ed l una sua retta (necessariamente priva di punti singolari), l'unirazionalità di V su $k(l)$ è, ad es., provata in A. PREDONZAN, *Alcuni teoremi relativi all'unirazionalità di ipersuperficie algebriche non generali*, Rend. Sem. Mat. di Padova, (1961). Se invece V contiene un punto y di molteplicità due, essa risulta ovviamente birazionale su $k(y)$, e quindi unirazionale. Infine se y ha molteplicità tre su V , la V stessa è un cono che, se non unirazionale, deve proiettare da uno spazio P_{r-3} una cubica piana di ge-

ci si limiti a verificare l'esistenza di mappe unirazionali suriettive del tipo suddetto, anzichè di mappe birazionali.

Tenuto anche conto della nota birazionalità (e quindi unirazionalità) di ogni quadrica assolutamente irriducibile di $P_r(K)$, ($r \geq 2$), si può dunque affermare che: « Ogni k -ipersuperficie assoluta di $P_r(K)$, dell'ordine $n = 2$ o $n = 3$, che non sia un cono non unirazionale, (caso questo possibile solo per $n = 3$), è unirazionale su un sopracorpo algebrico k^* di k appena sia, rispettivamente nei due casi, $r \geq 2$ od $r \geq 3$ ».

Si presenta allora spontaneo il problema di vedere se, estendendo la nozione di cono in quella (comprendente la prima) di varietà *luogo d'un sistema semplice di spazi*²⁾, si possa determinare, in corrispondenza ad n , un intero positivo $r(n)$ in guisa che valga la seguente proposizione:

I) Ogni k -ipersuperficie assoluta di $P_r(K)$, dell'ordine n , che non sia luogo d'un sistema semplice, non unirazionale di spazi, risulta unirazionale su un sopracorpo algebrico k^* di k , appena sia $r \geq r(n)$.

In quest'ordine d'idee l'A. è giunto a provare il seguente

TEOREMA: *Ogni ipersuperficie algebrica assoluta V del quarto ordine di uno spazio proiettivo $P_r(K)$, definita su un qualunque sottocorpo k di K , che non sia luogo di un sistema semplice, non unirazionale di spazi, è unirazionale su un sopracorpo algebrico k^* di k appena sia $r \geq 7$ ³⁾.*

nere uno: infatti se il vertice del cono fosse uno spazio P_s , di dimensione $s \leq r - 4$, uno spazio P_{r-s-1} , ($r - s - 1 \geq 3$), sghembo con P_s , segherebbe V in un'ipersuperficie cubica V' non cono, e perciò, per quanto precede, unirazionale (o, in particolare, birazionale), donde l'unirazionalità di V , in contrasto con quanto supposto.

²⁾ Una k -varietà d -dimensionale V dicesi « luogo di un sistema semplice di spazi » se contiene un sistema $\{P_m\}$ di spazi lineari m -dimensionali P_m , ($1 \leq m \leq d - 1$), il quale sia definito su un sopracorpo algebrico k_1 di k , (eventualmente $k_1 = k$), abbia dimensione $d - m$, e sia di indice 1, (cioè per un punto generico di V su k_1 passi uno ed un solo P_m di $\{P_m\}$).

³⁾ L'unirazionalità dell'ipersuperficie algebrica generale del quarto ordine è stata provata, per $r \geq 7$, da U. MORIN in Rend. Acc. Naz. dei Lincei, (1936).

Per giungere a questo risultato si poggia sulla considerazione di una sottovarietà lineare bidimensionale π di V , il che, per $r \geq 7$, è sempre possibile ⁴⁾.

La successiva trattazione è suddivisa in tre paragrafi. Nel § 1 vengono stabilite alcune proposizioni preliminari. Nei §§ 2, 3 vengono invece studiati separatamente i due casi $m(\pi; V) = 1$, $m(\pi; V) \geq 2$ ⁵⁾.

Si potrà nel seguito sempre escludere che V sia luogo di un sistema semplice $\{P_m\}$ di spazi P_m , ($1 \leq m \leq r-2$), perché nel caso che $\{P_m\}$ sia unirazionale la proposizione i_7) del n. 7 assicurerà subito l'unirazionalità di V .

§ 1. - Proposizioni preliminari

2. - Sia V un'ipersuperficie algebrica assolutamente irriducibile, del quarto ordine, di $P_r(K)$, ($r \geq 7$), definita su un sottocorpo k del corpo K algebricamente chiuso e di caratteristica zero, e sia π una sua sottovarietà lineare bidimensionale (piano).

Detto k_1 il minimo sopracorpo algebrico di k che comprende quello di definizione di π , operiamo su $P_r(K)$ una trasformazione di coordinate proiettive, definita su k_1 , che muti l'ideale di π in quello $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_{k_1}(\pi) = (X_3, X_4, \dots, X_r)$. In virtù di tale trasformazione l'equazione di V [cioè la base del relativo ideale] può scriversi nella forma:

$$(1) \quad \sum_{i=3}^r X_i f_i^{(3)}(X_0, X_1, X_2) + \sum_{i,j=3}^r X_i X_j f_{ij}^{(2)}(X_0, X_1, X_2) + \\ + g(X_0, X_1, \dots, X_r), \quad (f_i^{(2)} = f_{ij}^{(2)}),$$

dove $f_i^{(3)}$ ed $f_{ij}^{(2)}$ sono, rispettivamente, polinomi (omogenei) dei gradi tre e due dell'anello $k_1[X_0, X_1, X_2]$, mentre g è polinomio

⁴⁾ È noto che per $r \geq 7$ ogni ipersuperficie algebrica del quarto ordine di $P_r(K)$ contiene qualche piano; ved. A. PREDONZAN, loc. cit. in ¹⁾, n. 5.

