

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIORGIO LETTA

**Su una generalizzazione del teorema di
Severini-Egoroff**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 31 (1961), p. 350-356

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1961__31__350_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1961__31__350_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SU UNA GENERALIZZAZIONE DEL TEOREMA DI SEVERINI-EGOROFF

Nota () di* GIORGIO LETTA *(a Pisa)*

Se X , Y sono intervalli chiusi e limitati della retta, ed (f_n) è una successione di funzioni numeriche finite, definite nel rettangolo $X \times Y$, si dice, con G. Stampacchia [1], che la successione (f_n) converge quasi uniformemente in $X \times Y$, *in modo semiregolare rispetto ad y* , se, per ogni $\varepsilon > 0$, si può determinare un insieme $I \subseteq X$, di misura (secondo Lebesgue) minore di ε , in modo tale che (f_n) converga uniformemente in $(X - I) \times Y$.

A proposito di tale concetto di convergenza, G. Stampacchia [1] ha dimostrato un teorema, che può essere enunciato nella forma seguente:

Se, per quasi ogni $x \in X$, le funzioni $(f_n(x, \cdot))$ sono continue in Y , e, per quasi ogni $y \in Y$, le funzioni $(f_n(\cdot, y))$ sono misurabili (secondo Lebesgue) in X , allora le seguenti condizioni sono equivalenti fra di loro:

(a) *la successione (f_n) converge quasi uniformemente in $X \times Y$, in modo semiregolare rispetto ad y ;*

(b) *per quasi ogni $x \in X$, la successione $(f_n(x, \cdot))$ converge uniformemente in Y ;*

(c) *per quasi ogni $x \in X$, le funzioni $(f_n(x, \cdot))$ sono egualmente continue in Y , ed inoltre esiste un insieme (numerabile)*

(*) Pervenuta in redazione il 28 giugno 1961.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Pisa.

H, denso in *Y*, tale che, per ogni $y \in H$, la successione $(f_n(\cdot, y))$ converge quasi ovunque in *X*.

Qualora, in particolare, si assuma l'intervallo *Y* ridotto ad un punto, il teorema precedente ridona il classico enunciato di Severini-Egoroff, relativo alla convergenza quasi uniforme di una successione di funzioni misurabili, secondo Lebesgue, su un intervallo chiuso e limitato della retta.

Se si denota con λ la misura esterna secondo Lebesgue nella famiglia delle parti di *X*, e, per ogni insieme $E \subseteq X \times Y$, si pone

$$(1) \quad \mu(E) = \lambda(pr_1 E)$$

(ove $pr_1 E$ denota la prima proiezione dell'insieme *E*), il concetto di convergenza quasi uniforme, di tipo semiregolare rispetto ad *y*, equivale, come ha osservato F. Cafiero [2], al concetto di convergenza quasi uniforme rispetto alla « misura esterna » μ .

Partendo da questa osservazione, ci si propone, in questa nota, di estendere in senso astratto il teorema di G. Stampacchia. Precisamente, dopo avere studiato, nel n. 1, il concetto generale di convergenza quasi uniforme rispetto ad un'arbitraria misura esterna, si passa, nel n. 2, a considerare la convergenza quasi uniforme rispetto ad una misura esterna μ , ottenuta — a partire da un'altra misura esterna λ — secondo uno schema, analogo a quello introdotto da G. Choquet [3] nello studio della capacità, e nel quale la (1) rientra come caso particolare. Si perviene, in tal modo, ad un teorema, il quale contiene, come caso particolare, il teorema di Severini-Egoroff, relativo alla convergenza quasi uniforme di una successione di funzioni misurabili in un arbitrario spazio mensurale finito.

Infine, nel n. 3, si particolarizza lo schema, introducendo un'opportuna struttura topologica, e si ottiene un teorema, nel quale è contenuta la parte, del teorema enunciato in principio, che riguarda l'equivalenza delle condizioni (a), (b).

1. Sia *S* un insieme, μ una *misura esterna* nella famiglia $\mathfrak{P}(S)$ delle parti di *S* (ossia una funzione numerica definita in

$\mathfrak{P}(S)$, soddisfacente alle condizioni seguenti: (i) $\mu(\emptyset) = 0$; (ii) $\mu(A) \leq \mu(B)$ se $A \subseteq B$; (iii) $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Se (f_n) è una successione di funzioni numeriche finite, definite in S , si dirà che (f_n) converge (μ) *quasi uniformemente* in S , se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un insieme $E \subseteq S$, tale che sia $\mu(E) < \varepsilon$ e che (f_n) converga uniformemente in $S - E$.

Sussiste la seguente proposizione:

(1.1) *Sia (f_n) una successione di funzioni numeriche finite, definite in S ; e si ponga*

$$(1.2) \quad E_{h,k} = \bigcup_{p,q \geq k} \{s \in S: f_p(s) - f_q(s) > 1/h\} \quad \text{per } h, k \in \mathbb{N}^1).$$

Le seguenti condizioni sono allora equivalenti fra di loro:

- (a) (f_n) converge (μ) *quasi uniformemente* in S ;
- (b) $\lim_k \mu(E_{h,k}) = 0$ *per ogni* $h \in \mathbb{N}$.

