

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

CALOGERO VINTI

**L'integrale multiplo del calcolo delle variazioni  
in forma ordinaria come generalizzazione  
dell'approssimazione dell'area di una superficie**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 31 (1961), p. 266-280

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1961\\_\\_31\\_\\_266\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1961__31__266_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

# L'INTEGRALE MULTIPLIO DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI IN FORMA ORDINARIA COME GENE- RALIZZAZIONE DELL'APPROSSIMAZIONE DELL'A- REA DI UNA SUPERFICIE

*Nota (\*) di CALOGERO VINTI (a Palermo)*

## 1. INTRODUZIONE

Lo studio dell'integrale

$$I[u] = \int_R f(x, y, u, p, q) dx dy ,$$

relativamente ai problemi del Calcolo delle Variazioni, è stato oggetto di svariate ricerche, dopo quelle del Weierstrass e del Lebesgue, da parte di molti matematici, tra i quali ricordiamo L. Tonelli ([15], [16])<sup>1)</sup>, S. Cinquni ([2], [4]), C. B. Morrey ([6], [7]); G. Stampacchia ([8], [9]), A. G. Sigalov ([13], [14]).

Abbiamo citato, in ordine di tempo, soltanto pochi autori ed alcuni dei loro lavori, dai quali però si possono trarre tutte quelle informazioni utili per avere un completo quadro bibliografico.

Recentemente J. Serrin ([11], [12]), definendo l'integrale  $I[u]$  come generalizzazione della definizione di area di una superficie

---

(\*) Pervenuta in redazione il 10 aprile 1961.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Palermo.

<sup>1)</sup> I numeri in parentesi quadra si riferiscono ai lavori elencati nella bibliografia riportata alla fine della nota.

secondo Lebesgue, ha affrontato, *ex-novo*, alcuni problemi di minimo del Calcolo delle Variazioni. La definizione d'integrale data da J. Serrin è la seguente:

Sia  $R$  una regione aperta limitata del piano  $(x, y)$  ed  $f(x, y, u, p, q)$  una funzione definita, non negativa, continua per  $(x, y) \in R$ ,  $u, p, q$  qualunque.

a) Se  $u(x, y)$  è una funzione continua in  $R$  assieme alle sue derivate parziali prime, si definisce:

$$I^*[u] = \lim_{D \rightarrow R} \int_D f(x, y, u, u_x, u_y) dx dy,$$

dove  $D$  è una regione chiusa immersa in  $R$ .

b) Se  $u(x, y)$  è continua in  $R$ , si definisce:

$$I_c[u] = \text{estr. inf}_{[K]} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{R_n} f(x, y, u_n, u_{n,x}, u_{n,y}) dx dy,$$

ove  $[K]$  denota la collezione di tutte le successioni  $u_n(x, y)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , che godono delle seguenti proprietà:

1°)  $u_n(x, y)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , sia continua assieme alle sue derivate parziali prime in una regione chiusa  $R_n \subset R$ .

2°)  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = R$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Max}_{(x,y) \in R_n} |u(x, y) - u_n(x, y)| = 0$ .

J. Serrin, onde dare vigore alle precedenti definizioni, stabilisce, tra le altre, la seguente fondamentale proposizione.

TEOREMA S.: Quando la  $f(x, y, u, p, q)$  soddisfa le condizioni:

$\alpha$ ) esistono continue le derivati parziali  $f_p, f_q, f_{pp}, f_{qq}, f_{pq}, f_{px}, f_{py}$ ;

$\beta$ ) è:  $E(x, y, u, p, q; P, Q) \geq 0$  <sup>2)</sup>,  $(P, Q) \neq (p, q)$ ;

<sup>2)</sup> Con  $E(x, y, u, p, q; P, Q)$  si denota la funzione di Weierstrass definita dalla:

$$E(x, y, u, p, q; P, Q) = f(P, Q) - f(p, q) - (P - p) \cdot f_p(p, q) - (Q - q) \cdot f_q(p, q),$$

ove gli argomenti  $(x, y, u)$  di  $f$  sono stati, per brevità, soppressi.

oppure le condizioni:

$\alpha'$ ) esistono continue le derivate parziali  $f_x, f_y$ ;