⁵⁾ Con $m(U; V)$ si indica — come di consueto — la molteplicità su V di una sottovarietà U di V .

(omogeneo) di grado quattro dell'anello $k_1[X_0, X_1, \dots, X_r]$, ciascun termine del quale è almeno del terzo grado nel complesso delle indeterminate $X_3, X_4, \dots, X_r$.

Cominciamo col verificare che:

$i_1)$ $m(\pi; V) = 1$ se, e solo se, i polinomi $f_i^{(3)}$ non sono tutti nulli; mentre $m(\pi; V) = 2$ se, e solo se, sono nulli tutti gli $f_i^{(3)}$, ma non così gli $f_{ij}^{(3)}$.

Ciò può, ad es., vedersi determinando l'intersezione-prodotto $V \cdot P_3$ di V con uno spazio proiettivo P_3 , generico su k_1 nel sistema $\{P_3\}$ costituito dagli spazi tridimensionali di $P_r(K)$ uscenti da π . Detto infatti $x = (0, 0, 0, x_3, \dots, x_r)$ un punto, generico su k_1 , dello spazio P_{r-3} , complementare di π , definito da $\mathfrak{S}\mathfrak{P}_{k_1}(P_{r-3}) = (X_0, X_1, X_2)$, le equazioni di un P_3 del tipo suddetto possono scriversi:

$$(2) \quad x_3 X_i - x_i X_3, \quad (i = 4, 5, \dots, r);$$

ne viene che $V \cdot P_3$ può rappresentarsi mediante le (2) e la:

$$(3) \quad X_3 \left[x_3^3 \sum_{i=3}^r x_i f_i^{(3)}(X_0, X_1, X_2) + X_3 x_3^2 \sum_{i,j=3}^r x_i x_j f_{ij}^{(3)}(X_0, X_1, X_2) + \right. \\ \left. + X_3^2 h(X_0, \dots, X_3; x_3, \dots, x_r) \right],$$

essendo h un polinomio (omogeneo) del primo grado nelle $X_0, \dots, X_3$ (e di quarto grado nelle $x_3, \dots, x_r$) dell'anello $k_1[x_3, \dots, x_r]$ $[X_0, \dots, X_3]$. Il fatto che la (3) contenga X_3 come fattore semplice se, e solo se, non tutte le $f_i^{(3)}$ sono nulle, mentre la stessa (3) contiene X_3 come fattore doppio se, e solo se, sono nulle tutte le $f_i^{(3)}$, ma non le $f_{ij}^{(3)}$, ci permette di concludere come enunciato in $i_1)$.

3. - Se $m(\pi; V) = 1$, il ciclo omogeneo bidimensionale del terzo ordine $F^{(3)} = V \cdot P_3 - \pi$ è positivo e non ha π come componente: esso è elemento generico su k_1 di un sistema $\{F^{(3)}\}$ di dimensione $r - 3$, birazionale su k_1 , e determina su π il divisore positivo (unidimensionale) del terzo ordine $C^{(3)} = F^{(3)} \cdot \pi$, rap-

presentato dalle equazioni di π e dalla

$$(4) \quad \sum_{i=3}^r x_i f_i^{(3)}(X_0, X_1, X_2).$$

La (4) ci assicura che $C^{(3)}$ è elemento generico su k_1 di un sistema lineare $\{C^{(3)}\}$, la cui dimensione può anche essere nulla.

Se invece $m(\pi; V) = 2$, risulta positivo il ciclo omogeneo bidimensionale del secondo ordine $F^{(2)} = V \cdot P_3 - 2\pi$, e non ha π come componente: esso è elemento generico su k_1 di un sistema $\{F^{(2)}\}$ di dimensione $r - 3$, birazionale su k_1 , e determina su π il divisore positivo (unidimensionale) del secondo ordine $C^{(2)} = F^{(2)} \cdot \pi$, rappresentato dalle equazioni di π e dalla:

$$(5) \quad \sum_{i,j=3}^r x_i x_j f_{ij}^{(2)}(X_0, X_1, X_2).$$

Dalla (5) deriva che $C^{(2)}$ è elemento generico su k_1 di un sistema non lineare $\{C^{(2)}\}$, la cui dimensione può essere anche nulla.

È facile constatare che:

i₂) Se $\dim(\{C^{(3)}\}) = 0$ nel caso $m(\pi; V) = 1$, oppure $\dim(\{C^{(2)}\}) = 0$ in quello $m(\pi; V) = 2$, si ha $m(|C^{(3)}|; V) \geq 2$, o, rispettivamente, $m(|C^{(2)}|; V) \geq 3$ *).

Infatti, nelle ipotesi poste, risulta, rispettivamente nei due casi, $i(y; p \cdot F^{(3)}) \geq 1$, oppure $i(y; p \cdot F^{(2)}) \geq 1$, e quindi $i(y; p \cdot V) \geq 2$, o $i(y; p \cdot V) \geq 3$, essendo y un punto di $C^{(3)}$ o $C^{(2)}$ comunque prefissato, e p una retta per y generica in P_3 su $k_1(P_3, y)$, e quindi generica su $k_1(y)$ in $P_r(K)$ tra quelle uscenti da y ⁷⁾.

4. - Detto $y = (y_0, y_1, y_2, 0, \dots, 0)$ un punto di π generico su k_1 , l'equazione dell'iperpiano polare $\Delta_y^{(1)}$ [se $m(\pi; V) = 1$] e quella della quadrica polare $\Delta_y^{(2)}$ [se $m(\pi; V) \leq 2$] di y rispetto

* Se $\mathfrak{N}$ è un ciclo di uno spazio proiettivo, con $|\mathfrak{N}|$, o con $\text{Supp}(\mathfrak{N})$ viene indicato il relativo supporto.

