

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

DOMENICO BOCCIONI

Condizioni di autodistributività

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 31 (1961), p. 171-197

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1961__31__171_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1961__31__171_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

CONDIZIONI DI AUTODISTRIBUTIVITÀ

Nota () di DOMENICO BOCCIONI (a Padova)*

Si considerino le seguenti quattro eguaglianze:

$$\begin{aligned}x(y + z) &= (xy) + (xz), & (x + y)z &= (xz) + (yz); \\x(yz) &= (xy)(xz), & (xy)z &= (xz)(yz),\end{aligned}$$

dove x, y, z sono elementi di un prefissato insieme G , avente numero cardinale (non necessariamente finito) $\nu \geq 2$. Esse si chiamano: condizioni di distributività di G le prime due (precisamente, nell'ordine, condizione di s -distributività e di d -distributività), condizioni di autodistributività di G le seconde due (precisamente, nell'ordine, condizione di s -autodistributività e di d -autodistributività).

Al variare di x, y, z in G , ciascuna di queste quattro eguaglianze descrive un insieme (costituito da ν^3 condizioni); questi quattro insiemi di condizioni vengono nell'ordine denotati con

$$\Delta_1, \Delta_2; \quad A_1, A_2,$$

e inoltre si pone:

$$\Delta_3 = \Delta_1 \cup \Delta_2, \quad A_3 = A_1 \cup A_2.$$

Nel presente lavoro viene risolto il problema di determinare

(*) Pervenuta in Redazione il 31 Marzo 1961.

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, l'università, Padova.

(per ogni valore di ν) tutti i sottinsiemi indipendenti ed equivalenti (v. n.º 2) a ciascuno dei tre insiemi di condizioni (di distributività) A_1, A_2, A_3 con referenza a quei particolari bisistemi, di sostegno G , (si veda, ad es., l'introduzione di [2]¹⁾) nei quali risulta sempre

$$x \div y = yx.$$

L'interesse di questo problema sta anche nel fatto che esso è equivalente (teor. 1) al problema di determinare tutti i sottinsiemi indipendenti ed equivalenti (v. n.º 1) rispettivamente a ciascuno dei tre insiemi di condizioni (di autodistributività) A_1, A_2, A_3 , con referenza ai gruppoidi di sostegno G ; (diciamo gruppoidi un insieme non vuoto, il sostegno, nel quale sia ovunque definita una operazione univoca binaria). È appunto questo secondo problema che viene direttamente risolto in questa nota (per ogni valore di ν), mediante i teoremi 2, ..., 6, i cui enunciati espongono dettagliatamente i risultati raggiunti. In particolare si è trovato che ciascuno dei due insiemi A_1, A_2 è indipendente se, e soltanto se, $\nu \geq 3$, mentre l'insieme A_3 è indipendente se, e soltanto se, $\nu \geq 5$.

Le condizioni di autodistributività sono state di recente considerate da vari Autori, anche in connessione alla teoria dei quasigruppi (si vedano, ad es., [3], [4], e le referenze ivi citate).

§ 1

1. - Sia dato un insieme G avente numero cardinale (non necessariamente finito) $\nu \geq 2$. Le ν^3 eguaglianze:

$$(1) \quad x(yz) = (xy)(xz) \quad (x, y, z \in G)$$

si diranno *condizioni di s -autodistributività* di G , e il loro insieme

¹⁾ I numeri fra parentesi quadre rimandano alla bibliografia alla fine della nota.

verrà denotato con A_1 . Le 2^3 eguaglianze:

$$(2) \quad (xy)z = (xz)(yz) \quad (x, y, z \in G)$$

si diranno invece *condizioni di d-autodistributività* di G , e il loro insieme verrà denotato con A_2 . Le 2^3 condizioni (1) e (2) si diranno *condizioni di autodistributività* di G , e il loro insieme ($= A_1 \cup A_2$) verrà denotato con A_3 .

Una terna (ordinata) (x, y, z) di elementi di G si dirà *s-auto-distributiva* (risp. *d-autodistributiva*) in un gruppoide (moltiplicativo) G^0 di sostegno G ([1], p. 3), se in G^0 è soddisfatta la *relativa* eguaglianza (1) (risp. (2)).

Una terna (x, y, z) di elementi di G si dirà *s-isolata* (risp. *d-isolata*) in un gruppoide G^0 di sostegno G , se essa non è *s-auto-distributiva* (risp. *d-autodistributiva*) in G^0 mentre tutte le rimanenti terne di elementi di G vi sono invece *s-autodistributive* (risp. *d-autodistributive*).

Un gruppoide G^0 , di sostegno G , si dirà *s-autodistributivo* (risp. *d-autodistributivo*) se in esso sono soddisfatte tutte le condizioni (1) (risp. (2)).

Se il sostegno F di un gruppoide F^0 contiene il sostegno E di un gruppoide E^0 , e se la moltiplicazione di F^0 subordina in E quella di E^0 , allora F^0 dicesi un *sopra-gruppoide* di E^0 (ed E^0 un *sotto-gruppoide* di F^0). Se inoltre l'insieme $F - E$ (degli elementi di F che non appartengono ad E) non è vuoto, F^0 dicesi un *sopra-gruppoide proprio* di E^0 . Evidentemente:

I) Se F^0 è un *sopra-gruppoide proprio* di E^0 , e se esiste un $w \in F - E$ tale che (in F^0) si abbia

$$(3) \quad wx = xr = w,$$

per ogni $v \in F - E$ e per ogni $x \in F$, allora ogni terna di elementi di F fra i quali vi sia almeno un elemento di $F - E$ è *s-autodistributiva* e *d-autodistributiva* (in F^0).

È pure evidente che:

II) Se due gruppidi sono opposti ([1], n.º 3), e se la terna (x, y, z) è *s-autodistributiva* (risp. *d-autodistributiva*) in uno di

essi, allora la terna « opposta » (z, y, x) è d -autodistributiva (risp. s -autodistributiva) nell'altro.

Per un sottinsieme *indipendente* (o costituito da condizioni *indipendenti*) di un certo insieme non vuoto di condizioni (quali ad es. le (1), (2)) relative agli elementi di G e interpretabili in un gruppoide di sostegno G , intenderemo un sottinsieme tale che, fissata una sua condizione qualsiasi, esiste sempre un gruppoide di sostegno G nel quale la condizione fissata non è soddisfatta mentre tutte le rimanenti condizioni del sottinsieme stesso vi sono invece soddisfatte.

Diremo che due sottinsiemi dell'insieme di condizioni considerato nel preced. capoverso sono *equivalenti* (o che sono costituiti da condizioni *equivalenti*), e che ognuno è *equivalente* all'altro, se il verificarsi delle condizioni di uno qualsiasi di essi in un gruppoide G° di sostegno G implica sempre (qualunque sia G°) il verificarsi in G° delle condizioni dell'altro.