$\beta'$ ) è:  $E(x, y, u, p, q; P, Q) > 0$ ,  $(P, Q) \neq (p, q)$ ;

allora se  $u(x, y)$  è continua con le sue derivate parziali prime in  $R$ , risulta:

$$I^*[u] = I_c[u].$$

Osserviamo che la definizione d'integrale  $I_c[u]$  presenta gli stessi inconvenienti della definizione di area secondo Lebesgue di cui essa è generalizzazione diretta. È utile ricordare che questi inconvenienti dell'area secondo Lebesgue sono rimediati dai noti teoremi di approssimazione in area. Scopo della nostra ricerca è di dare dell'integrale  $I[u]$  una definizione in armonia con quanto è stato detto per l'area secondo Lebesgue, e di stabilire dei criteri d'equivalenza tra la nostra definizione e quella di J. Serrin. Riflettendo sulla circostanza che con l'impiego delle medie integrali si stabiliscono dei teoremi di approssimazione in area per le superficie in forma ordinaria (T. Radò [10], C. Goffman [5], C. Vinti [17]), sorge spontanea l'idea (E. Baiada [1]) di definire l'integrale  $I[u]$  come generalizzazione di questa proprietà, in modo che nel caso particolare  $f = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$ , risulti, come per l'integrale definito da J. Serrin  $I[u] = \mathcal{A}[u = u(x, y)]$ . La definizione d'integrale da noi proposta è la seguente:

Denotiamo con  $R$  una regione aperta limitata del piano  $(x, y)$ , e sia  $f(x, y, u, p, q)$  una funzione non negativa, definita e continua in tutti i punti  $(x, y) \in R$ ,  $u, p, q$  qualunque.

Detta  $D$  una regione chiusa immersa in  $R$ , denotiamo con  $\lambda > 0$  la minima distanza tra la frontiera di  $D$  e quella di  $R$ .

Se  $u(x, y)$  è una funzione continua in  $R$ , per ogni  $0 < h < \lambda/2$ , la funzione

$$u^{(h)}(x, y) = \frac{1}{(2h)^2} \int_{-h}^h \int_{-h}^h u(x + \varrho, y + \eta) d\varrho d\eta,$$

detta funzione media integrale della  $u(x, y)$ , risulta definita e continua

in  $D$  e ammette in  $D$  le derivate parziali:

$$u_x^{(h)} = \frac{1}{(2h)^2} \int_{-h}^h \{u(x+h, y+\eta) - u(x-h, y+\eta)\} d\eta;$$

$$u_y^{(h)} = \frac{1}{(2h)^2} \int_{-h}^h \{u(x+\varrho, y+h) - u(x+\varrho, y-h)\} d\varrho,$$

le quali sono anch'esse continue in  $D$ .

A causa della continuità della  $f(x, y, u, p, q)$  esiste l'integrale di Riemann:

$$I[u^{(h)}, D] = \int_D f(x, y, u^{(h)}, u_x^{(h)}, u_y^{(h)}) dx dy,$$

e noi porremo <sup>3)</sup>:

$$I_B[u, R] = \lim_{D \rightarrow R} \lim_{h \rightarrow 0} I[u^{(h)}, D] \text{ } ^4).$$

Nel N. 2. mostreremo l'equivalenza tra le definizioni  $I^*[u]$  e  $I_B[u, R]$ ; nel N. 3. mostreremo l'equivalenza tra le definizioni  $I_C[u]$  e  $I_B[u, R]$  limitatamente almeno al caso che la  $f(x, y, u, p, q)$  soddisfi le proprietà:

i) per ogni  $(x, y, u)$ ,  $(x, y) \in R$ ,  $u$  qualsiasi,  $f(x, y, u, p, q)$  risulti convessa in senso lato, secondo Jensen, rispetto a  $(p, q)$ , cioè si abbia:

$$f\left(x, y, u, \frac{p_1 + p_2}{2}, \frac{q_1 + q_2}{2}\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \{f(x, y, u, p_1, q_1) + f(x, y, u, p_2, q_2)\},$$

comunque si scelgano le coppie  $(p_1, q_1)$ ,  $(p_2, q_2)$ .

<sup>3)</sup> Con  $\lim$  si indica il minimo limite.

<sup>4)</sup> La lettera  $B$  vuol richiamare che questa ricerca s'inquadra in una serie di lavori iniziati dal Prof. E. BAIADA.