⁷⁾ Con $i(D; V \cdot W)$ si denota la molteplicità d'intersezione di due varietà V, W in una loro comune sottovarietà D .

a V , possono scriversi, rispettivamente, nella forma:

$$(6) \quad \sum_{i=3}^r X_i f_i^{(3)}(y_0, y_1, y_2),$$

$$(7) \quad \sum_{h=0}^2 X_h \sum_{i=3}^r X_i \frac{\partial f_i^{(3)}(y_0, y_1, y_2)}{\partial y_h} + \sum_{i,j=3}^r X_i X_j f_{ij}^{(3)}(y_0, y_1, y_2).$$

Dalla (6) — tenuto conto che y è punto generico di π su k_1 , e quindi y_0, y_1, y_2 sono trascendenti su k_1 ed algebricamente indipendenti — deriva che affinché $\Delta_y^{(1)}$ sia indipendente da y occorre e basta che:

$$(8) \quad f_3^{(3)} = \lambda_i f_i^{(3)}, \quad (\lambda_i \in k_1; i = 3, 4, \dots, r),$$

dove si è supposto, senza restrizione, $f_3^{(3)} \neq 0$.

Poichè la (8) equivale alla 0-dimensionalità del sistema lineare $\{C^{(3)}\}$, si può affermare — tenuto anche conto della i_2 del n. 3 — che:

i_3) Se $m(\pi; V) = 1$, l'iperpiano polare $\Delta_y^{(1)}$ rispetto a V di un punto y di π , generico su k_1 , è indipendente da y (cioè non varia in corrispondenza alle specializzazioni di y in cui resta definito) se, e solo se, $\dim(\{C^{(3)}\}) = 0$, il che comporta $m(|C^{(3)}|; V) \geq 2$.

Dalla (7) — e con analoghe considerazioni — deriva invece che affinchè $\Delta_y^{(2)}$ sia indipendente da y occorre e basta, rispettivamente nei due casi $m(\pi; V) = 2$ ed $m(\pi; V) = 1$, che si abbia:

$$(9) \quad f_{33}^{(2)} = \mu_{ij} f_{ij}^{(2)}, \quad (\mu_{ij} \in k_1; i, j = 3, 4, \dots, r),$$

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\partial f_3^{(2)}}{\partial X_0} = \nu_{ih} \frac{\partial f_i^{(2)}}{\partial X_h} = \mu_{ij} f_{ij}^{(2)}, \\ (\nu_{ih}, \mu_{ij} \in k_1; h = 0, 1, 2; i, l, j = 3, 4, \dots, r), \end{cases}$$

avendo supposto, senza restrizione, $f_{33}^{(2)} \neq 0$ nella (9), e $\frac{\partial f_3^{(2)}}{\partial X_0} \neq 0$ nella (10) ^{a)}.

^{a)} Si noti che non essendo nulle, nel caso $m(\pi; V) = 1$, tutte le $f_i^{(2)}$,

Nel caso $m(\pi; V) = 2$, la (9) equivale alla 0-dimensionalità del sistema $\{C^{(2)}\}$.

Se invece $m(\pi; V) = 1$, indicato con $D^{(2)}$ il divisore del secondo ordine di π rappresentato da $\frac{\partial f_i^{(3)}}{\partial X_0}$, la (10) comporta che sia:

$$(11) \quad m(|D^{(2)}|; V) \geq 3^9).$$

Dalla (11) deriva che la generica $F^{(3)}$ di $\{F^{(3)}\}$ su k_1 deve contenere $|D^{(2)}|$ e deve inoltre risultare $m(|D^{(2)}|; F^{(3)}) \geq 2$. Ne viene che $D^{(2)}$ deve essere dotato di una sola componente rettilinea l di molteplicità due, ($D^{(2)} = 2l$), perché altrimenti $F^{(3)}$ verrebbe ad avere π come componente, il che comporterebbe $m(\pi; V) > 1$, in contrasto con l'ipotesi iniziale.

Da $D^{(2)} = 2l$ discende $|D^{(2)}| = l$ e perciò la $m(|D^{(2)}|; F^{(3)}) \geq 2$ può scriversi $m(l; F^{(3)}) \geq 2$. Quest'ultima comporta che l sia componente di molteplicità ≥ 2 per $C^{(3)}$; ed è facile vedere che non può verificarsi il caso dell'uguaglianza essendo questo incompatibile con la prima uguaglianza indicata in (10). Dunque $C^{(3)} = 3l$, e perciò $\dim \{C^{(3)}\} = 0$.

Tenuto conto di quest'ultima proposizione e della (11) — che ora può scriversi $m(l; V) \geq 3$ — e ricordando quanto in precedenza ottenuto in relazione al caso $m(\pi; V) = 2$, si può concludere — anche a norma della i_2) del n. 3 — che:

i_4) Se $m(\pi; V) = 1$, affinché la quadrica polare $\Delta_y^{(2)}$ rispetto a V di un punto y di π , generico su k_1 , sia indipendente da y (cioè non vari in corrispondenza alle specializzazioni di y in cui resta definita) deve risultare necessariamente $\dim \{C^{(3)}\} = 0$ e $C^{(3)}$ deve avere una componente rettilinea l di molteplicità tre ($C^{(3)} = 3l$) per la quale sia $m(l; V) \geq 3$.

non possono essere nulle tutte le $\frac{\partial f_i^{(3)}}{\partial X_h}$, ($h = 0, 1, 2; i = 3, 4, \dots, r$).