Dim. (a) $\Rightarrow$ (b): fissato $\varepsilon > 0$, sia $E \subseteq S$ tale che $\mu(E) < \varepsilon$ e che (f_n) converga uniformemente in $S - E$. Per ogni $h \in \mathbb{N}$, esiste allora $k \in \mathbb{N}$ tale che, se $p, q \geq k$ e $s \in S - E$, risulta $f_p(s) - f_q(s) \leq 1/h$. Si ha $E_{h,k} \subseteq E$, e quindi $\mu(E_{h,k}) < \varepsilon$.

(b) $\Rightarrow$ (a): fissato $\varepsilon > 0$, si determini, per ogni $h \in \mathbb{N}$, $k(h)$ in modo tale che risulti $\mu(E_{h,k(h)}) < \varepsilon/2^h$. Posto $E = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} E_{h,k(h)}$, risulta $\mu(E) < \varepsilon$, e nell'insieme

$$S - E = \bigcap_{h \in \mathbb{N}} (S - E_{h,k(h)}) = \bigcap_{h \in \mathbb{N}} \bigcap_{p,q \geq k(h)} \{s: f_p(s) - f_q(s) \leq 1/h\}$$

la successione (f_n) converge uniformemente.

2. Siano ora S un insieme, X un arbitrario insieme di indici, $(A_x)_{x \in X}$ una famiglia di parti di S , λ una misura esterna finita,

¹) Denoteremo con $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali, con $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali.

nella famiglia $\mathfrak{P}(X)$ delle parti di X . Posto, per ogni insieme $E \subseteq S$,

$$(2.1) \quad \omega(E) = \{x \in X : A_x \cap E \neq \emptyset\},$$

è immediato riconoscere che è $\varphi(\bigcup_i E_i) = \bigcup_i \varphi(E_i)$ per ogni famiglia (E_i) di parti di S . Se pertanto si pone

$$(2.2) \quad \mu(E) = \lambda(\varphi(E)) \quad \text{per ogni} \quad E \subseteq S,$$

μ risulta una misura esterna in $\mathfrak{P}(S)$ ²⁾.

Detta $\mathfrak{L}$ la famiglia delle parti di X misurabili (secondo Carathéodory) rispetto a λ ³⁾, sia $\mathfrak{U}$ un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale $\mathbf{R}^S$ di tutte le funzioni numeriche finite, definite in S , godente della proprietà seguente:

(2.3) Per ogni $a \in \mathbf{R}$ ed ogni $f \in \mathfrak{U}$, risulta

$$\varphi(\{s : f(s) > a\}) \in \mathfrak{L} \text{ } ^4).$$

Nelle ipotesi poste, sussiste la seguente proposizione:

(2.4) Se (f_n) è una successione di funzioni di $\mathfrak{U}$, le seguenti condizioni sono equivalenti fra di loro

(a) (f_n) converge (μ) quasi uniformemente in S ;

(b) per (λ) quasi ogni $x \in X$, (f_n) converge uniformemente su A_x .

²⁾ La costruzione di μ a partire da λ si può far rientrare nello schema impiegato da CHOQUET in [3]. Precisamente, ove si ponga $A = \{(s, x) \in S \times X : s \in A_x\}$, μ può considerarsi, secondo la terminologia di CHOQUET, come la funzione ottenuta dallo schema fondamentale (S, X, A, λ) .

³⁾ È noto (cfr. [4], p. 44 e seg.) che $\mathfrak{L}$ è una σ -algebra e che la restrizione di λ ad $\mathfrak{L}$ è una misura completa.

⁴⁾ Si osservi che l'insieme di tutte le funzioni numeriche finite f , definite in S , per le quali risulta

$$\varphi(\{s : f(s) > a\}) \in \mathfrak{L} \quad \text{per ogni} \quad a \in \mathbf{R},$$

non è, in generale, un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^S$.

DM. L'insieme degli $x \in X$ per i quali la successione (f_n) non converge uniformemente su A_x è dato, con le notazioni (1.2), (2.1), da

$$\bigcup_h \bigcap_k \varphi(E_{h,k}) .$$

Pertanto, la condizione (b) si traduce nella relazione

$$(2.5) \quad \lambda\left(\bigcap_k \varphi(E_{h,k})\right) = 0 \quad \text{per} \quad h \in \mathbf{N} .$$

Poichè, per ogni $h \in \mathbf{N}$, $(\varphi(E_{h,k}))_{k \in \mathbf{N}}$ è una successione decrescente di insiemi (λ) misurabili, la (2.5) si può scrivere nella forma

$$\lim_k \lambda(\varphi(E_{h,k})) = 0 \quad \text{per} \quad h \in \mathbf{N} .$$

Essa è dunque equivalente ad (a), in virtù di (1.1) e (2.2).

Qualora, in particolare, si assuma $X = S$, $A_x = \{x\}$ per ogni $x \in X$, e $\mathfrak{U}$ coincidente con l'insieme delle funzioni numeriche finite, misurabili in $(X, \mathfrak{L})$, la proposizione (2.4) si riduce al ben noto teorema di Severini-Egoroff, riguardante la convergenza (λ) quasi uniforme di una successione di funzioni misurabili in $(X, \mathfrak{L})$.