Studieremo nel seguito n.° 3 e successivi) ciascuno, A_i , dei tre insiemi di condizioni A_1, A_2, A_3 , determinando (per ogni valore di ν) tutti i suoi sottinsiemi, A_i , indipendenti e ad esso equivalenti.

2. - È chiaro che un gruppoide è commutativo (cioè in esso risulta sempre $xy = yx$) se, e soltanto se, esso coincide col suo opposto ([1], n.° 3).

Le definizioni di sottinsieme *n-indipendente* (o costituito da condizioni *n-indipendenti*) e di sottinsiemi *n-equivalenti* si deducano risp. dal terzult. e penult. capoverso del n.° preced. leggendo « *n-indipendente(i)* » invece di « *indipendente(i)* », « *gruppoide non commutativo* » invece di « *gruppoide* », « *n-equivalenti(e)* » invece di « *equivalenti(e)* ».

Nel seguito dimostreremo (si vedano le fini delle dimostrazioni dei teoremi successivi al teorema 1) che, per ogni valore di ν :

III) I sottinsiemi, A'_i , dell'insieme A_i (n.° 1) che sono *indipendenti* e ad esso *equivalenti* sono pure gli unici sottinsiemi di A_i *n-indipendenti* e ad esso *n-equivalenti*. ($i = 1, 2, 3$.)

Per un *o-bisistema* intenderemo un bisistema ([1], n.º 1) i cui gruppoidi additivo e moltiplicativo ([1], n.º 3) sono opposti (quindi, necessariamente, non commutativi), di modo che in esso risulta sempre

$$(4) \quad x + y = yx.$$

Facendo corrispondere ad ogni *o-bisistema* di sostegno G (n.º 1) il gruppoide moltiplicativo dell'*o-bisistema* stesso, si ottiene una corrispondenza biunivoca fra l'insieme degli *o-bisistemi* e quello dei gruppoidi non commutativi di sostegno G . Un *o-bisistema* di sostegno G e il corrispondente gruppoide non commutativo si diranno *associati* (l'uno all'altro).

Denotiamo con

$$\Delta_1, \quad \Delta_2, \quad \Delta_3$$

rispettivamente l'insieme delle 2^s condizioni di *s*-distributività di G ([1], p. 3), l'insieme delle 2^s condizioni di *d*-distributività di G ([1], p. 22), l'insieme $(= \Delta_1 \cup \Delta_2)$ delle 2^s condizioni di distributività di G ([1], p. 26).

Le definizioni di sottinsieme *o-indipendente* (o costituito da condizioni *o-indipendenti*) e di sottinsiemi *o-equivalenti* si deducano risp. dal terzult. e penult. capoverso del n.º preced. leggendo « *o-indipendente(i)* » invece di « *indipendente(i)* », « *o-bisistema* » invece di « *gruppoide* », « *o-equivalenti(e)* » invece di « *equivalenti(e)* ».

Diremo *associate* (l'una all'altra) le due seguenti condizioni, risp. di *s*-autodistributività e di *s*-distributività di G :

$$(5) \quad x(yz) = (xy)(xz), \quad x(z + y) = (xz) + (xy),$$

relative risp. alle due terne $((2, 3)$ -opposte) (x, y, z) e (x, z, y) di elementi di G .

Diremo pure *associate* (l'una all'altra) le due seguenti altre condizioni, risp. di *d*-autodistributività e di *d*-distributività di G :

$$(6) \quad (xy)z = (xz)(yz), \quad (y + x)z = (yz) + (xz),$$

relative risp. alle due terne $((1, 2)\text{-opposte})$ (x, y, z) e (y, x, z) di elementi di G . Evidentemente (v. (4)):

IV) *Una condizione di distributività di G è soddisfatta in un o-bisistema di sostegno G se, e soltanto se, la condizione di autodistributività ad essa associata è soddisfatta nel gruppoide non commutativo associato all'o-bisistema.*

Dalla IV) segue facilmente che, se A'_i è un sottinsieme o -indipendente di A_i a questo o -equivalente, le condizioni di autodistributività associate alle condizioni di distributività costituenti A'_i formano un sottinsieme n -indipendente, A'_i , di A_i ($n.^\circ 1$) a questo n -equivalente: e viceversa ($i = 1, 2, 3$). Quindi, per la III), vale il seguente

TEOREMA 1: *Sia G un insieme avente numero cardinale $v \geq 2$, ed i simboli A_1, A_2, A_3 e A_1, A_2, A_3 abbiano il significato chiarito risp. in questo n.º (7º capov.) e nel precedente (1º capov.). Allora tutti i sottinsiemi A'_i dell'insieme A_i che sono o -indipendenti ed o -equivalenti a A_i si ottengono nel modo seguente: Si consideri uno qualsiasi, A'_i , dei sottinsiemi dell'insieme A_i che sono indipendenti ed equivalenti ad A_i ($n.^\circ 1$). Le condizioni di distributività associate (v. (5), (6)) alle condizioni di autodistributività costituenti A'_i formano appunto un sottinsieme o -indipendente, A'_i , di A_i a questo o -equivalente. ($i = 1, 2, 3$.)*

I sottinsiemi A'_i di cui si parla in questo teorema 1 verranno determinati tutti, per ogni valore di v , mediante i teoremi, 2, ..., 6, dei numeri successivi. Quindi i teoremi 1, 2, ..., 6 risolvono completamente il problema della determinazione di tutti i sottinsiemi A'_i .

3. - Fissiamo tre elementi distinti, a, b, c , dell'insieme G ($n.^\circ 1$), l'ultimo dei quali, c , presentandosi soltanto se $v > 2$. Con G^3 denotiamo l'insieme delle v^3 terne (ordinate) di elementi di G .

Pensiamo G^3 suddiviso nelle classi, a due a due disgiunte, delle quali si parla nel n.º 2 di [1] (ove si legga G invece di B). Ognuna di queste classi verrà chiamata un *tipo* (di G^3), ed il

simbolo

$$[x, y, z]$$

denoterà il tipo contenente la terna (x, y, z) . I tipi sono cinque se $r > 2$, quattro se $r = 2$.

L'insieme costituito dagli elementi distinti $p, q, r, \dots$ verrà denotato con $\{p, q, r, \dots\}$.

V) *Ciascuna delle tre terne (a, a, b) , (b, a, a) , (a, b, c) è s -isolata (n.º 1) in un gruppoide d -autodistributivo e non commutativo di sostegno $\{a, b, c\}$.*

Infatti (cfr. [1], p. 8, ult. capov.), si riconosce facilmente che (a, a, b) è s -isolata nel 1º, (b, a, a) nel 2º, e (a, b, c) nel 3º dei tre gruppoidi definiti risp. delle seguenti tabelle:

(7)		a	b	c		a	b	c		a	b	c
		a	c	b	c	a	a	c	c	a	a	c
		b	c	c	c	b	b	c	c	b	b	b
		c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c

e che questi tre gruppoidi sono appunto d -autodistributivi.