⁹⁾ Ciò consegue dal fatto che le derivate seconde della (1) rispetto alle X_s , ($s = 0, 1, \dots, r$), si annullano in tutti e soli quei punti di π che sono zeri contemporanei di $\frac{\partial f_i^{(3)}}{\partial X_h}$ e di $f_{ij}^{(2)}$, ($h = 0, 1, 2; i, j = 3, 4, \dots, r$).

Se invece $m(\pi; V) = 2$, perchè $\Delta_y^{(2)}$ sia indipendente da y occorre e basta che $\dim(\{C^{(2)}\}) = 0$, il che comporta $m(C^{(2)}; V) \geq 3$.

5. — Supporremo, in questo n.:

$$(12) \quad m(\pi; V) = 1, \quad \dim(\{C^{(3)}\}) \geq 1.$$

Sia ancora y un punto di π generico su k_1 , e siano $\Delta_y^{(1)}$ e $\Delta_y^{(2)}$ i relativi iperpiano e quadrica polari rispetto a V .

Verifichiamo che, nelle ipotesi (12), risulta $\Delta_y^{(1)} \not\subset \Delta_y^{(2)}$. A tale scopo consideriamo uno spazio tridimensionale P_3 generico su $k_1(y)$ tra quelli di $\Delta_y^{(1)}$ che contengono π : tale P_3 — a norma della i_3) del n. 4 che garantisce la variabilità di $\Delta_y^{(1)}$ con y — è anche generico su k_1 tra quelli di $P_r(K)$ che passano per π , e quindi, (usando le notazioni del n. 3), sono generiche su k_1 le relative $F^{(3)}$ e $C^{(3)}$.

Facciamo ora l'ipotesi assurda $\Delta_y^{(1)} \subset \Delta_y^{(2)}$. Questa comporta $P_3 \subset \Delta_y^{(1)} \cdot \Delta_y^{(2)}$, e perciò — per note proprietà sulle ipersuperficie polari — $i(y; V \cdot p) \geq 3$, essendo p una qualunque retta di P_3 uscente da y e non situata su V . Ne segue $m(y; F^{(3)}) \geq 2$, e perciò $m(y; C^{(3)}) \geq 2$, il che è assurdo non potendo — a norma di un classico teorema di Bertini — la $C^{(3)}$ generica su k_1 del sistema lineare $\{C^{(3)}\}$ avere un punto multiplo in un punto y di π , pure generico su k_1 . Si conclude che $\Delta_y^{(1)} \not\subset \Delta_y^{(2)}$, e perciò $H_y = \Delta_y^{(1)} \cdot \Delta_y^{(2)}$ è un cono quadrico $(r-2)$ -dimensionale di vertice y (o un sopraspazio di y), definito su $k_1(y)$.

Dalle i_3), i_4) e dalle (6), (7) segue che per un punto generico di V su k_1 passa almeno un elemento del sistema $\{H_y\}$, luogo su k_1 di H_y . Ciò permette di affermare che un punto x generico su $k_1(y)$ di $V \cdot H_y$ è anche generico di V su k_1 .

Da quest'ultima constatazione segue facilmente che $m(\pi; H_y) = 1$ e $H_y \not\subset V$. Se infatti fosse $m(\pi; H_y) = 2$, oppure $H_y \subset V$, il $P_3 = (\pi, x)$ apparterrebbe ad H_y , oppure la $F^{(3)} = V \cdot P_3 - \pi$ avrebbe come componente il piano $H_y \cdot P_3 - \pi = \Delta_y^{(2)} \cdot \Delta_y^{(1)} \cdot P_3 - \pi = \Delta_y^{(2)} \cdot P_3 - \pi$ passante per x , e sarebbe perciò riducibile in piani. Nel primo caso si avrebbe $i(y; V \cdot p) \geq 3$ per

ogni retta p di P_3 uscente da y e non situata su V ; e ciò — tenuto conto che la constata genericità del punto x di V su k_1 assicura quella su k_1 dello spazio P_3 nel sistema di quelli di $P_r(K)$ che passano per π — appare assurdo con un'argomentazione analoga a quella del quarto capoverso di questo n. Nel secondo caso invece V sarebbe luogo d'un sistema semplice di spazi, il che è stato escluso nell'ultimo comma del n. 1.

Dalla ora provata $H_v \not\subset V$, segue che la generatrice $g = (y, x)$ di H_v , generica su $k_1(y)$, non è situata su V , e perciò $i(y; V \cdot g) = 3$. Si può pertanto concludere che:

i₅) Nelle ipotesi (12), la $k_1(y)$ -varietà $H_v = \Delta_v^{(1)} \cdot \Delta_v^{(2)}$, relativa al generico punto y di π su k_1 , è un cono quadrico $(r-2)$ -dimensionale di vertice y (o un sopraspazio di y), e tale che $m(\pi; H_v) = 1$; inoltre per una generica generatrice g (per y) di H_v su $k_1(y)$ si ha $i(y; V \cdot g) = 3$. Infine per un punto generico x di V su k_1 passa almeno un elemento del sistema $\{H_v\}$ luogo di H_v su k_1 .

6. - Mettiamoci ora nelle seguenti ipotesi:

$$(13) \quad m(\pi; V) = 2, \quad \dim(\{C^{(2)}\}) \geq 1.$$

Un punto generico y di π su k_1 determina la relativa quadrica polare $\Delta_v^{(2)}$ rispetto a V , la cui equazione, dedotta dalla (7) tenendo conto della i_1 del n. 2, può scriversi nella forma:

$$(14) \quad \sum_{i,j=3}^r X_i X_j f_{ij}^{(2)}(y_0, y_1, y_2),$$

e perciò $\Delta_v^{(2)}$ è un cono quadrico di vertice π (o un sopraspazio di π), definito su $k_1(y)$.