*ii)* per ogni insieme chiuso e limitato  $C$  dello spazio euclideo  $(x, y, u)$ , avente proiezione  $C_{x,y}$  (sul piano  $(x, y)$ ) immersa in  $R$ , esiste una costante  $M(C)$  tale che risulti:

$$\begin{aligned} |f(x_1, y_1, u_1, p, q) - f(x_2, y_2, u_2, p, q)| &\leq \\ &\leq M(C) \{ |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |u_1 - u_2| \}, \end{aligned}$$

comunque si scelgano i punti  $(x_1, y_1, u_1)$ ,  $(x_2, y_2, u_2)$  in  $C$  e qualunque siano  $p, q$ ;

oppure la proprietà:

I)  $f(x, y, u, p, q)$  risulti convessa in senso lato, secondo Jensen, rispetto al complesso delle sue variabili, cioè si abbia:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{u_1 + u_2}{2}, \frac{p_1 + p_2}{2}, \frac{q_1 + q_2}{2}\right) &\leq \\ &\leq \frac{1}{2} \{f(x_1, y_1, u_1, p_1, q_1) + f(x_2, y_2, u_2, p_2, q_2)\}, \end{aligned}$$

comunque si scelgano  $(x_1, y_1, u_1, p_1, q_1)$ ,  $(x_2, y_2, u_2, p_2, q_2)$ , con  $(x_1, y_1) \in R$ ,  $(x_2, y_2) \in R$ .

Il nostro integrale  $I_B[u, R]$  rappresenta allora un algoritmo per il calcolo dell'integrale  $I_C[u]$ , quando la  $f(x, y, u, p, q)$  soddisfa le condizioni *i)*, *ii)*, oppure la condizione I).

Osserviamo infine che dai nostri teoremi di equivalenza si deduce che:

$$I^*[u] = I_B[u, R] = I_C[u],$$

quando  $u(x, y)$  è continua in  $R$  assieme alle sue derivate parziali prime, e quindi ne segue che il Teorema S. è valido anche quando le condizioni  $\alpha)$ ,  $\beta)$ , o le condizioni  $\alpha')$ ,  $\beta')$  si sostituiscono con le condizioni *i)*, *ii)* o con la condizione I).

## 2. *Equivalenza tra le definizioni $I[u]$ e $I_B[u, R]$ .*

Sia  $u(x, y)$  continua in  $R$  assieme alle sue derivate prime; denotiamo con  $D$  una generica regione chiusa immersa in  $R$ ,

e con  $\lambda > 0$  la minima distanza tra la frontiera di  $D$  e quella di  $R$ .

Per ogni  $0 < h < \lambda/2$  . si ha:

$$u_x^{(h)} = \frac{1}{(2h)^2} \int_{-h}^h \int_{-h}^h u_x(x + \varrho, y + \eta) d\varrho d\eta ,$$

$$u_y^{(h)} = \frac{1}{(2h)^2} \int_{-h}^h \int_{-h}^h u_y(x + \varrho, y + \eta) d\varrho d\eta .$$

A causa della continuità in  $R$  delle funzioni  $u_x$ ,  $u_y$ , risulta:

$$\lim_{h \rightarrow 0} u^{(h)} = u , \quad \lim_{h \rightarrow 0} u_x^{(h)} = u_x , \quad \lim_{h \rightarrow 0} u_y^{(h)} = u_y ,$$

uniformemente in  $D$ ; e per la continuità della  $f(x, y, u, p, q)$  risulta:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x, y, u^{(h)}, u_x^{(h)}, u_y^{(h)}) = f(x, y, u, u_x, u_y)$$

uniformemente in  $D$ .

Ne segue:

$$I_B[u, R] = \lim_{D \rightarrow R} \lim_{h \rightarrow 0} \int_D f(x, y, u^{(h)}, u_x^{(h)}, u_y^{(h)}) dx dy =$$

$$= \lim_{D \rightarrow R} \int_D f(x, y, u, u_x, u_y) dx dy = I^*[u] .$$

3. *Equivalenza tra le definizioni  $I_c[u]$  e  $I_B[u, R]$ .*

**I CASO:** *Sia  $u(x, y)$  continua in  $R$ , e supponiamo che la  $f(x, y, u, p, q)$  soddisfi le condizioni i), ii) del N. 1.*

*Mostreremo le seguenti disuguaglianze:*

$$(1) \quad I_B^*[u, R] \geq I_c[u]$$

$$(2) \quad I_B[u, R] \leq I_c[u] .$$

*dalle quali segue l'equivalenza richiesta.*

Dimostriamo la (1).

