

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

CLAUDIO MARGAGLIO

Una condizione affinché il sottofascio di torsione di un fascio algebrico coerente sia sommando diretto

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 31 (1961), p. 341-349

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1961__31__341_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNA CONDIZIONE AFFINCHÈ IL SOTTOFASCIO DI TORSIONE DI UN FASCIO ALGEBRICO COERENTE SIA SOMMANDO DIRETTO

Nota () di CLAUDIO MARGAGLIO (a Padova)*

È noto che la sequenza canonica di torsione

$$0 \longrightarrow \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}/\mathcal{T} \longrightarrow 0$$

per un fascio algebrico coerente $\mathcal{F}$ su una varietà algebrica irriducibile è spezzante nel caso che la varietà sia non singolare ed unidimensionale. Il prof. Mario Baldassarri mi ha suggerito di indagare su quanto avviene per la soprascritta sequenza in casi più generali: qui pervengo ad una condizione necessaria affinché la sequenza sia spezzante. Per varietà affini e fasci di rango p generati da $p + 1$ sezioni la condizione trovata risulta anche sufficiente.

Il contenuto della nota è in dettaglio il seguente: il n. 1 contiene definizioni e premesse, nei nn. 2, 3 si trova una condizione necessaria affinché la sequenza di torsione sia spezzante, nel n. 4 tale condizione viene trasformata in modo da essere direttamente applicabile in pratica. I nn. 5, 7 contengono esempi, nel n. 6 si considera il caso particolare di cui si è detto più sopra, nel quale la condizione trovata è anche sufficiente e nel n. 8 si interpreta il risultato del n. 6 in termini di moduli.

(*) Pervenuta in redazione il 16 giugno 1961.

Indirizzo dell'A.: Seminario di Matematica, Università (Padova).

1. - Sia V una varietà algebrica irriducibile¹⁾, $\mathcal{A}$ il fascio degli anelli locali di V , $\mathcal{F}$ un fascio algebrico coerente sopra V . Sia $\mathcal{T}$ il sottofascio di torsione di $\mathcal{F}$.

Si ricordi che $\mathcal{T}$ è definito ([2]) come nucleo dell'omomorfismo canonico $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{K}$ essendo $\mathcal{K}$ il fascio costante le cui fibre sono isomorfe al corpo delle funzioni razionali su V . Il *supporto* di un fascio $\mathcal{G}$ sopra V è per definizione l'insieme dei punti di V ove la fibra di $\mathcal{G}$ non è banale. Il supporto di $\mathcal{G}$ si indica con $\text{Supp}(\mathcal{G})$.

La fibra sopra un punto $x \in V$ di un fascio $\mathcal{G}$ sopra V sarà indicata con $\mathcal{G}_x$. Un germe di $\mathcal{G}$ appartenente a $\mathcal{G}_x$ sarà talvolta indicato con un simbolo del tipo f_x .

OSSERVAZIONE. È noto che il sottofascio di torsione $\mathcal{T}$ risulta anche dato dall'insieme dei germi $f_x \in \mathcal{F}$ per i quali esiste un germe non nullo $a_x \in \mathcal{A}_x$ tale che $a_x \cdot f_x = 0$.

Si ha infatti:

$$a_x \cdot f_x = 0 \text{ implica } f_x \otimes 1 = a_x \cdot f_x \otimes (1/a_x) = 0 \otimes (1/a_x) = 0.$$

Viceversa, considerato il diagramma canonico (commutativo ed esatto):

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{A}_x^p & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{K}_x^p \\
 & & \downarrow \varphi & & \downarrow \bar{\varphi} \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{A}_x^q & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{K}_x^q \\
 & & \downarrow \psi & & \downarrow \bar{\psi} \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{T}_x & \xrightarrow{\gamma} & (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{K})_x \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

¹⁾ Per le definizioni fondamentali si rimanda alla memoria di J. P. Serre [1].

se $f = \psi(g) \in \mathcal{F}_x$ e $\gamma(f) = 0$ allora: $\bar{\psi}\beta(g) = \gamma\psi(g) = 0$ e ne segue $\beta(g) = \bar{\varphi}(a)$ ed esiste un germe non nullo $b \in \mathfrak{A}_x$ tale che $b \cdot a = \alpha(c)$. Si ha quindi: $\beta\varphi(c) = \bar{\varphi}\alpha(c) = b \cdot \bar{\varphi}(a) = b \cdot \beta(g) = \beta(b \cdot g)$ e pertanto $\varphi(c) = b \cdot g$. Infine: $b \cdot f = b \cdot \psi(g) = \psi\varphi(c) = 0$.