A norma della i_4 del n. 4 e delle (13), $\Delta_v^{(2)}$ varia in corrispondenza alle specializzazioni di y su k_1 ; ciò assicura la possibilità di poter fissare su π una k_1 -retta l tale che il sistema $\{\Delta_v^{(2)}\}$, ottenuto in corrispondenza alle specializzazioni su k_1 del punto y di l generico su k_1 , abbia dimensione uno. Ne viene che per un punto generico di V su k_1 passa almeno un elemento di $\{\Delta_v^{(2)}\}$, dal che consegue che un punto generico x di $V \cdot \Delta_v^{(2)}$ su $k_1(y)$ è

anche punto generico di V su k_1 . La generatrice $g = (y, x)$ di $\Delta_y^{(2)}$, generica su $k_1(y)$, non risulta situata su V (perchè ciò comporterebbe $\Delta_y^{(2)} \subset V$), il che ci permette di affermare che $i(y; V \cdot g) = 3$. Concludendo:

i₆) Nelle ipotesi (13) è sempre possibile fissare su π una k_1 -retta l tale che per un punto generico x di V su k_1 passi almeno un elemento del sistema $\{\Delta_y^{(2)}\}$, luogo su k_1 del cono quadrico $\Delta_y^{(2)}$ relativo ad un punto generico y di l su k_1 . Inoltre per una generica generatrice g (per y) di $\Delta_y^{(2)}$ su $k_1(y)$ risulta $i(y; V \cdot g) = 3$.

7. - Ci proponiamo qui di verificare la seguente condizione di unirazionalità ¹⁰⁾:

i₇) Sia V_d una k -varietà algebrica d -dimensionale di $P_r(K)$, e sia $\{W_m\}$ un insieme algebrico, di dimensione $d - m$ e d'indice $v \geq 1$, di sottovarietà m -dimensionali W_m di V_d , che sia unirazionale su un sopracorpo k_1 di k , e quindi tale che la generica W_m di $\{W_m\}$ su k_1 appartenga ad un corpo $k_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{d-m})$ estensione trascendente pura di grado $d - m$ di k_1 . Se allora W_m è unirazionale su $k_1^(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{d-m})$, con k_1^* sopracorpo algebrico di k_1 , di conseguenza V_d è unirazionale su k_1^* .*

Poiché infatti W_m è unirazionale su $k_1^*(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{d-m})$ ed ha dimensione m , un suo punto generico x su $k_1^*(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{d-m})$ ha coordinate x_i , ($i = 0, 1, \dots, r$), esprimibili mediante elementi di un corpo $k_1^*(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{d-m})(\xi_{d-m+1}, \dots, \xi_d)$ estensione trascendente pura, di grado m , di $k_1^*(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{d-m})$; cioè le x_i sono elementi del corpo $k_1^*(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d)$ od anche (dopo un'opportuna riduzione a forma intera) polinomi φ_i dell'anello $k_1^*[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d]$:

$$(15) \quad x_i = \varphi_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d), \quad (i = 0, 1, \dots, r).$$

Le (15) che, per quanto precede, rappresentano un punto generico di W_m su $k_1^*(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{d-m})$, rappresentano anche —

¹⁰⁾ Cfr., a tal proposito, L. ROTH, *Algebraic threefolds*, Ergebnisse der Mathematik, Berlin-Springer, (1955), pag. 43.

poiché $\{W_m\}$ è d'indice $\nu \geq 1$, (cioè per un punto generico di V_d su k_1^* passano $\nu \geq 1$ elementi di $\{W_m\}$) — un punto generico di V_d su k_1^* . Tanto basta per concludere che V_d è unirazionale su k_1^* ; ed i punti di V_d si ottengono dalle (15) attraverso le specializzazioni (generalizzate) delle $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d$ su k_1^* .

§ 2. — Il caso $m(\pi; V) = 1$

8. — Supporremo in tutto questo paragrafo $m(\pi; V) = 1$. Considereremo inoltre separatamente le due eventualità: $\dim \{C^{(3)}\} \geq 1$, $\dim \{C^{(3)}\} = 0$, (n. 3).

A) $\dim \{C^{(3)}\} \geq 1$: Sia y un punto generico di π su k_1 ed H_v il relativo cono $(r-2)$ -dimensionale del sistema $\{H_v\}$, (n. 5). Fissato opportunamente in $P_r(K)$ un k_1 -iperpiano P_{r-1} , si consideri la quadrica $(r-3)$ -dimensionale, definita su $k_1(y)$, $Q_v = H_v \cdot P_{r-1}$. Poichè — a norma della i_s del n. 5 — $m(\pi; H_v) = 1$, si può fissare su π un k_1 -punto $\bar{y}$ in guisa che la generatrice $\bar{g} = (y, \bar{y})$ di H_v sia semplice, e perciò risulti semplice per Q_v il punto $\bar{z} = \bar{g} \cap P_{r-1}$. Poichè $\bar{z}$ appartiene ovviamente a $k_1(y)$, la Q_v , se irriducibile, risulta notoriamente birazionale sul suo corpo $k_1(y)$ di definizione ¹¹⁾.

Consideriamo ora la $k_1(y)$ -varietà $\Omega_v = V \cdot H_v$. Poichè, per la i_s , $H_v \not\subset V$, la Ω_v ha dimensione $r-3$. Inoltre Ω_v è in corrispondenza birazionale su $k_1(y)$ con Q_v , e perciò Ω_v è birazionale su $k_1(y)$: infatti un generico x di Ω_v su $k_1(y)$ determina univocamente la generatrice $g = (y, x)$ di H_v , la quale individua il punto $z = g \cap P_{r-1}$ di Q_v , e viceversa tale z è determinato solo da x in quanto, sempre per la i_s , risulta $i(y; V \cdot g) = 3$.