Sia  $D$  una generica regione chiusa immersa in  $R$ , e denotiamo con  $h_1, h_2, \dots, h_n, \dots$ , una successione di numeri positivi, decrescente e tendente a zero, con  $h_n < \lambda/2$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , essendo  $\lambda > 0$ , la minima distanza tra la frontiera di  $D$  e quella di  $R$ .

Se  $D_1, D_2, \dots, D_n, \dots$ , è una successione di regioni chiuse completamente immerse in  $D$ , con  $D_n \rightarrow D^0$ , ove  $D^0 = D - \mathcal{F}D$ , poichè la successione  $u^{(h_n)}(x, y)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $(x, y) \in D_n$ , soddisfa le 1°; 2° del N. 1., quando in esse si cambi  $R_n$  in  $D_n$ ,  $R$  in  $D^0$ , si ha manifestamente, tenendo presente la definizione di  $I_\sigma[u, D^0]$ :

$$\begin{aligned} \lim_{\overline{h_n \rightarrow 0}} \int_D f(x, y, u^{(h_n)}, u_x^{(h_n)}, u_y^{(h_n)}) dx dy &\geq \\ &\geq \lim_{\overline{n \rightarrow \infty}} \int_{D_n} f(x, y, u^{(h_n)}, u_x^{(h_n)}, u_y^{(h_n)}) dx dy \geq I_c[u, D^0]. \end{aligned}$$

Poichè quest'ultima disuguaglianza sussiste qualunque sia la successione  $h_n \rightarrow 0$ , possiamo scrivere:

$$\lim_{\overline{h \rightarrow 0}} \int_D f(x, y, u^{(h)}, u_x^{(h)}, u_y^{(h)}) dx dy \geq I_c[u, D^0],$$

e in virtù della semicontinuità inferiore di  $I_\sigma[u]$ <sup>5)</sup>, deduciamo:

$$\lim_{\overline{D \rightarrow R}} \lim_{\overline{h \rightarrow 0}} \int_D f(x, y, u^{(h)}, u_x^{(h)}, u_y^{(h)}) dx dy \geq \lim_{\overline{D^0 \rightarrow R}} I_c[u, D^0] \geq I_\sigma[u],$$

cioè:

$$I_B[u, R] \geq I_\sigma[u].$$

Dimostriamo ora la (2).

Sia  $D$  una generica regione chiusa immersa in  $R$ , e  $\lambda$  la minima distanza tra la frontiera di  $D$  e quella di  $R$ ; è  $\lambda > 0$ . Denotiamo

<sup>5)</sup> J. SERRIN [11] pag. 25 (Teorema 1).



con  $D_1$  la regione chiusa costituita da tutti i punti di  $R$  che distano da almeno un punto di  $D$  di non più di  $\lambda/2$  (è  $D_1 \subset R$  in senso stretto), con  $K$  il massimo della funzione  $|u(x, y)|$  in  $D_1$ , con  $C^*$  l'insieme chiuso:  $[(x, y) \in D_1, -(K+1) \leq u \leq K+1]$ , e ricordando ii) del N. 1. poniamo  $M = M(C^*)$ .

Sia  $\{u_n(x, y)\}$ ,  $(x, y) \in R_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , una qualsivoglia successione che gode delle proprietà 1°), 2°) del N. 1; poichè è  $R_n \rightarrow R$  esiste un  $n_1$  tale che per  $n > n_1$  risulti  $R_n \supset D_1$ . D'ora in avanti supporremo  $n > n_1$ .

Per ogni  $0 < h < \lambda/4$ , denotiamo con  $u_n^{(h)}$  la funzione media integrale di  $u_n(x, y)$  la quale è definita per  $(x, y) \in D_1$ . Le derivate parziali della funzione  $u_n^{(h)}$  sono date, se  $(x, y) \subset D$ , da:

$$u_{n,x}^{(h)} = \frac{1}{(2h)^2} \int_{-h}^h \int_{-h}^h u_{n,x}(x + \varrho, y + \eta) d\varrho d\eta,$$

$$u_{n,y}^{(h)} = \frac{1}{(2h)^2} \int_{-h}^h \int_{-h}^h u_{n,y}(x + \varrho, y + \eta) d\varrho d\eta.$$