Tenuto conto del fatto che $\text{Supp}(\mathcal{T}) \neq V$ si ha pure che condizione caratteristica affinché un germe di $\mathcal{F}$ stia in $\mathcal{T}$ è che esso appartenga ad una sezione di $\mathcal{F}$ intersecante la sezione nulla.

2. - Si supponrà, per evitare casi banali, che sia $\text{Supp}(\mathcal{F}) = V$, $\text{Supp}(\mathcal{T}) \neq \emptyset$. Per un certo $x \in \text{Supp}(\mathcal{T})$ sia $\mathcal{T}_x$ sommando diretto di $\mathcal{F}_x$.

Esiste allora un sotto- $\mathfrak{A}_x$ -modulo di tipo finito $\mathcal{M}_x$ di $\mathcal{F}_x$ tale che:

$$\mathcal{T}_x + \mathcal{M}_x = \mathcal{F}_x; \quad \mathcal{T}_x \cap \mathcal{M}_x = \{0\}.$$

Siano $\{f_1, \dots, f_s\}$, $\{t_1, \dots, t_h\}$, $\{m_1, \dots, m_s\}$ sistemi di generatori di $\mathcal{F}_x$, $\mathcal{T}_x$, $\mathcal{M}_x$. Si hanno allora relazioni del tipo seguente:

$$\begin{cases} f_i = \sum_1^h a_{ij} t_j + \sum_1^s b_{ij} m_j; \\ t_i = \sum_1^q a'_{ij} f_j; \\ m_i = \sum_1^q b'_{ij} f_j \end{cases}$$

essendo a_{ij} , a'_{ij} , b_{ij} , b'_{ij} elementi di $\mathfrak{A}_x$.

Poichè $\mathcal{T}_x \cap \mathcal{M}_x = \{0\}$, da

$$t_i = \sum_1^q a'_{ij} \sum_1^h a_{jk} t_k + \sum_1^q a'_{ij} \sum_1^s b_{jk} m_k$$

si trae $\sum_1^h (\sum_1^q a'_{ij} a_{jk} - \delta_{ij}) t_j = 0$ (essendo $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$;

$\delta_{ii} = 1$) e infine: $D_{\mathcal{T}} t_i = 0$ ($i = 1, \dots, h$), essendo $D_{\mathcal{T}} =$

$$= \left| \sum_1^q a'_{ij} a_{jk} - \delta_{ij} \right| \in \mathfrak{A}_x.$$

Analogamente si trova:

$$D_{\mathcal{M}} m_i = 0 \quad (i = 1, \dots, s), \quad \text{con} \quad D_{\mathcal{M}} = \left| \sum_1^q b'_{ik} b_{kj} - \delta_{ij} \right|.$$

Poichè $x \in \text{Supp}(\mathcal{T})$ e $\mathcal{F}_x \neq \mathcal{T}_x$ (giacchè se fosse $\mathcal{F}_x = \mathcal{T}_x$ le fibre di $\mathcal{F}$ e $\mathcal{T}$ coinciderebbero sopra tutto un intorno di x e di conseguenza, essendo V irriducibile ed essendo $\text{Supp}(\mathcal{T})$ chiuso proprio di V , non potrebbe essere $\text{Supp}(\mathcal{F}) = V$) segue che $D_{\mathcal{T}}$, $D_{\mathcal{M}}$ non possono avere inverso (ad esempio dall'esistenza in $\mathcal{O}_x$ di $1/D_{\mathcal{T}}$ seguirebbe $t_i = 0$ ($i = 1, \dots, h$)).