Il sistema $\{\Omega_v\}$, luogo di Ω_v su k_1 , è chiaramente unirazionale su k_1 , e per un punto generico x di V su k_1 passa, in virtù

¹¹⁾ Nell'eventualità che Q_v sia riducibile, si può ancora applicare (con ovvie modifiche) il procedimento poi seguito, in quanto la conoscenza su Q_v di un suo $k_1(y)$ -punto semplice permette di sostituire a Q_v una delle sue due componenti, entrambe determinabili razionalmente su $k_1(y)$.

ancora della i_5), almeno un elemento di $\{\Omega_v\}$, cioè $\{\Omega_v\}$ è d'indice (ovviamente finito) $v \geq 1$. Tanto basta per concludere — a norma della condizione i_7) del n. 7 — con l'unirazionalità di V su k_1 .

9. — Sempre nell'ipotesi $m(\pi; V) = 1$, consideriamo ora l'eventualità:

B) $\dim \{C^{(3)}\} = 0$: In questo caso il sistema $\{C^{(3)}\}$ ha un unico elemento $C^{(3)}$, il quale è il ciclo sezione di π con la generica $F^{(3)}$ di $\{F^{(3)}\}$ su k_1 , (n. 3). Inoltre, per la i_2) del n. 3, si ha $m(|C^{(3)}|; V) \geq 2$.

Poiché il sistema $\{F^{(3)}\}$ è birazionale su k_1 ed ha dimensione $r - 3$, la generica $F^{(3)}$ appartiene ad un corpo $k_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{r-3})$ estensione trascendente pura di grado $r - 3$ di k_1 .

Distingueremo nel seguito due sottocasi a seconda che $C^{(3)}$ sia una cubica assolutamente irriducibile, oppure abbia (in un sopracorpo algebrico di k_1) una (o più) componenti rettilinee¹²⁾.

b₁) Se $C^{(3)}$ è assolutamente irriducibile, tale risulta anche la generica $F^{(3)}$ di $\{F^{(3)}\}$ su k_1 . Escluderemo che quest'ultima sia rigata (in particolare cono) perché ciò comporterebbe che V sia luogo di un sistema semplice di spazi, il che si può escludere per l'ultimo comma del n. 1.

Detto y un punto generico di $C^{(3)}$ su k_1 ed ω_y il piano tangente ad $F^{(3)}$ in y , si consideri il ciclo $E_y = F^{(3)} \cdot \omega_y$. Poiché $F^{(3)}$ non è rigata, E_y è una cubica assolutamente irriducibile che ha y come punto doppio. Fissata ora una opportuna specializzazione $\bar{y}$ di y che appartenga ad un sopracorpo algebrico $\bar{k}_1$ di k_1 ¹³⁾, e considerato il piano tangente $\omega_{\bar{y}}$ ad $F^{(3)}$ in $\bar{y}$, la cubica assolutamente irriducibile $E_{\bar{y}} = F^{(3)} \cdot \omega_{\bar{y}}$, definita su $\bar{k}_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{r-3})$, ha un punto doppio in $\bar{y}$ ed è perciò birazionale su $\bar{k}_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{r-3})$. I piani tangenti ad $F^{(3)}$ nei punti di $E_{\bar{y}}$ segano $F^{(3)}$ in un sistema, unirazionale su $\bar{k}_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{r-3})$, di cubiche con un punto doppio e perciò birazionali sul loro corpo di definizione. Ne viene — a

¹²⁾ Si noti che se $C^{(3)}$ ha come componenti una retta ed una conica, entrambe debbono appartenere a k_1 . Se invece le componenti sono tutte lineari, una almeno di queste deve appartenere a k_1 .

¹³⁾ Un tale $\bar{k}_1$ può ottenersi da k_1 con l'aggiunzione tutt'al più di una radice quadrata e una cubica.

norma della i_7) del n. 7 — che $F^{(3)}$ è unirazionale su $\bar{k}_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{r-3})$, e perciò — sempre per la stessa i_7) — è unirazionale la V su $\bar{k}_1$.

b_2) Qui supporremo che $C^{(3)}$ sia riducibile, e quindi abbia in k_1 almeno una componente rettilinea l . Questa deve risultare necessariamente semplice per $F^{(3)}$, perché se fosse $m(l; F^{(3)}) \geq 2$ la $F^{(3)}$ sarebbe rigata (in particolare cono razionale di vertice su l) oppure si spezzerebbe in tre piani (due almeno dei quali per l), il che comporterebbe che V sia luogo di un sistema semplice di spazi, il che escludiamo dalle nostre attuali considerazioni. Inoltre, sempre per la medesima ragione, nessun punto di l può essere triplo per $F^{(3)}$ perché, in tale caso, $F^{(3)}$ sarebbe un cono.

Nell'ipotesi che l sia *totalmente non singolare* su $F^{(3)}$, (cioè se ogni punto di l è semplice per $F^{(3)}$), la $F^{(3)}$ stessa è unirazionale su $k_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{r-3})$ ¹⁴⁾, e perciò — per la i_7) del n. 7 — V è unirazionale su k_1 .

Ad analoga conclusione si può giungere qualora $F^{(3)}$ abbia su l un solo punto doppio y' , eventualmente variabile in corrispondenza alle specializzazioni di $F^{(3)}$ su k_1 ; oppure due punti doppi y' , y'' , uno almeno dei quali, ad es. y' , non variabile con $F^{(3)}$. Infatti allora y' deve necessariamente appartenere a $k_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{r-3})$ o ad un'estensione quadratica $\bar{k}_1$ di k_1 , e perciò $F^{(3)}$ è birazionale su $k_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{r-3})$ o su $\bar{k}_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{r-3})$, e quindi V è unirazionale (anzi in questo caso birazionale) su k_1 o su $\bar{k}_1$. Più semplicemente ancora, nell'eventualità sopra considerata che y' non vari in corrispondenza alle specializzazioni di $F^{(3)}$ su k_1 , si ha $m(y'; V) = 3$, donde l'immediata birazionalità di V .