Poichè la  $f$  soddisfa la proprietà i) del N. 1., per una nota generalizzazione di una disuguaglianza di Jensen, risulta \*):

$$f(x, y, z, u_{n,x}^{(h)}, u_{n,y}^{(h)}) \leq$$

$$\leq \frac{1}{(2h)^2} \int_{-h}^h \int_{-h}^h f(x, y, z, u_{n,x}(x + \varrho, y + \eta), u_{n,y}(x + \varrho, y + \eta)) d\varrho d\eta,$$

per  $(x, y) \in D$ ,  $z$  qualsivoglia; e da questa segue, per  $z = u_n^{(h)}(x, y)$ :

$$(3) \quad f(x, y, u_n^{(h)}, u_{n,x}^{(h)}, u_{n,y}^{(h)}) \leq$$

$$\leq \frac{1}{(2h)^2} \int_{-h}^h \int_{-h}^h f(x, y, u_n^{(h)}, u_{n,x}(x + \varrho, y + \eta), u_{n,y}(x + \varrho, y + \eta)) d\varrho d\eta,$$

per  $(x, y) \in D$ .

\* Cfr. S. CINQUINI [2] pag. 355; C. VINTI [17] pag. 19.

Intanto per la proprietà 1° del N. 1. la successione  $u_n(x, y)$  tende uniformemente a  $u(x, y)$ , e quindi in corrispondenza ad  $\varepsilon > 0$  (e possiamo supporre  $\varepsilon < M/8$ ) esiste un  $\bar{n}$  tale che per  $n > \bar{n}$  risulti:

$$(4) \quad |u_n(x, y) - u(x, y)| < \varepsilon/M, \quad \text{per } (x, y) \in D_1.$$

Inoltre  $u(x, y)$  è uniformemente continua in  $D_1$  quindi in corrispondenza ad  $\varepsilon$  esiste un  $\bar{h} > 0$  (e possiamo supporre  $\bar{h} < \varepsilon/M$ ,  $\bar{h} < \lambda/4$ ) tale che per  $\varrho^2 + \eta^2 < \bar{h}$  risulti:

$$(5) \quad |u(x + \varrho, y + \eta) - u(x, y)| < \varepsilon/M, \quad \text{per } (x, y) \in D.$$

Poichè dalla (4) si ha:

$$(6) \quad |u_n(x + \varrho, y + \eta) - u(x + \varrho, y + \eta)| < \varepsilon/M,$$

per

$$(x, y) \in D, \quad \varrho^2 + \eta^2 < \bar{h}, \quad n > \bar{n},$$

dalle (4), (5), (6) segue:

$$(7) \quad |u_n(x + \varrho, y + \eta) - u_n(x, y)| \leq \\ \leq |u_n(x + \varrho, y + \eta) - u(x + \varrho, y + \eta)| + \\ + |u(x + \varrho, y + \eta) - u(x, y)| + \\ + |u(x, y) - u_n(x, y)|,$$

per  $(x, y) \in D$ ,  $\varrho^2 + \eta^2 < \bar{h}$ ,  $n > \bar{n}$ .

È poi ovviamente:

$$|u_n^{(h)}(x, y) - u_n(x, y)| \leq \\ \leq \frac{1}{(2\bar{h})^2} \int_{-\bar{h}}^{\bar{h}} \int_{-\bar{h}}^{\bar{h}} |u_n(x + \varrho, y + \eta) - u_n(x, y)| d\varrho d\eta, \quad (x, y) \in D,$$

e da questa, in virtù della (7), si deduce:

$$(8) \quad |u_n^{(h)}(x, y) - u_n(x, y)| < 3\varepsilon/M$$

per  $(x, y) \in D, 0 < h < \bar{h}, n > \bar{n}$ .

Dalle (7) e (8) abbiamo allora:

$$(9) \quad |u_n^{(h)}(x, y) - u_n(x + \varrho, y + \eta)| < 6\varepsilon/M,$$

per  $(x, y) \in D, \varrho^2 + \eta^2 < \bar{h}, h < \bar{h}, n > \bar{n}$ .