VI) *La terna (a, b, a) è contemporaneamente s -isolata e d -isolata (n.º 1) in un gruppoide non commutativo di sostegno $\{a, b, c\}$.*

Infatti (a, b, a) è s -isolata e d -isolata nel gruppoide definito dalla seguente tabella:

(8)		a	b	c
	a	a	c	c
	b	a	b	c
	c	c	c	c

come agevolmente si verifica (cfr. [1], p. 8, ult. capov.).

VII) *La terna (a, a, a) è s -isolata (n.º 1) in un gruppoide non commutativo di sostegno $\{a, b, c\}$.*

Infatti (cfr. [1], p. 8, ult. capov.), si riconosce facilmente che (a, a, a) è s -isolata nel gruppoide definito dalla seguente

tabella:

		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>c</i>
(9)	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>

VIII) *Se il numero cardinale ν dell'insieme G è ≥ 3 , ogni terna di elementi di G è s -isolata (n.º 1) in un gruppoide non commutativo di sostegno G .*

Infatti, ciò risulta agevolmente dalle tre precedenti proposizioni V), VI), VII) e dalla I) (n.º 1), con un ragionamento analogo a quello fatto nel n.º 7 di [1].

VIII') *Se il numero cardinale ν dell'insieme G è ≥ 3 , ogni terna di elementi di G è d -isolata (n.º 1) in un gruppoide non commutativo di sostegno G .*

Infatti, ciò segue subito dalla VIII), per mezzo della II) del n.º 1.

4. - Esaminiamo adesso il caso $\nu = 2$, dimostrando che:

IX) *In un gruppoide G^0 di sostegno $\{a, b\}$ la terna (a, a, a) è s -autodistributiva se, e soltanto se, vi è s -autodistributiva la terna (a, b, b) .*

Infatti, supponiamo dapprima che (a, a, a) non sia s -autodistributiva in G^0 . Allora da $a(aa) \neq (aa)(aa)$ segue $aa \neq a$, cioè $aa = b$, e segue inoltre $ab \neq bb$, ossia $(ab, bb) = (a, b)$, (b, a) (v. [1], p. 10, 2ª parte del penult. capov.), quindi si trova appunto, in ciascuno di questi due casi, che (a, b, b) non è s -autodistributiva.

Viceversa, supponiamo ora che (a, b, b) non sia s -autodistributiva in G^0 . Allora $a(bb) \neq (ab)(ab)$ implica $(ab, bb) = (a, b)$, (b, a) ed implica inoltre, in ciascuno di questi due casi, $aa = b$, quindi si trova appunto, in entrambi i casi, che (a, a, a) non è s -autodistributiva.

X) *In un gruppoide G^0 di sostegno $\{a, b\}$ la terna (a, a, b) è s -autodistributiva se, e soltanto se, vi è s -autodistributiva la terna (a, b, a) .*

Infatti, se (a, a, b) non è s -autodistributiva in G^0 , da $a(ab) \neq (aa)(ab)$ segue $(aa, ab) = (b, a)$, (b, b) e segue inoltre, nel 1° di questi due casi (cioè se $aa = b$, $ab = a$), $ba = a$, e nel 2° (cioè se $aa = b$, $ab = b$), $bb = a$, quindi si trova appunto, in entrambi i casi, che (a, b, a) non è s -autodistributiva.

Viceversa, se (a, b, a) non è s -autodistributiva in G^0 , allora, se $ba = b$, da $a(ba) \neq (ab)(aa)$ segue $aa = b$, $ab = b$, $bb = a$, quindi si trova appunto che (a, a, b) non è s -autodistributiva; se, invece, $ba = a$, da $a(ba) \neq (ab)(aa)$ segue $(aa, ab) = (b, a)$, (b, b) e segue inoltre, nel 2° di questi due casi (cioè se $aa = b$, $ab = b$), $bb = a$, quindi si trova appunto, in ciascuno di questi due casi, che (a, a, b) non è s -autodistributiva.

XI) *In un gruppoide G^0 di sostegno $\{a, b\}$ la terna (b, b, b) è s -autodistributiva se, e soltanto se, vi è s -autodistributiva la terna (b, a, a) .*

XII) *In un gruppoide G^0 di sostegno $\{a, b\}$ la terna (b, b, a) è s -autodistributiva se, e soltanto se, vi è s -autodistributiva la terna (b, a, b) .*

Infatti, queste due proposizioni XI) e XII) sono un'immediata conseguenza risp. delle IX) e X) applicate al gruppoide, di sostegno $\{a, b\}$, immagine isomorfa di G^0 (cfr. [1], n.º 2) mediante la corrispondenza $a \rightarrow b$, $b \rightarrow a$.

XIII) *Se in un gruppoide di sostegno $\{a, b\}$ sono s -autodistributive entrambe le terne (a, a, a) e (b, b, b) , allora vi sono s -autodistributive entrambe le terne (a, a, b) e (b, b, a) .*

Infatti, supponiamo dapprima che, in un gruppoide G^0 di sostegno $\{a, b\}$, la terna (a, a, b) non sia s -autodistributiva. Allora si presenta necessariamente (v. dimostraz. della X)) uno dei due casi seguenti: $aa = b$, $ab = a$, $ba = a$, oppure $aa = b$, $ab = b$, $bb = a$. Ebbene, in ciascuno di questi due casi (distinguendo i due sottocasi $bb = a$, b nel 1° caso, $ba = a$, b nel 2°), si trova

appunto che almeno una delle due terne (a, a, a) , (b, b, b) non è s -autodistributiva in G^0 .

Inoltre, se in un gruppoide di sostegno $\{a, b\}$ non è s -autodistributiva la terna (b, b, a) , allora non vi è appunto s -autodistributiva almeno una delle due terne (a, a, a) , (b, b, b) . E invero, ciò risulta immediatamente (cfr. dimostraz. della XII)) dal risultato del preced. capoverso.

Diremo che un sottinsieme di G^3 (n.º 3) è s -isolato (risp. d -isolato) in un gruppoide G^0 di sostegno G , se le terne costituenti il sottinsieme stesso non sono s -autodistributive (risp. d -autodistributive) in G^0 , mentre tutte le rimanenti terne di elementi di G vi sono invece s -autodistributive (risp. d -autodistributive).

XIV) *Ciascuna delle due classi C_1 e C_3 , considerate nel n.º 8 di [1], è s -isolata in un gruppoide d -autodistributivo e non commutativo di sostegno $\{a, b\}$.*

Infatti C_1 è s -isolata nel gruppoide d -autodistributivo e non commutativo 14 (v. [1], n.º 10), C_3 è s -isolata nell'immagine isomorfa del gruppoide 14 mediante la corrispondenza $a \rightarrow b$, $b \rightarrow a$.