3. - Siano ancora, come nel n. prec., X un insieme, λ una misura esterna finita, nella famiglia delle parti di X , $\mathfrak{L}$ la σ -algebra degli insiemi (λ) misurabili. Siano, inoltre, Y uno spazio topologico separabile, H una parte densa, numerabile, di Y , S una parte di $X \times Y$ soddisfacente alle due condizioni seguenti:

(α) per (λ) quasi ogni $x \in X$, la sezione verticale $S(x) = \{y \in Y: (x, y) \in S\}$ è una parte di Y contenuta nell'aderenza del proprio interno;

(β) per ogni $y \in H$, la sezione orizzontale $\overset{-1}{S}(y) = \{x \in X: (x, y) \in S\}$ è una parte di X (λ) misurabile.

Per ogni $x \in X$, porremo

$$A_x = \{x\} \times S(x) .$$

Le (2.1), (2.2) si riducono allora, rispettivamente, a

$$\varphi(E) = pr_1 E, \quad \mu(E) = \lambda(pr_1 E).$$

Sussiste, nelle ipotesi precisate, il seguente lemma:

(3.1) *Sia E una parte di S soddisfacente alle condizioni seguenti:*

(α') *per (λ) quasi ogni $x \in X$, la sezione verticale $E(x)$ è un insieme aperto in $S(x)$;*

(β') *per ogni $y \in H$, la sezione orizzontale $\overset{-1}{E}(y)$ è un insieme (λ) misurabile.*

Allora $pr_1 E$ è un insieme (λ) misurabile.

Dim. Senza ledere la generalità, si può assumere che le condizioni (α), (α') valgano con le parole « per ogni x » sostituite alle parole « per (λ) quasi ogni x ». Per ogni $x \in X$, risulta allora

$$E(x) = G_x \cap S(x),$$

con G_x opportuno insieme aperto di Y .

Poichè H è numerabile, basta, per dimostrare l'asserto, provare che è

$$pr_1 E = \bigcup_{y \in H} \overset{-1}{E}(y),$$

e poichè il secondo membro è ovviamente contenuto nel primo, è sufficiente dimostrare la relazione d'inclusione inversa.

Sia, invero, $x \in pr_1 E$. Risulta allora $E(x) = G_x \cap S(x) \neq \emptyset$. Essendo, per ipotesi, $S(x) \subseteq [S(x)]^{0-}$, risulta a *fortiori*

$$G_x \cap [S(x)]^{0-} \neq \emptyset,$$

da cui

$$G_x \cap [S(x)]^0 \neq \emptyset,$$

e poichè H è denso

$$H \cap G_x \cap [S(x)]^0 \neq \emptyset.$$

Si ha dunque $H \cap E(x) \neq \varnothing$, ossia esiste $y \in H$ tale che
 $\overset{-1}{x} \in E(y)$.

Denoteremo con $\mathcal{U}$ l'insieme delle funzioni numeriche finite f , definite in S e soddisfacenti alle due condizioni seguenti:

(α'') per (λ) quasi ogni $x \in X$, la funzione parziale $y \rightarrow f(x, y)$ è continua in $S(x)$;

(β'') per ogni $y \in H$, la funzione parziale $x \rightarrow f(x, y)$ è misurabile in $\overset{-1}{S}(y)$.

È evidente che $\mathcal{U}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale $\mathbf{R}^S$. Inoltre, per ogni $f \in \mathcal{U}$ ed ogni $a \in \mathbf{R}$, posto

$$E = \{s \in S: f(s) > a\},$$

E soddisfa alle condizioni (α'), (β') del lemma (3.1), e si ha quindi $\varphi(E) = pr_1 E \in \mathcal{L}$. Sono dunque soddisfatte, per $\mathcal{U}$, le ipotesi del n. 2: e vale quindi ancora la conclusione della proposizione (2.4).

Assumendo, in particolare, X e Y coincidenti con intervalli chiusi e limitati della retta, Y dotato della topologia indotta dalla topologia usuale sulla retta, λ coincidente con la misura esterna secondo Lebesgue nella famiglia delle parti di X , e infine $S = X \times Y$, si ritrova la parte, del teorema di G. Stampacchia, relativa alla equivalenza delle condizioni (a), (b) (vedi enunciato in principio di nota).

BIBLIOGRAFIA

- [1] STAMPACCHIA G.: *Sulle successioni di funzioni continue rispetto a una variabile e misurabili rispetto ad un'altra*. Rend. Acc. Linc., Serie 8-, vol. VI, 198-201, 1949.
- [2] CAFIERO F.: *Sugli insiemi compatti di funzioni misurabili negli spazi astratti*. Rend. Sem. Mat. Padova, XX, 48-58, 1951.
- [3] CHOQUET G.: *Theory of Capacities*. Ann. Inst. Fourier, V, 209-210, 1953-54.
- [4] HALMOS P.: *Measure Theory*. Van Nostrand, 1950.