Ricordiamo che  $f$  soddisfa la *ii*) del N. 1.; poichè è  $6\varepsilon/M < 1$ , dalla (9) si deduce che per  $(x, y) \in D, h < \bar{h}, n > \bar{n}$ , risulta:  $-K - 1 < u_n^{(h)}(x, y) < k + 1$ , e quindi dalla *ii*) del N. 1., per  $C = C^*$ , essendo  $\bar{h} < \varepsilon/M$ , segue:

$$(10) \quad |f(x, y, u_n^{(h)}(x, y), u_{n,x}(x + \varrho, y + \eta), u_{n,y}(x + \varrho, y + \eta)) - \\ - f(x + \varrho, y + \eta, u_n(x + \varrho, y + \eta), u_{n,x}(x + \varrho, y + \eta), \\ u_{n,y}(x + \varrho, y + \eta))| < 8\varepsilon,$$

per  $(x, y) \in D, \varrho^2 + \eta^2 < \bar{h}, h < \bar{h}, n > \bar{n}$ .

Allora dalla (3) integrando su  $D$  e cambiando l'ordine delle integrazioni, si ha, per  $h < \bar{h}, n > \bar{n}$ :

$$\int_D f(x, y, u_n^{(h)}, u_{n,x}^{(h)}, u_{n,y}^{(h)}) dx dy \leq \frac{1}{(2h)^2} \int_{-\bar{h}}^{\bar{h}} d\varrho \int_{-\bar{h}}^{\bar{h}} d\eta \int_D f(x, y, u_n^{(h)}(x, y), \\ u_{n,x}(x + \varrho, y + \eta), u_{n,y}(x + \varrho, y + \eta)) dx dy,$$

e da quest'ultima, in virtù della (10), si ha, per  $h < \bar{h}, n > \bar{n}$ , la maggiorazione:

$$(11) \quad \int_D f(x, y, u_n^{(h)}, u_{n,x}^{(h)}, u_{n,y}^{(h)}) dx dy \leq \frac{1}{(2h)^2} \int_{-\bar{h}}^{\bar{h}} d\varrho \int_{-\bar{h}}^{\bar{h}} d\eta \int_D f(x + \varrho, y + \eta, \\ u_n(x + \varrho, y + \eta), u_{n,x}(x + \varrho, y + \eta), u_{n,y}(x + \varrho, y + \eta)) dx dy + \\ + 8\varepsilon |D| \leq \frac{1}{(2h)^2} \int_{-\bar{h}}^{\bar{h}} d\varrho \int_{-\bar{h}}^{\bar{h}} d\eta \int_{D(e,\eta)} f(x, y, u_n(x, y), u_{n,x}(x, y), \\ u_{n,y}(x, y)) dx dy + 8\varepsilon |R|,$$

ove  $D(\varrho, \eta)$  è la regione chiusa ottenuta da  $D$  per traslazione del vettore  $(\varrho, \eta)$ .

E poichè, essendo  $h < \lambda/4$ , è  $D(\varrho, \eta) \subset D_1$ , la (11), ricordando che è  $R_n \supset D_1$ , ci dà:

$$(12) \quad \int_D f(x, y, u_n^{(h)}, u_{n,x}^{(h)}, u_{n,y}^{(h)}) dx dy \leq \int_{D_1} f(x, y, u_n, u_{n,x}, u_{n,y}) dx dy + \\ + 8\varepsilon |R| \leq \int_{R_n} f(x, y, u_n, u_{n,x}, u_{n,y}) dx dy + 8\varepsilon |R|,$$

per  $h < \bar{h}$ ,  $n > \bar{n}$ .

Mostriamo ora che per ogni  $\bar{h} < h$  è:

$$(13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f(x, y, u_n^{(h)}, u_{n,x}^{(h)}, u_{n,y}^{(h)}) dx dy = \int_D f(x, y, u^{(h)}, u_x^{(h)}, u_y^{(h)}) dx dy.$$

Fissiamo un  $h < \bar{h}$ , e possiamo sempre supporre  $h < 1$ .

Le funzioni  $u^{(h)}(x, y)$ ,  $u_x^{(h)}(x, y)$ ,  $u_y^{(h)}(x, y)$  sono continue in  $D$ , e posto:

$$K^* = \max_{(x,y) \in D} [\max |u^{(h)}(x, y)|, |u_x^{(h)}(x, y)|, |u_y^{(h)}(x, y)|],$$

poichè la funzione  $f(x, y, u, p, q)$  è uniformemente continua nel campo chiuso  $[(x, y) \in D, |u| \leq K^* + 1, |p| \leq K^* + 1, |q| \leq K^* + 1]$ , ne segue che in corrispondenza a  $\sigma > 0$  esiste un  $\tau(\sigma) > 0$  tale che risulti:

$$(14) \quad |f(x, y, u, p, q) - f(x, y, u_1, p_1, q_1)| < \sigma,$$

per  $|u - u_1| < \tau$ ,  $|p - p_1| < \tau$ ,  $|q - q_1| < \tau$ , con  $(x, y, u, p, q)$ ,  $(x, y, u_1, p_1, q_1)$  appartenenti al campo chiuso considerato.