XV) *Ognuna delle due terne costituenti la classe C'_i , considerata nel n.º 12 di [1], è d -autodistributiva in un gruppoide di sostegno $\{a, b\}$ se, e soltanto se, vi è d -autodistributiva l'altra ($i = 1, 2, 3, 4$).*

XIII') *Se in un gruppoide di sostegno $\{a, b\}$ sono d -autodistributive entrambe le terne (a, a, a) e (b, b, b) , allora vi sono d -autodistributive entrambe le terne (b, a, a) e (a, b, b) .*

XIV') *Ciascuna delle due classi C'_1 e C'_3 , considerate nel n.º 12 di [1], è d -isolata in un gruppoide s -autodistributivo e non commutativo di sostegno $\{a, b\}$.*

Infatti, per mezzo della II) del n.º 1, la XV) si ottiene subito dalle quattro proposiz. IX), ..., XII), la XIII') dalla XIII), e la XIV') dalla XIV), (cfr. [1], p. 22, ult. capov.).

5. - Ormai siamo in grado di concludere intanto lo studio dei due insiemi di condizioni A_1 ed A_2 (n.º 1) mediante i due teoremi seguenti.

TEOREMA 2: *L'insieme A_1 , delle v^3 condizioni di s-autodistributività (1) di un insieme G avente numero cardinale v , è indipendente se, e soltanto se, $v \geq 3$. Se $v = 2$, e $G = \{a, b\}$, tutti i sottinsiemi A'_1 di A_1 che sono indipendenti ed equivalenti ad A_1 si ottengono nel modo seguente: si scelga in ciascuna delle due classi*

$$(10) \quad C_1 = \{(a, a, a), (a, b, b)\}, \quad C_3 = \{(b, b, b), (b, a, a)\}$$

una qualunque delle due terne che la costituiscono; le due condizioni di s-autodistributività relative alle terne così scelte costituiscono appunto un sottinsieme A'_1 (di A_1) indipendente ed equivalente ad A_1 .

TEOREMA 2': *L'insieme A_2 , delle v^3 condizioni di d-autodistributività (2) di un insieme G avente numero cardinale v , è indipendente se, e soltanto se, $v \geq 3$. Se $v = 2$, e $G = \{a, b\}$, tutti i sottinsiemi A'_2 di A_2 che sono indipendenti ed equivalenti ad A_2 si ottengono nel modo seguente: si scelga in ciascuna delle due classi*

$$11) \quad C'_1 = \{(a, a, a), (b, b, a)\}, \quad C'_3 = \{(b, b, b), (a, a, b)\}$$

una qualunque delle due terne che la costituiscono; le due condizioni di d-autodistributività relative alle terne così scelte costituiscono appunto un sottinsieme A'_2 (di A_2) indipendente ed equivalente ad A_2 .

Dimostrazione: Si ottiene facilmente, in base alle due ultime proposizioni (VIII) e VIII') del n.º 3 e a quelle del n.º 4. Anzi, da queste stesse proposizioni si ottiene anche la dimostrazione della prima parte ($i = 1, 2$) della III) del n.º 2.

§ 2

6. - Studieremo adesso l'insieme A_3 delle $2v^3$ condizioni di autodistributività di G (n.º 1).

XVI) *La terna (a, a, a) è s-isolata (n.º 1) in un gruppoide d-autodistributivo e non commutativo di sostegno $\{a, b, c, d\}$.*

Infatti (cfr. [1], p. 8, ult. capov.), un tale gruppoide è ad es. quello così definito: $aa = b$, $ab = c$, ogni altro prodotto è $= d$.

XVII) *La terna (a, b, a) è s -isolata (n.º 1) in un gruppoide d -autodistributivo e non commutativo di sostegno $\{a, b, c, d, e\}$.*

Infatti (cfr. [1], p. 8, ult. capov.), un tale gruppoide è ad es. quello così definito: $ac = d$, $ba = c$, ogni altro prodotto è $= e$.

XVIII) *Se il numero cardinale ν dell'insieme G è ≥ 5 , ogni terna di elementi di G è s -isolata (n.º 1) in un gruppoide d -autodistributivo e non commutativo di sostegno G .*

Infatti, ciò risulta facilmente dalla V) (n.º 3), dalle precedenti XVI), XVII) e dalla I) (n.º 1), con un ragionamento analogo a quello fatto nel n.º 7 di [1].

XVIII') *Se il numero cardinale ν dell'insieme G è ≥ 5 , ogni terna di elementi di G è d -isolata (n.º 1) in un gruppoide s -autodistributivo e non commutativo di sostegno G .*

Infatti, ciò segue subito dalla XVIII), per mezzo della II) del n.º 1 (cfr. [1], p. 28, 3º capov.).

TEOREMA 3: *L'insieme A_3 , delle $2\nu^3$ condizioni di autodistributività (1) e (2) di un insieme G avente numero cardinale ν , è indipendente (n.º 1) se, e soltanto se, $\nu \geq 5$.*

Dimostrazione: La prima parte di questo teorema è contenuta nelle XVIII) e XVIII'); la seconda parte (« soltanto se ») sarà implicita nei teoremi, 4, 5, 6, dei numeri successivi. Le XVIII) e XVIII') dimostrano anche la seconda parte ($i = 3$) della III) del n.º 2, per $\nu \geq 5$.

7. - Dimosteremo in questo numero che:

XIX) *Non esiste alcun gruppoide di sostegno $G = \{a, b, c, d\}$ nel quale tutte le terne (di elementi di G) non appartenenti al tipo $[a, b, a]$ (n.º 3) siano s -autodistributive e d -autodistributive, cioè nel quale si abbia:*

$$(12) \quad (x, y, z) \notin [a, b, a] \rightarrow x(yz) = (xy)(xz), \quad (xy)z = (xz)(yz),$$

e nel quale contemporaneamente risulti:

$$(13) \quad a(ba) \neq (ab)(aa),$$

$$(14) \quad (ab)a = (aa)(ba), \quad (ac)a = (aa)(ca), \quad (ad)a = (aa)(da).$$

Supponiamo perciò che G^0 sia un gruppoide di sostegno $G = \{a, b, c, d\}$ nel quale valgano le (12), (13), (14), e dimostriamo, in ciascuno dei sette casi seguenti:

$$(15) \quad (aa, ab) = (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c), (c, d)$$

(distinguendo eventualmente alcuni sottocasi), l'assurdità di questa ipotesi.

Una volta dimostrato ciò, avremo appunto dimostrato la XIX), in quanto: i) ciascuno degli ulteriori cinque casi possibili: $(aa, ab) = (b, d), (d, a), (d, b), (d, c), (d, d)$ è immediatamente riconducibile ad uno dei precedenti (15) per isomorfismo, mediante la corrispondenza $a \rightarrow a, b \rightarrow b, c \rightarrow d, d \rightarrow c$ (ad es. l'esistenza di un gruppoide di sostegno $G = \{a, b, c, d\}$ in cui valgano le (12), (13), (14) ed in cui ulteriormente risulti $aa = b, ab = d$ implicherebbe l'esistenza di un G^0 , sua immagine isomorfa mediante la suddetta corrispondenza, in cui varrebbe il terzo dei casi (15)); ii) ciascuno dei residui quattro casi possibili: $(aa, ab) = (a, a), (a, b), (a, c), (a, d)$ si rivela assurdo a priori (se invero valessero le (12), (13), (14) e fosse inoltre $aa = a$, la (13) e la (14)₁ implicherebbero risp. $a(ba) \neq (ab)a, (ab)a = a(ba)$).