Resta da considerare il caso che $F^{(3)}$ abbia su l due punti doppi distinti y' , y'' , entrambi variabili in corrispondenza alle specializzazioni di $F^{(3)}$ su k_1 . Ciò comporta che si abbia $C^{(3)} = 2l + l_1$, con l_1 componente lineare di $C^{(3)}$ (eventualmente coincidente con l): l è perciò retta stazionaria per $F^{(3)}$, e π è il relativo piano tangente stazionario (cioè tangente ad $F^{(3)}$ in ogni punto di l)¹⁵⁾.

¹⁴⁾ Ved. A. PREDONZAN, loc. cit. in ¹⁾.

¹⁵⁾ Ved., a tal proposito, A. PREDONZAN, *Una nuova caratterizzazione delle rigate cubiche, ecc.*, Rend. Sem. Mat. di Padova, (1960).

Qualora l_1 sia distinta da l , ed appena si osservi ch'essa non può passare né per y' , né per y'' in quanto retta fissa, mentre y' , y'' variano con $F^{(3)}$, si ha che sulla l_1 stessa non possono giacere ovviamente punti doppi per $F^{(3)}$, perché se ne esistesse uno, y_1 , esso dovrebbe appartenere ad l , e perciò si avrebbe $m(l; F^{(3)}) = 2$. La retta l_1 , che appartiene necessariamente al corpo k_1 , è dunque totalmente non singolare su $F^{(3)}$, donde l'unirazionalità di $F^{(3)}$ su $k_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{r-3})$, e quindi quella di V su k_1 .

Se infine $l_1 = l$, cioè se $C^{(3)} = 3l$, si consideri un punto generico y di l su k_1 e si dica $\{\Delta_y^{(2)}\}$ il luogo su k_1 della quadrica polare $\Delta_y^{(2)}$ di y rispetto a V . Con un ragionamento analogo a quello usato per giungere alla proposizione enunciata nell'ultimo capoverso della i_4 del n. 4¹⁶), è facile constatare che $\Delta_y^{(2)}$ non varia in corrispondenza alle specializzazioni di y su k_1 se, e soltanto se, vi è un divisore positivo 0-dimensionale, del secondo ordine, di l , il cui supporto ha molteplicità almeno tre su V : caso questo che può essere non considerato comportando esso che V sia un monoide, e perciò birazionale; oppure un cono. È dunque lecito supporre che $\dim(\{\Delta_y^{(2)}\}) = 1$, e pertanto per un punto generico x di V su k_1 passa almeno un elemento di $\{\Delta_y^{(2)}\}$. In ogni caso, escluso quello in cui $\Delta_y^{(2)}$ abbia due componenti lineari entrambe variabili in corrispondenza alle specializzazioni di y su k_1 , si può allora giungere all'unirazionalità di V su k_1 con il medesimo procedimento usato nei casi analoghi considerati in A), B) dei successivi nn. 10, 11 del seguente paragrafo. Nel caso escluso invece basta sostituire al piano π un altro piano π' , certo esistente su V , che non si trovi nelle stesse particolari condizioni del primo¹⁷).

¹⁶) Basta sostituire, in quel ragionamento, al piano π la retta l , il che è lecito avendosi ora — a norma della i_2 del n. 3 — $m(l; C^{(3)}; V) = m(l; V) = 2$.

¹⁷) Un tale piano π' può ad es. cercarsi tra le componenti delle quadriche riducibili del sistema $\{G^{(3)}\}$, di dimensione $r - 4 \geq 3$, luogo su k_1 della quadrica $G^{(3)} = W \cdot P_3 - 2\pi$, essendo W l'intersezione $V \cdot P_{r-1}$ di V con l'iperpiano P_{r-1} tangente fisso a V nei punti (semplici) di π , e P_3 uno spazio tridimensionale, generico su k_1 tra quelli di P_{r-1} che passano per π : ed è facile vedere che le suddette componenti non pos-

§ 3. - Il caso $m(\pi; V) \geq 2$

10. - Il caso $m(\alpha; V) \geq 3$, con $\alpha \subseteq \pi$, potrà essere escluso dalle considerazioni di questo paragrafo, comportando esso che V sia un cono, e perciò luogo di un sistema semplice di spazi (ved. ultimo comma del n. 1); oppure un monoide, il quale risulta notoriamente birazionale (e pertanto anche unirazionale). Supporremo dunque nel seguito $m(\pi; V) = 2$, e $m(y; V) = 2$ per ogni punto y di π , il che ci assicura — in virtù della i_4) del n. 4 — che $\dim(\{C^{(2)}\}) \geq 1$.

Sia l una k_1 -retta di π del tipo considerato nella i_6) del n. 6, e sia $\{\Delta_y^{(2)}\}$ il luogo su k_1 del cono $\Delta_y^{(2)}$ relativo ad un punto generico y di l su k_1 .

Consideriamo due casi, a seconda che $\Delta_y^{(2)}$ sia assolutamente irriducibile, o meno.