Ma per  $(x, y) \in D$  si ha:

$$(15) \quad |u_n^{(h)}(x, y) - u^{(h)}(x, y)| \leq \\ \leq \frac{1}{(2h)^2} \int_{-h}^h \int_{-h}^h |u_n(x + \varrho, y + \eta) - u(x + \varrho, y + \eta)| d\varrho d\eta,$$

$$(16) \quad |u_{n,x}^{(h)}(x, y) - u_x^{(h)}(x, y)| \leq \\ \leq \frac{1}{(2h)^2} \int_{-h}^h | [u_n(x+h, y+\eta) - u_n(x-h, y+\eta)] - \\ - [u(x+h, y+\eta) - u(x-h, y+\eta)] | d\eta,$$

$$(17) \quad |u_{n,y}^{(h)}(x, y) - u_y^{(h)}(x, y)| \leq \\ \leq \frac{1}{(2h)^2} \int_{-h}^h | [u_n(x+\varrho, y+h) - u_n(x+\varrho, y-h)] - \\ - [u(x+\varrho, y+h) - u(x+\varrho, y-h)] | d\varrho.$$

E poichè le funzioni  $u_n(x, y)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , soddisfano la proprietà 1° del N. 1., in corrispondenza a  $\tau(\sigma)$  esiste un  $n^*(n^* > \bar{n})$ , tale che si abbia:

$$(18) \quad |u(x, y) - u_n(x, y)| < \tau h, \quad \text{per } (x, y) \in D_1, \quad n > n^*.$$

Dalle (15), (16), (17), (18), per  $(x, y) \in D$ , essendo  $(x+\varrho, y+\eta) \in D_1$ ,  $(x+h, y+\eta) \in D_1$ ,  $(x-h, y+\eta) \in D_1$ ,  $(x+\varrho, y+h) \in D_1$ ,  $(x+\varrho, y-h) \in D_1$ , si ha

$$(15') \quad |u_x^{(h)}(x, y) - u^{(h)}(x, y)| < \tau h < \tau.$$

$$(16') \quad |u_{n,x}^{(h)}(x, y) - u_x^{(h)}(x, y)| < \tau,$$

$$(17') \quad |u_{n,y}^{(h)}(x, y) - u_y^{(h)}(x, y)| < \tau,$$

per  $n > n^*$ ,  $(x, y) \in D$ .

Risulta allora, dalle (14), (15'), (16'), (17'), per  $n > n^*$ , e qualunque sia  $(x, y) \in D$ :

$$|f(x, y, u_n^{(h)}, u_{n,x}^{(h)}, u_{n,y}^{(h)}) - f(x, y, u^{(h)}, u_x^{(h)}, u_y^{(h)})| < \sigma,$$

dalla quale segue immediatamente la (13).

Dalla (12), in virtù della (13), si ha:

$$\int_D f(x, y, u^{(h)}, u_x^{(h)}, u_y^{(h)}) dx dy \leq \\ \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{R_n} f(x, y, u_n, u_{n,x}, u_{n,y}) dx dy + 8\varepsilon |R|,$$

e poichè quest'ultima è vera qualunque sia la successione  $u_n(x, y)$  che gode delle proprietà 1°), 2°) del N. 1., ricordando la definizione di  $I_o[u]$  si deduce la seguente disuguaglianza:

$$\int_D f(x, y, u^{(h)}, u_x^{(h)}, u_y^{(h)}) dx dy \leq I_o[u] + 8\varepsilon |R|.$$

Da quest'ultima segue:

$$I_B[u, R] = \lim_{D \rightarrow R} \lim_{h \rightarrow 0} \int_D f(x, y, u^{(h)}, u_x^{(h)}, u_y^{(h)}) dx dy \leq I_o[u] + 8\varepsilon |R|,$$

e per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$ , la (2) risulta dimostrata.

II CASO: Sia  $u(x, y)$  continua in  $R$  e la  $f(x, y, u, p, q)$  soddisfi la condizione I) del N. 1.