Per comodità espositiva, denoteremo coi simboli

$$(16) \quad s(x, y, z), \quad d(x, y, z)$$

rispettivamente l'eguaglianza (1) e l'eguaglianza (2) (n.º 1), cioè la condizione di s -autodistributività e la condizione di d -autodistributività relative alla terna (x, y, z) (di elementi di G).

1) In G^0 risulti

$$aa = b, \quad ab = a.$$

Allora $s(a, a, a)$ implica $bb = a$, e quindi $d(a, a, a)$ comporta $ba = a$. Se ne trae $(ab)a \neq (aa)(ba)$, il che (per la (14)₁) è assurdo.

2) In G^0 risulti

$$aa = b, \quad ab = b.$$

Allora $s(a, a, a)$ implica $bb = b$, e quindi $d(a, a, a)$ comporta $ba = b$. Se ne trae $a(ba) = (ab)(aa)$, il che (per la (13)) è assurdo.

3) In G^0 risulti

$$aa = b, \quad ab = c.$$

Allora $s(a, a, a)$ implica $bb = c$, quindi $d(a, a, a)$ comporta $ba = c$. Se ne trae, in virtù della (13) e della $d(a, b, b)$ risp.: $ac \neq cb$, $cb = cc$, donde

$$ac \neq cc.$$

Ma $s(a, b, b)$ implica invece $ac = cc$, quindi l'assurdo.

4) In G^0 risulti

$$aa = c, \quad ab = a.$$

Allora $s(a, b, b)$, $d(a, b, b)$ implicano $c = aa = (ab)(ab) = a(bb) = (ab)(bb) = (ab)b = ab = a$, il che è assurdo.

5) In G^0 risulti

$$aa = c, \quad ab = b.$$

Allora $s(a, a, b)$ comporta $cb = b$, quindi $s(a, a, a)$, $d(a, a, b)$ implicano risp.

$$ac = cc, \quad bb = b.$$

Perciò dalla diseuguaglianza $a(ba) \neq (ab)(aa) = b(aa) = (ba)(ba)$, conseguenza delle (13), $s(b, a, a)$, si trae successivamente

$$ba = d, \quad ad \neq dd,$$

quindi $s(b, a, a)$, $d(b, b, a)$ e la $(14)_1$ implicano risp.

$$bc = dd, \quad dd = d, \quad cd = d,$$

e da queste risulta

$$bc = d.$$

Poichè (per quanto sopra) $ad \neq d$, $d(a, a, d)$ comporta successivam.

$$ad = c, \quad ce = d, \quad ac = d,$$

(l'ultima risultando dalla $ac = ce$), mentre $s(b, c, c)$ implica

$$bd = d.$$

Ma allora $s(a, b, c)$ comporta $c = ad = a(bc) = (ab)(ac) = bd = d$, il che è assurdo.

6) In G^0 risulti

$$aa = c, \quad ab = c.$$

Allora dalle $s(a, a, a)$, $d(a, a, a)$, $d(a, a, b)$ si trae

$$ac = ca = cc = cb,$$

e quindi $d(a, a, c)$ e la (13) implicano risp.

$$ac \neq a, \quad ba \neq c.$$

Distinguiamo i tre sottocasi $ac = b, c, d$.

6₁) Sia inoltre

$$ac = b.$$

Allora $cc = b$, mentre $d(a, a, c)$ implica $bb = b$, e quindi $s(a, b, b)$ comporta $cc = c$; donde l'assurdo.

6₂) Sia inoltre

$$ac = c.$$

Allora dalla (13) segue (poichè $cc = c$):

$$ba = d, \quad ad \neq c,$$

quindi $s(c, b, a)$, $s(a, a, d)$ comportano successivam. (poichè $cb = ca = c$):

$$cd = c, \quad ad \neq d,$$

e perciò le (14)₃, $d(a, d, d)$ implicano successivam.

$$ad = a, \quad dd = d.$$

Ma allora $s(a, d, d)$ comporta $a = ad = a(dd) = (ad)(ad) = aa = c$, il che è assurdo.

6₃) Sia inoltre

$$ac = d.$$

Allora $d(a, a, c)$ implica

$$dd = d;$$

quindi dall'eguaglianza $(ac)b = (ab)(cb) = c(cb) = (cc)(cb) = dd$, conseguenza delle $d(a, c, b)$, $s(c, c, b)$, $cc = cb = ac$, segue $db = d$; donde, per la $d(a, c, b)$, risulta

$$cd = d.$$

Poichè $cx = d$ ($x \in G$), dalle $s(a, a, d)$, $s(a, c, b)$, segue risp.

$$ad \neq a, \quad ad \neq b; \quad ad = dc,$$

quindi l'eguaglianza $d(ad) = (ac)(ad) = a(cd) = ad = a(ac) = (aa)(ac) = c(ac) = d$, conseguenza delle $s(a, c, d)$, $s(a, a, c)$, comporta $ad \neq c$ ($ad = c$ implicherebbe $d(ad) = dc = ad = c$), ossia

$$ad = d.$$

Quindi, poichè $d(b, a, a)$ implica $ba \neq a$, dalle (13), $d(b, a, a)$ segue successivam.

$$ba = b, \quad bc = b,$$

e perciò $s(b, a, a)$ comporta

$$bb = b.$$

Dalla $s(a, b, b)$ segue allora $c = d$, il che è assurdo.

7) In G^0 risulti

$$aa = c, \quad ab = d.$$

Allora $s(a, a, a)$, $d(a, a, a)$, $s(a, a, b)$, $d(a, a, b)$ implicano

$$ac = ca = ce, \quad ad = ed, \quad cb = dd,$$

quindi $d(a, a, c)$, $d(b, b, b)$, $d(a, a, d)$ comportano

$$ac \neq a, \quad bb \neq a, \quad ad \neq a.$$

Distinguiamo i tre sottocasi $ac = b, c, d$.

7₁) Sia inoltre

$$ac = b.$$

Allora $d(a, a, c)$, $s(a, a, c)$ implicano risp.

$$bb = b, \quad cb = d,$$

donde $dd = d$; quindi $d(c, c, b)$ comporta $b = d$, il che è assurdo.

7₂) Sia inoltre

$$ac = c.$$

Allora $d(c, c, b)$ e l'eguaglianza $a(cb) = (ac)(ab) = c(ab) = (ca)(cb) = c(cb)$ (conseguenza delle $s(a, c, b)$, $s(c, a, b)$) implicano risp.

$$cb \neq a, \quad cb \neq b.$$

Distinguiamo i due sottocasi $cb = c, d$.