A) $\Delta_y^{(2)}$ assolutamente irriducibile: Fissato opportunamente in $P_r(K)$ un k_1 -iperpiano P_{r-1} , l'intersezione $Q_y = \Delta_y^{(2)} \cdot P_{r-1}$ è una quadrica $(r-2)$ -dimensionale, definita sul corpo $k_1(y)$ ed assolutamente irriducibile: essa potrà perciò essere tuttalpiù un cono di vertice P_m , con $m \leq r-4$. Si potrà allora fissare in $P_r(K)$ un k_1 -spazio P_3 , sghembo con P_m , in guisa che $C_y = Q_y \cdot P_3$ sia una conica assolutamente irriducibile, che appartiene chiaramente al corpo $k_1(y)$.

In corrispondenza alle varie specializzazioni di y su k_1 , tale conica descrive un sistema unidimensionale $\{C_y\}$, definito su k_1 , il quale — per un noto criterio ¹⁸⁾ — ammette, in un sopracorpo algebrico k_1^* di k_1 , un'unisecante Γ . Quest'ultima determina su C_y un $k_1^*(y)$ -punto $\bar{z}_y$, che appartiene ovviamente alla Q_y , ed è semplice per essa: la Q_y risulta pertanto birazionale su $k_1^*(y)$.

Tenuto conto della i_6) del n. 6, e con lo stesso ragionamento

sono trovarsi tutte nelle particolari condizioni di π , venendo ciò a contrastare con l'ipotesi $\dim(\{\Delta_y^{(2)}\}) = 1$.

¹⁸⁾ Ved. M. BALDASSARRI, *Su un criterio di riduzione per un sistema algebrico di varietà*, Rend. Sem. Mat. di Padova, (1950).

fatto nel penultimo capoverso del n. 8, si vede che la $\Omega_v = V \cdot \Delta_v^{(2)}$ è birazionale su $k_1^*(y)$, e da ciò — avuto anche riguardo alla i_7) del n. 7 — si conclude che V è unirazionale su k_1^* .

11. - Resta ancora da considerare, sempre nelle ipotesi del n. 10, il caso:

B) $\Delta_v^{(2)}$ *riducibile*: Anche qui si può giungere all'unirazionalità di V sia nell'eventualità che $\Delta_v^{(2)}$ abbia — in un sopracorpo algebrico di $k_1(y)$ — due componenti distinte, P'_{r-1} , P''_{r-1} , sia in quella che abbia una sola componente P'_{r-1} di molteplicità due.

Se $\Delta_v^{(2)} = 2P'_{r-1}$, oppure se $\Delta_v^{(2)} = P'_{r-1} + P''_{r-1}$ e P''_{r-1} resta fisso in corrispondenza alle specializzazioni di y su k_1 , l'iperpiano P'_{r-1} sega V in un monoide $(r-2)$ -dimensionale Φ_v , appartenente a $k_1(y)$ ed avente y come punto triplo, donde la birazionalità di Φ_v su $k_1(y)$ e quindi — a norma della i_7) del n. 7 — quella di V su k_1 .

Se invece $\Delta_v = P'_{r-1} + P''_{r-1}$ ed entrambe le componenti variano in corrispondenza alle specializzazioni di y su k_1 , l'intersezione $\Psi_v = V \cdot (P'_{r-1} \cap P''_{r-2})$ è un monoide $(r-3)$ -dimensionale appartenente a $k_1(y)$, avente y come punto triplo, e perciò birazionale su $k_1(y)$. Se ora y lo si pensa come punto generico su k_1 del piano π e non della retta l , il luogo $\{\Psi_v\}$ di Ψ_v su k_1 , nell'ipotesi $\dim(\{\Psi_v\}) = 2$, è un sistema soddisfacente alle condizioni volute dalla i_7) del n. 7 donde, anche in questo caso, l'unirazionalità di V su k_1 .

Qualora invece si abbia $\dim(\{\Psi_v\}) = 0$, il sistema $\{C^{(2)}\}$ di cui al n. 3 è unidimensionale ed ammette pertanto, in un sopracorpo algebrico k_1^* di k_1 , un'unisecante Γ , che risulta anche unisecante del sistema $\{F^{(2)}\}$. Escluso allora, come di consueto (ved. ultimo comma del n. 1), che $F^{(2)}$ sia un cono (con il vertice su π), oppure si spezzi in due piani, e detto $k_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{r-3})$ il corpo d'appartenenza di $F^{(2)}$, si ha che la $F^{(2)}$ stessa è birazionale su $k_1^*(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{r-3})$, e perciò — ancora per la i_7) del n. 7 — V è unirazionale, anzi birazionale su k_1^* .

Infine se $\dim(\{\Psi_v\}) = 1$, non potendosi in questo caso applicare nessuno dei procedimenti sopra indicati, basta sostituire

al piano π un altro piano π' (eventualmente semplice su V), che non si trovi nelle particolari condizioni del primo ¹⁹).

Il Teorema del n. 1 resta così completamente stabilito.

OSSERVAZIONE: Si hanno buoni motivi per ritenere valida, per un opportuno $r(n)$, la proposizione generale I) enunciata nel n. 1.

La dimostrazione di una tale proposizione è stata infatti recentemente tentata dall'A. con procedimenti diversi da quelli qui usati (non potendo ovviamente questi ultimi essere estesi al caso $n > 4$): ed i risultati sinora ottenuti sembrano incoraggianti. Restano ancora alcune difficoltà inerenti a questioni di carattere apparentemente marginale che si ha fede di poter presto superare.

¹⁹) Un tale piano π' — la cui esistenza appare evidente — può ad es. ricercarsi tra le componenti delle quadriche riducibili del sistema $\{F^{(2)}\}$, di dimensione $r - 3 > 4$, luogo su k_1 della quadrica $F^{(2)} = V \cdot P_3 - 2\pi$, dove P_3 è uno spazio tridimensionale, generico su k_1 tra quelli di $P_r(K)$ che passano per π .