NOTA: Per $D_{\mathcal{M}}$ anzi la condizione diventa $D_{\mathcal{M}} = 0$. Infatti sopra un opportuno intorno aperto di x esistono sezioni dei vari fasci $\mathcal{F}$; $\mathcal{T}$; $\mathcal{A}$ passanti rispettivamente per i germi f_i , m_i ; t_i ; a_{ik} , ..., $D_{\mathcal{M}}$, la fibra di $\mathcal{T}$ risulta ancora sommando diretto della fibra di $\mathcal{F}$ e risultano valide per le dette sezioni tutte le relazioni soprascritte. Di conseguenza, poichè $\mathcal{T}_x \neq \mathcal{F}_x$ per ogni $x \in V$ si ha che nessuno dei germi della sezione passante per $D_{\mathcal{M}}$, sopra considerata, ha inverso e ciò è possibile solo se $D_{\mathcal{M}} = 0$.

3. - Sia $\mathfrak{M}_x$ l'ideale massimale dell'anello locale $\mathcal{O}_x$. È noto che $\mathfrak{M}_x$ è l'insieme degli elementi di $\mathcal{O}_x$ privi di inverso. Poichè $1 \notin \mathfrak{M}_x$, se tutti gli elementi del tipo a'_{ik} (rispettivamente b'_{ik}) di cui sopra sono in $\mathfrak{M}_x$ si ha:

$$\sum_1^q a'_{ik} a_{kj} - \delta_{ij} \equiv -\delta_{ij} \pmod{\mathfrak{M}_x}$$

ovvero $D_{\mathcal{T}} \notin \mathfrak{M}_x$ (rispettivamente $D_{\mathcal{M}} \notin \mathfrak{M}_x$). Quindi:

A. - « Condizione necessaria affinché $\mathcal{T}_x$ sia sommando diretto di $\mathcal{F}_x$ ($x \in \text{Supp}(\mathcal{T})$) è che per ogni sistema di relazioni del tipo soprascritto, non tutti gli elementi a'_{ik} stiano in $\mathfrak{M}_x$ ». (Analogamente per gli elementi b'_{ik}).

4. - Sia il fascio $\mathcal{F}$ dato localmente come conucleo:

$$\mathcal{O}^p \longrightarrow \mathcal{O}^q \xrightarrow{\psi} \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

Sia $\mathcal{R} = Nc(\psi)$ (*= nucleo dell'omomorfismo ψ*) e, essendo

$$\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{F}/\mathcal{T}$$

la proiezione canonica sul quoziente, sia $\mathcal{N} = Nc(p \cdot \psi)$. Si ha allora localmente una sequenza canonica:

$$0 \longrightarrow (\mathcal{N}/\mathcal{R}) \longrightarrow (\mathcal{A}^q/\mathcal{R}) \longrightarrow (\mathcal{A}^q/\mathcal{N}) \longrightarrow 0$$

e poichè vi sono gli isomorfismi $(\mathcal{A}^q/\mathcal{R}) \longleftrightarrow \mathcal{F}$, $(\mathcal{A}^q/\mathcal{N}) \longleftrightarrow (\mathcal{F}/\mathcal{T})$ si ottiene il seguente diagramma commutativo ed esatto:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & \mathcal{T} & & \\
 & & & & \downarrow j & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{R} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{A}^q & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{F} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow i & & \downarrow p \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{N} & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & \mathcal{A}^q & \xrightarrow{\bar{\psi}} & \mathcal{F}/\mathcal{T} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \mathcal{T} & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & & &
 \end{array}$$

Sia $x \in Supp(\mathcal{T})$. Si ha allora in particolare un analogo diagramma in cui compaiono le fibre sopra x dei vari fasci sopra considerati. Sia $\{n_1, \dots, n_h\}$ un sistema di germi generanti $\mathcal{N}_x$. I germi $\psi \bar{\varphi}(n_i)$ ($i = 1, \dots, h$) generano allora la fibra su x del fascio $j(\mathcal{T})$. Infatti: $p\psi \bar{\varphi}(n_i) = \bar{\psi} \bar{\varphi}(n_i) = 0$; $\psi \bar{\varphi}(n_i) \in j(\mathcal{T})$. Inoltre: se $t \in j(\mathcal{T}_x)$ e $t = \psi(g)$ allora: $\bar{\psi}(g) = p\psi(g) = p(t) = 0$ e $g = \bar{\varphi}(n)$ e $t = \psi \bar{\varphi}(n)$.

per il quale il sottofascio di torsione non è sommando diretto.