7_{2,1}) Sia inoltre

$$cb = c.$$

Allora $s(c, a, b)$, $s(a, b, b)$ implicano risp. (si ricordi che $d\bar{d} = cb$):

$$c\bar{d} = c, \quad a\bar{d} = c; \quad bb \neq b,$$

e quindi $d(a, c, b)$, la (13), $d(b, a, a)$, $s(b, c, c)$ comportano successivam.

$$dc = c, \quad ba = b, \quad bc = b, \quad bb = b,$$

donde l'assurdo ($b \neq b$).

$\tau_{2,2}$) Sia inoltre

$$cb = d.$$

Allora $s(d, c, c)$ e l'eguaglianza $(cb)c = (cb)(ca) = c(ba) = (ca)(ba) = (cb)a$ (conseguenza delle $s(c, b, a)$, $d(c, b, a)$) implicano risp.

$$dc \neq a, \quad dc = da.$$

Distinguiamo perciò i tre sottocasi $da = b, c, d$.

$\tau_{2,2,1}$) Sia inoltre

$$da = b.$$

Allora la $(14)_1$ implica successivam. (si ricordi che $c\bar{d} = a\bar{d}$):

$$ba = d, \quad c\bar{d} = b, \quad a\bar{d} = b,$$

quindi la (13) comporta $a\bar{d} \neq b$, donde l'assurdo.

$\tau_{2,2,2}$) Sia inoltre

$$da = c.$$

Allora le $(14)_1$, (13) implicano risp.

$$ba \neq b; \quad ba = d, \quad a\bar{d} \neq c,$$

quindi la $(14)_1$ comporta (si ricordi che $c\bar{d} = a\bar{d}$):

$$c\bar{d} = c, \quad a\bar{d} = c,$$

donde l'assurdo ($c \neq c$).

7_{2.2.3}) Sia inoltre

$$da = d.$$

Allora le (14)₁, (13) implicano risp.

$$ba \neq a, \quad ba \neq c; \quad ba = d, \quad ad \neq d,$$

quindi la (14)₁ comporta (si ricordi che $cd = ad$):

$$cd = d, \quad ad = d,$$

donde l'assurdo ($d \neq d$).

7₃) Sia inoltre

$$ac = d.$$

Allora $d(a, a, c)$ comporta (si ricordi che $cc = ac$, $dd = cb$):

$$dd = d, \quad cb = d,$$

quindi $s(c, a, b)$, $d(c, c, c)$ e la (13) implicano successivam. (ricordando che $cd = ad$, $ca = ac$):

$$ad = d, \quad dc = d, \quad ba = a,$$

e perciò dalla $d(b, a, a)$ segue $c = d$, il che è assurdo.

8. - Pensiamo ripartite le ventiquattro condizioni di autodistributività dell'insieme $\{a, b, c, d\}$ relative alle terne del tipo $[a, b, a]$ (n.º 3) nelle seguenti otto classi (si ricordino le notazioni (16), n.º 7):

$$\begin{aligned} K_1 &= \{s(a, b, a), s(a, c, a), s(a, d, a)\}, \\ K'_1 &= \{d(a, b, a), d(a, c, a), d(a, d, a)\}, \\ K_2 &= \{s(b, a, b), s(b, c, b), s(b, d, b)\}, \\ K'_2 &= \{d(b, a, b), d(b, c, b), d(b, d, b)\}, \\ K_3 &= \{s(c, a, c), s(c, b, c), s(c, d, c)\}, \\ K'_3 &= \{d(c, a, c), d(c, b, c), d(c, d, c)\}, \\ K_4 &= \{s(d, a, d), s(d, b, d), s(d, c, d)\}, \\ K'_4 &= \{d(d, a, d), d(d, b, d), d(d, c, d)\}. \end{aligned}$$

XX) *Se in un gruppoide di sostegno $\{a, b, c, d\}$ sono s -autodistributive e d -autodistributive tutte le terne non appartenenti al tipo $[a, b, a]$ (n.º 3) e se, inoltre, vi sono soddisfatte le tre condizioni della classe K'_i (risp. K_i), allora vi sono pure soddisfatte le tre condizioni della classe K_i (risp. K'_i). ($i = 1, 2, 3, 4$.)*

Infatti, ciò segue facilmente dalla XIX) (n.º 7), considerando opportune immagini isomorfe (risp. il gruppoide opposto) del gruppoide in questione, e ricordando la II) del n.º 1.

XXI) *La terna (a, b, a) è s -isolata (n.º 1) in un gruppoide non commutativo, di sostegno $\{a, b, c, d\}$, nel quale la terna (a, c, a) è d -isolata (n.º 1).*

Infatti (cfr. [1], p. 8, ult. capov.), un tale gruppoide è ad es. quello così definito: $ac = b$, $ba = c$, ogni altro prodotto è $= d$.

XXII) *Fissate comunque due condizioni di autodistributività dell'insieme $\{a, b, c, d\}$ appartenenti una alla classe K_i e l'altra alla classe K'_i , esiste un gruppoide non commutativo di sostegno $\{a, b, c, d\}$ nel quale le due condizioni fissate non sono soddisfatte, mentre tutte le rimanenti condizioni di autodistributività di $\{a, b, c, d\}$ vi sono invece soddisfatte. ($i = 1, 2, 3, 4$.)*

Infatti, se le due condizioni fissate sono $s(a, b, a)$, $d(a, b, a)$, un tale gruppoide è fornito dalle VI), I) (n.º 3, 1); se invece esse sono $s(a, b, a)$, $d(a, c, a)$, un tale gruppoide è fornito dalla XXI). È allora chiaro come da questi due gruppoidi, mediante opportuni isomorfismi, si possano dedurre successivamente tutti gli ulteriori gruppoidi la cui esistenza è affermata dalla XXII).

XXIII) *Fissata comunque una condizione di autodistributività dell'insieme $\{a, b, c, d\}$ relativa ad una terna non appartenente al tipo $[a, b, a]$ (n.º 3), esiste un gruppoide non commutativo di sostegno $\{a, b, c, d\}$ nel quale la condizione fissata non è soddisfatta, mentre tutte le rimanenti condizioni di autodistributività di $\{a, b, c, d\}$ vi sono invece soddisfatte.*

Infatti, se $(x, y, z) \notin [a, b, a]$, (x, y, z) è appunto s -isolata in un gruppoide d -autodistributivo e non commutativo di sostegno $\{a, b, c, d\}$. ciò risultando facilmente (cfr. [1], n.º 7) dalla V)

(n.º 3), dalla XVI) (n.º 6) e dalla I) (n.º 1). Ne segue allora subito (cfr. [1], p. 28, 3º capov.), per la II) del n.º 1, che (x, y, z) è appunto d -isolata in un gruppoide s -autodistributivo e non commutativo di sostegno $\{a, b, c, d\}$.