Mostriamo le (1) e (2).

La (1) sussiste perchè è stata dimostrata nel I Caso indipendentemente dalle ipotesi i), ii).

Per mostrare la (2) basta osservare che, con i simboli adoperati nel I Caso, in virtù della convessità globale in senso lato, secondo Jensen, della  $f$  sussiste la seguente disuguaglianza:

$$(19) \quad \int_D f(x, y, u_n^{(h)}, u_{n,x}^{(h)}, u_{n,y}^{(h)}) dx dy \leq \\ \leq \frac{1}{(2h)^2} \int_{-h}^h \int_{-h}^h \int_{D(e,\eta)} f(x, y, u_n, u_{n,x}, u_{n,y}) dx dy \quad ?)$$

È vera quindi la (11) e di conseguenza la (12), e poichè la (13) è stata dimostrata indipendentemente dalle ipotesi i), ii), la (2) risulta dimostrata anche in questo II Caso.

?) La disuguaglianza (19) si trova dimostrata in C. VINTI [17] pagina 23, (23).

## BIBLIOGRAFIA

- [1] BAIADA E.: *Sulla convergenza in lunghezza delle medie integrali*. Annali di Mat. Pura e Applicata. (IV), XLVIII, 1959, 223-228. Tale memoria è stata oggetto di una comunicazione al Congresso dell'U.M.I. tenutosi a Napoli nel 1959.
- [2] CINQUINI S.: *Condizioni sufficienti per la semicontinuità del Calcolo delle Variazioni*. Annali Scuola Norm. Sup. Pisa (2), 2, 1933, 41-58.
- [3] CINQUINI S.: *Sopra una disuguaglianza di Jensen*. Rend. Cir. Mat. Palermo, 58, 1934, 335-358.
- [4] CINQUINI S.: *Sopra l'estremo assoluto degli integrali doppi in forma ordinaria*. Ann. Mat. Pura. Appl. (4), 30, 1949, 249-260.
- [5] GOFFMAN C.: *Convergence in area of integral means*. Amer. J. Math., 77, 1955, 563-574.
- [6] MORREY C. B.: *Multiple integral problems in the calculus of variations and related topics*. Univ. California. Publ. Math. (N. S.), vol. I, 1943.
- [7] MORREY C. B.: *Quasi-convexity and the lower semicontinuity of multiple integrals*. Pac. J. Math., 2, 1952, 25-53.
- [8] STAMPACCHIA G.: *Sopra una classe di funzioni in due variabili. Applicazione agli integrali doppi del calcolo delle Variazioni*. Giorn. Mat. Battaglini (4), 3, (79), 1950, 169-208.
- [9] STAMPACCHIA G.: *Gli integrali doppi del Calcolo delle Variazioni in forma ordinaria*. Atti. Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., ser. VIII, vol. VIII, 1950, 21-26.
- [10] RADÒ T.: *Length and Area*. American Math. Society Colloquium Publications, vol. XXX, 1948, 515-516.
- [11] SERRIN J.: *On a fundamental theorem of the calculus of variations*. Acta Math. 102, 1959, 1-22.
- [12] SERRIN J.: *A new definition of the integral for non parametric problems in the calculus of variations*. Acta Math., 102, 1959, 23-32.
- [13] SIGALOV A. G.: *Integrali doppi del Calcolo delle Variazioni in forma ordinaria, regolari* (in russo). Doklady. Akad. Nauk. S. S. S. R. (N. S.), 73, 1950, 891-894.
- [14] SIGALOV A. G.: *Condizioni per l'esistenza del minimo degli integrali doppi in una regione limitata*. Doklady. Akad. Nauk. S. S. S. R. (N. S.), 8, 1951, 741-744 (in russo).
- [15] TONELLI L.: *Sur la semi-continuité des integrales doubles du calcul des variations*. Acta Math., 53, 1929, 325-346.

- [16] TONELLI L.: *L'estremo assoluto degli integrali doppi.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (2), 2, 1933, 89-130.
- [17] VINTI C.: *Sopra una classe di funzionali che approssimano l'area di una superficie.* Ann. Mat. Pura. Appl. (4), 48, 1959, 237-255.
- [18] VINTI C.: *L'integrale multiplo del Calcolo delle Variazioni e il problema dell'approssimazione delle funzioni.* Ann. Mat. Pura Appl. (4), 52, 1960, 11-25.