Si consideri la sequenza esatta di fasci su K^3 :

$$0 \longrightarrow \mathcal{N} \xrightarrow{\bar{\varphi}} \mathcal{C}^3 \xrightarrow{\bar{\psi}} \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

definita con: $\bar{\psi}(f_1, f_2, f_3) = f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3$.

Si verifica che $\bar{\varphi}(\mathcal{N})$ è generato dalle tre sezioni $(x_2, -x_1, 0)$, $(x_3, 0, -x_1)$, $(0, -x_3, x_2)$. Pertanto, se $\mathcal{R}$ è sottofascio di $\mathcal{N}$, se $\text{Supp}(\mathcal{N}/\mathcal{R}) \neq K^3$ e se le fibre di $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{N}$ sono distinte sopra l'origine di K^3 allora il fascio $\mathcal{F} = \mathcal{C}^3/\bar{\varphi}(\mathcal{R})$ ha sottofascio di torsione $\mathcal{T}$ isomorfo a $\mathcal{N}/\mathcal{R}$ e per quanto precede si ha che $\mathcal{T}$ non è sommando diretto di $\mathcal{F}$ (giacché $\mathcal{T}_{(0,0,0)}$ non è sommando diretto di $\mathcal{F}_{(0,0,0)}$).

6. - Sia $\mathcal{F}$ di rango p , sia $\mathcal{F}_x$ generata da $p+1$ elementi e sia $x \in \text{Supp}(\mathcal{T})$. Dal diagramma scritto più sopra si trae la sequenza esatta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_x \xrightarrow{\bar{\varphi}} \mathcal{C}_x^{p+1} \xrightarrow{\bar{\psi}} \mathcal{F}_x/\mathcal{T}_x \longrightarrow 0$$

Sia $\mathcal{T}_x$ sommando diretto di $\mathcal{F}_x$. Allora esiste un elemento $a = (a_1, \dots, a_{p+1}) \in \text{Nc}(\bar{\psi})$ avente una coordinata, ad esempio a_{p+1} , non appartenente ad $\mathfrak{M}_x$. Posto $g_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, g_p = (0, 0, \dots, 0, 1, 0)$ si ha: se $m \in \mathcal{F}_x/\mathcal{T}_x$ e $m = \bar{\psi}(f_1, \dots, f_{p+1})$ si può scrivere $m = \sum_{i=1}^p c_i \bar{\psi}(g_i)$ ($c_i \in \mathcal{C}_x$) giacché $(f_1, \dots, f_{p+1}) - (f_{p+1}/a_{p+1})(a_1, \dots, a_{p+1})$ è generato da $g_1, \dots, g_p$ e $(f_{p+1}/a_{p+1})(a_1, \dots, a_{p+1})$ sta in $\text{Nc}(\bar{\psi})$.

Ne segue che $\mathcal{F}_x/\mathcal{T}_x$ essendo di rango p ed essendo generato da p elementi è libero.

Viceversa, è chiaro che se $\mathcal{F}_x/\mathcal{T}_x$ è libero la sequenza

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_x \longrightarrow \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{F}_x/\mathcal{T}_x \longrightarrow 0$$

è spezzante e quindi $\mathcal{T}_x$ è sommando diretto di $\mathcal{F}_x$. Pertanto, se $x \in \text{Supp}(\mathcal{T})$, si ha:

D. - « Se $\mathcal{F}$ è di rango p e se $\mathcal{F}_x$ è generato da $p+1$ elementi, allora $\mathcal{T}_x$ è sommando diretto di $\mathcal{F}_x$ se e solo se $\mathcal{F}_x/\mathcal{T}_x$ è libero. »

Sia ora V una varietà (irriducibile) affine e sia $\mathcal{F}_x/\mathcal{T}_x$ libero per ogni $x \in \text{Supp}(\mathcal{T})$. Sia X il chiuso di V ove $\mathcal{F}_x/\mathcal{T}_x$ non è libero. Si ha $X \cap \text{Supp}(\mathcal{T}) = \emptyset$.