TEOREMA 4: *Se $G = \{a, b, c, d\}$ è un insieme avente numero cardinale $\nu = 4$, ed A_3 è l'insieme delle $2\nu^3$ condizioni di autodistributività (1) e (2) di G , tutti i sottinsiemi A'_3 di A_3 che sono indipendenti ed equivalenti ad A_3 (n.º 1) si ottengono nel modo seguente: Si scelga in ciascuna delle quattro classi (si veda l'inizio di questo n.º):*

$$(17) \quad K_i \cup K'_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

una qualsiasi delle sue due sottoclassi K_i, K'_i . Le (dodici) condizioni di autodistributività costituenti le quattro sottoclassi così scelte e le condizioni di autodistributività ((1) e (2)) di G relative a tutte le terne non appartenenti al tipo $[a, b, a]$ (n.º 3) formano appunto, complessivamente, un sottinsieme A'_3 (di A_3) indipendente ed equivalente ad A_3 .

Dimostrazione: Per agevolare la successiva esposizione, denotiamo (nello stesso ordine in cui sono state scritte all'inizio di questo n.º) con

$$s_{i1}, \quad s_{i2}, \quad s_{i3}$$

le tre condizioni (di autodistributività di G) costituenti la classe K_i , e con

$$d_{i1}, \quad d_{i2}, \quad d_{i3}$$

le tre condizioni costituenti la classe K'_i ; ($i = 1, 2, 3, 4$).

Supponiamo dunque che A'_3 sia un sottinsieme (di A_3) indipendente ed equivalente ad A_3 . Allora A'_3 , essendo equivalente ad A_3 , deve contenere (per la XXIII) l'insieme delle condizioni di autodistributività di G relative a tutte le terne non appartenenti al tipo $[a, b, a]$, e deve inoltre contenere (per la XXII) almeno una delle due condizioni di ciascuna delle tre classi:

$$(18) \quad \{s_{i1}, d_{i1}\}, \quad \{s_{i2}, d_{i2}\}, \quad \{s_{i3}, d_{i3}\};$$

($i = 1, 2, 3, 4$). Dimostriamo che deve contenerne *una sola*.

Infatti (per assurdo), supponiamo che A'_3 contenga, ad es., sia s_{i1} che d_{i1} . Se A'_3 contenesse allora sia s_{i2} che d_{i2} (risp. sia s_{i3} che d_{i3}), dovendo A'_3 contenere o s_{i3} o d_{i3} (risp. o s_{i2} o d_{i2}). A'_3 non sarebbe indipendente (per la XX)). Dunque A'_3 contiene (una ed) una sola condizione di ciascuna delle due classi $\{s_{i2}, d_{i2}\}$, $\{s_{i3}, d_{i3}\}$. Se A'_3 contenesse sia s_{i2} che s_{i3} (o sia d_{i2} che d_{i3}), A'_3 non sarebbe indipendente (per la XX)). Dunque A'_3 contiene, ad es., sia s_{i2} che d_{i3} ma non d_{i2} né s_{i3} . Ma ciò è appunto assurdo, poichè A'_3 , in quanto equivalente ad A_3 , deve contenere (per la XXII)) una almeno delle due condizioni d_{i2}, s_{i3} . Analogamente si vede che è assurdo supporre che A'_3 contenga la seconda, o la terza, delle classi (18).

Inoltre è impossibile (per la XXII), essendo A'_3 equivalente ad A_3 che A'_3 non contenga una delle tre condizioni della classe K_i e contemporaneamente non contenga una delle tre condizioni della classe K'_i . Dunque le tre uniche condizioni che A'_3 contiene fra le sei della classe $K_i \cup K'_i$ sono appunto o quelle costituenti la sottoclasse K_i , oppure quelle costituenti la sottoclasse K'_i ; ($i = 1, 2, 3, 4$).

Viceversa, è chiaro che ogni sottinsieme di A_3 ottenuto nel modo descritto nel teor. 4 è appunto indipendente (per le XXII, XXIII)) ed equivalente ad A_3 (per la XX)). E la dimostrazione del teor. 4 è perciò completata.

Si osservi che dalle XX), XXII) e XXIII) si ottiene pure (col medesimo ragionamento ora concluso) la dimostrazione della seconda parte ($i = 3$) della III) nel n.º 2, per $r = 4$.

9. - Continuando lo studio dell'insieme A_3 (n.º 1), consideriamo adesso il caso $r = 3$.

XXIV) *Non esiste alcun gruppoide di sostegno $G = \{a, b, c\}$ nel quale tutte le terne (di elementi di G) non appartenenti al tipo $[a, b, a]$ (n.º 3) siano s-autodistributive e d-autodistributive (cioè nel quale valga la (12) del n.º 7), e nel quale contemporaneamente risulti:*

$$(13) \quad a(ba) \neq (ab)(aa),$$

$$(14)_1 \quad (ab)a = (aa)(ba) .$$

Infatti, supponiamo che G^0 sia un gruppoide di sostegno $G = \{a, b, c\}$ nel quale valgano le (12), (13), (14)₁, e dimostriamo, in ciascuno dei primi sei fra i casi (15) (n.º 7), l'assurdità di questa ipotesi, (i residui tre casi possibili, con $aa = a$, si rivelano assurdi a priori: cfr. n.º 7, 4º capov.).

Nei primi quattro fra i sei casi in esame, l'assurdo si trova con gli stessi ragionamenti del n.º 7 (v. 1), ..., 4)).

5) In G^0 risulti

$$aa = c, \quad ab = b .$$

Allora si trova (v. n.º 7, 5)):

$$ac = cc, \quad bb = b, \quad a(ba) \neq (ba)(ba) ,$$

e quest'ultima diseuguaglianza (in ciascuno dei tre casi $ba = a, b, c$) si rivela assurda.

6) In G^0 risulti

$$aa = c, \quad ab = c .$$

Allora si trova (v. n.º 7, 6)):

$$ac = cc, \quad cc \neq a, \quad ba \neq c ,$$

e quindi le (13), $s(a, b, b)$ implicano successivam.

$$cc = b, \quad bb = c .$$

Perciò $d(a, a, c)$ comporta $b = c$, il che è assurdo. E la dimostrazione della XXIV) è completata.

XXV) *Non esiste alcun gruppoide di sostegno $G = \{a, b, c\}$ nel quale tutte le terne (di elementi di G) appartenenti ai due tipi $[a, a, b]$, $[b, a, a]$ (n.º 3) siano s -autodistributive e d -autodistributive.*

cioè nel quale si abbia:

$$(19) \quad (x, y, z) \in [a, a, b] \cup [b, a, a] \rightarrow \\ \rightarrow x(yz) = (xy)(xz), \quad (xy)z = (xz)(yz),$$

e nel quale contemporaneamente risulti:

$$(20) \quad a(aa) \neq (aa)(aa).$$

Infatti, supponiamo che G^0 sia un gruppoide di sostegno $G = \{a, b, c\}$ nel quale valgano le (19), (20) ed in cui sia

$$aa = b,$$

e dimostriamo (distinguendo i tre casi $ab = a, b, c$) l'assurdità di questa ipotesi. Ne seguirà appunto immediatamente anche la non esistenza di un gruppoide di sostegno $G = \{a, b, c\}$ in cui valgano le (19), (20) ed in cui sia $aa = c$ (se un tal gruppoide esistesse, nella sua immagine isomorfa mediante la corrispondenza $a \rightarrow a, b \rightarrow c, c \rightarrow b$ varrebbero le (19), (20) e sarebbe $aa = b$), la residua eventualità $aa = a$ restando a priori esclusa dalla (20). Usiamo le notazioni (16) (n.º 7).

1) In G^0 sia inoltre

$$ab = a.$$

Allora le (20), $s(a, a, c)$ implicano successivam.

$$bb \neq a, \quad ac \neq b,$$

donde $a(bb) \neq (ab)(ab)$, il che (per la $s(a, b, b)$) è assurdo.

2) In G^0 sia inoltre

$$ab = b.$$

Allora le (20), $s(a, a, b)$ implicano risp. $bb \neq b, bb = b$, il che è assurdo.

3) In G^0 sia inoltre

$$ab = c.$$

Allora le (20), $s(a, b, b)$ implicano successivam.

$$bb \neq c, \quad cc \neq a,$$

quindi $s(a, c, c)$, $s(a, b, b)$ comportano successivam.

$$cc = c, \quad bb = b.$$

Perciò $d(a, a, b)$ implica $b = c$, il che è assurdo. E la XXV) è dimostrata.

10. - Pensiamo ripartite le dodici condizioni di autodistributività dell'insieme $G = \{a, b, c\}$ relative alle terne del tipo $[a, b, a]$ (n.º 3) nelle seguenti sei classi (si ricordino le notazioni (16), n.º 7):

$$(21) \quad \{s(x, y, x), d(x, y, x)\} \quad (x \neq y; x, y \in G).$$

XXVI) *Se in un gruppoide di sostegno $\{a, b, c\}$ sono s -autodistributive e d -autodistributive tutte le terne non appartenenti al tipo $[a, b, a]$ (n.º 3) e se, inoltre, vi è soddisfatta una delle due condizioni di una delle classi (21), allora vi è soddisfatta anche l'altra.*

Infatti, ciò segue facilmente dalla XXIV) del n.º preced. considerando opportune immagini isomorfe, o il gruppoide opposto, del gruppoide in questione, e ricordando la II) del n.º 1.

XXVII) *Se in un gruppoide di sostegno $\{a, b, c\}$ sono s -autodistributive e d -autodistributive tutte le terne appartenenti ai due tipi $[a, a, b]$, $[b, a, a]$ (n.º 3), allora vi sono s -autodistributive e d -autodistributive anche le tre terne del tipo $[a, a, a]$.*

Infatti, ciò segue facilmente dalla XXV) del n.º preced. (cfr. dimostraz. della XXVI)), ricordando la II) del n.º 1.

XXVIII) Fissata comunque una delle sei classi (21), esiste un gruppoide non commutativo di sostegno $\{a, b, c\}$ nel quale le due condizioni della classe fissata non sono soddisfatte, mentre tutte le rimanenti condizioni di autodistributività dell'insieme $\{a, b, c\}$ vi sono invece soddisfatte.

Infatti, un tale gruppoide è un'immagine isomorfa di quello definito dalla tabella (8) (n.º 3).

XXIX) Fissata comunque una condizione di autodistributività dell'insieme $\{a, b, c\}$ relativa ad una terna appartenente ad uno dei tre tipi $[a, a, b]$, $[b, a, a]$, $[a, b, c]$ (n.º 3), esiste un gruppoide non commutativo di sostegno $\{a, b, c\}$ nel quale la condizione fissata non è soddisfatta, mentre tutte le rimanenti condizioni di autodistributività di $\{a, b, c\}$ vi sono invece soddisfatte.

Infatti, ciò segue subito (cfr. [1], p. 4, ult. capov., e p. 28, 3º capov.) dalla V) del n.º 3 e dalla II) del n.º 1.

TEOREMA 5: Se $G = \{a, b, c\}$ è un insieme avente numero cardinale $v = 3$, ed A_3 è l'insieme delle $2v^3$ condizioni di autodistributività (1) e (2) di G , tutti i sottinsiemi A'_3 di A_3 che sono indipendenti ed equivalenti ad A_3 (n.º 1) si ottengono nel modo seguente: Si scelga in ciascuna delle sei classi (21) una qualsiasi delle due condizioni di autodistributività che la costituiscono. Le sei condizioni così scelte e le condizioni di autodistributività ((1) e (2)) di G relative a tutte le terne non appartenenti al tipo $[a, a, a]$ nè al tipo $[a, b, a]$ (n.º 3) costituiscono appunto, complessivamente, un sottinsieme A'_3 (di A_3) indipendente ed equivalente ad A_3 .

Dimostrazione: Si ottiene ormai facilmente, in virtù delle quattro proposizioni XXVI), ..., XXIX). Anzi, da queste stesse proposizioni (con identico ragionamento) si ottiene anche la dimostrazione della seconda parte ($i = 3$) della III) del n.º 2, per $v = 3$.

Lo studio dell'insieme A_3 (n.º 1) viene infine completato dal seguente

TEOREMA 6: Se $G = \{a, b\}$ è un insieme avente numero cardinale $v = 2$, ed $A_3 = A_1 \cup A_2$ (n.º 1) è l'insieme delle $2v^3$ condizioni

di autodistributività (1) e (2) di G , tutti i sottinsiemi A'_3 di A_3 che sono indipendenti ed equivalenti ad A_3 (n.º 1) si ottengono nel modo seguente: Si scelgano uno qualsiasi, A'_1 , dei sottinsiemi di A_1 che sono indipendenti ed equivalenti ad A_1 (teor. 2, n.º 5) ed uno qualsiasi, A'_2 , dei sottinsiemi di A_2 che sono indipendenti ed equivalenti ad A_2 (teor. 2', n.º 5). La loro riunione, $A'_1 \cup A'_2$, è appunto un sottinsieme A'_3 (di A_3) indipendente ed equivalente ad A_3 .

Dimostrazione: Un sottinsieme A'_3 (di A_3) indipendente ed equivalente ad A_3 deve contenere (per le XIV), XIV') del n.º 4, in quanto equivalente ad A_3) un A'_1 ed un A'_2 , e quindi deve appunto coincidere (in quanto indipendente) con il sottinsieme $A'_1 \cup A'_2$ (che, per i teoremi 2 e 2', è equivalente ad A_3). Il viceversa è chiaro (per le XIV), XIV') e per i teor. 2, 2').

Questo stesso ragionamento dimostra anche la residua parte della III) del n.º 2 ($i = 3$, $v = 2$).

BIBLIOGRAFIA

- [1] BOCCIONI, D.: *Indipendenza delle condizioni di distributività*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 28 (1958), pp. 1-30.
- [2] BOCCIONI, D.: *Condizioni di distributività con almeno una operazione commutativa*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 31 (1961).
- [3] FRINK, O.: *Symmetric and self-distributive systems*, Amer. Math. Monthly, vol. 62 (1955), pp. 697-707.
- [4] STEIN, S. K.: *Left distributive quasi-groups*, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 10 (1959), pp. 577-578.