Si ricopra l'aperto $V \div X$ con un numero finito di aperti affini associati a polinomi $Q_1, \dots, Q_n$. (Ciò è certamente possibile giacchè con gli aperti associati a polinomi si ottiene una base per la topologia dello spazio affine). A questi polinomi corrispondono n funzioni regolari non simultaneamente nulle in alcun punto di $\text{Supp}(\mathcal{T})$ e quindi essi determinano n sezioni globali del fascio $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ degli anelli locali della varietà affine $\text{Supp}(\mathcal{T})$, che generano tale fascio. Pertanto ([2]) esistono n sezioni globali di $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ rappresentabili come noto con polinomi $R_1, \dots, R_n$, tali che, indicata con q la sezione di $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ determinata dal polinomio Q , si abbia: $\sum_{i=1}^n r_i q_i = 1$. Ciò significa che il polinomio $Q = \sum_{i=1}^n R_i Q_i$ determina un aperto affine W di V contenente $\text{Supp}(\mathcal{T})$ e disgiunto da X .

La sequenza esatta di fasci su V :

$$0 \longrightarrow \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}/\mathcal{T} \longrightarrow 0$$

induce sull'aperto affine W una sequenza spezzante e di conseguenza, essendo $\mathcal{T}$ banale in $V \div W$, $\mathcal{T}$ risulta sommando diretto di $\mathcal{F}$.

Pertanto:

E. - « Se il fascio algebrico coerente $\mathcal{F}$ sulla varietà affine irriducibile V è di rango p ed è generato da $p + 1$ sezioni, allora il suo sottofascio di torsione $\mathcal{T}$ è sommando diretto di $\mathcal{F}$ se e solo se $\mathcal{F}/\mathcal{T}$ è localmente libero su $\text{Supp}(\mathcal{T})$ ».

Con riferimento alla condizione *B.* si ha anche:

B'. - « Se il fascio algebrico coerente $\mathcal{F}$ sulla varietà affine irriducibile V è di rango p ed è generato da $p + 1$ sezioni, allora il suo sottofascio di torsione $\mathcal{T}$ è sommando diretto se e solo se per ogni $x \in \text{Supp}(\mathcal{T})$ è $\mathfrak{M}_x \nmid G(\mathcal{N}_x)$ ».

7. - ESEMPIO: Sia $\mathcal{F}$ il fascio algebrico coerente sullo spazio affine K^2 ottenuto come quoziente del fascio $\mathcal{A}^2$ rispetto al sotto-

fascio generato dalla sezione $(x_1 + x_2 + a)(x_1, x_2)$, ($a = \text{cost.} \in K$).

Si trova che il chiuso X ove la fibra di $\mathcal{F}/\mathcal{C}$ non è libera è l'origine di K^2 mentre $\text{Supp}(\mathcal{C})$ è il chiuso associato al polinomio $x_1 + x_2 + a$. Pertanto:

- se $a \neq 0$ $\mathcal{C}$ è sommando diretto di $\mathcal{F}$;
 se $a = 0$ $\mathcal{C}$ non è sommando diretto di $\mathcal{F}$.

8. - Sia V una varietà affine irriducibile, sia F un modulo di tipo finito sull'anello $A = K[x_1, \dots, x_r]/I(V)$, ($I(V)$ essendo l'ideale associato a V), assegnato con una sequenza esatta

$$A^p \longrightarrow A^q \xrightarrow{\psi} F \longrightarrow 0.$$

Sia $N = Nc(p \cdot \psi)$ e sia $G(N)$ l'insieme degli elementi di A che compaiono fra le coordinate di elementi di N in A^q . Tenuto conto della corrispondenza che sussiste fra la categoria dei fasci algebrici coerenti su V e la categoria degli A -moduli di tipo finito, da B' si ottiene:

B''. - « Se $A = K[x_1, \dots, x_r]/I$, ove I è ideale primo, e se F è un A -modulo di tipo finito di rango p generato da $p + 1$ elementi, condizione necessaria e sufficiente affinché F ammetta come sommando diretto il suo sottomodulo di torsione T è che l'insieme $\{G(N), \text{Ann}(T)\}$ generi A ($\text{Ann}(T) = \text{annullatore di } T$) ».

BIBLIOGRAFIA

- [1] SERRE J. P.: *Faisceaux algébriques cohérents*. Ann. of Math., 61, 197-278.
- [2] SERRE J. P.: *Sur la cohomologie des variétés algébriques*. Journal de Mathématiques pures et appliquées 1957, Gauthier-Villars, Paris.