

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

RENATO ZANOVELLO

Un'estensione di un teorema di Milloux

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 31 (1961), p. 165-170

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1961__31__165_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1961__31__165_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

UN'ESTENSIONE DI UN TEOREMA DI MILLOUX

Nota () di RENATO ZANOVELLO (a Padova)*

In questa Nota indico un teorema per l'esistenza d'un integrale non identicamente nullo, infinitesimo al tendere di x all'infinito positivo, dell'equazione differenziale ordinaria:

$$(1) \quad y''(x) + Q(x)y'(x) + \beta(x)y(x) = 0;$$

quando $Q(x) \equiv 0$, il mio teorema si riduce ad una proposizione di Milloux ¹⁾.

Nel corso di questa Nota, supporrò sempre che:

I) *le funzioni $Q(x)$ e $\beta(x)$ siano continue per $x \geq x_0$, dove x_0 è un numero reale fisso.*

Se a quest'ipotesi si aggiungono quella che

II) *la funzione $\beta(x)$ sia positiva per $x \geq x_0$.*
e che

III) *la funzione*

$$\beta(x)e^{\int_{x_0}^x 2Q(t)dt}$$

non decresca per $x \geq x_0$.

(*) Pervenuta in redazione il 19 marzo 1961.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

¹⁾ MILLOUX H., *Sur l'equation differentielle $\ddot{x} + A(t)x = 0$* , Prace

allora, qualunque sia l'integrale $y(x)$ della (1), la funzione

$$y^2(x) + \frac{y'^2(x)}{\beta(x)}$$

non cresce per $x \geq x_0$. La cosa è nota ²⁾ ed implica che ogni soluzione della (1) è limitata per $x \geq x_0$. Posto

$$\Phi_\nu(x) = y^2(x) + \frac{y'^2(x)}{\beta(x)}$$

chiamo λ_ν^2 , supponendo $\lambda_\nu \geq 0$, il limite finito e non negativo, verso il quale $\Phi_\nu(x)$ tende quando x tende a $+\infty$. Si noti che da $\lambda_\nu = 0$, segue subito $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$.

Premesso ciò, voglio dimostrare il seguente teorema:

Se alle ipotesi I), II), III) si aggiungono quella che

IV) *la funzione*

$$-\int_{x_0}^x Q(t)dt$$

*sia superiormente limitata,
e che*

V) *la funzione $\beta(x)$ tenda a $+\infty$ quando x tende a $+\infty$, allora la (1) ammette almeno una soluzione non identicamente nulla, infinitesima al tendere di x a $+\infty$.*

Innanzitutto considero il caso che la (1) ammetta due soluzioni monotone da un certo punto in poi e linearmente indipendenti $f(x)$ e $g(x)$. Poichè $f(x)$ e $g(x)$ sono monotone e limitate, esse

Mathematyczno. Fisyczne, 41 (1934). Un'altra dimostrazione del teorema di Milloux si può trovare in: G. PRODI, *Un'osservazione sugli integrali dell'equazione $y'' + A(x)y = 0$ nel caso $A(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow \infty$* , Rend. Acc. Naz. Lincei (1950).

²⁾ TREVISAN G., *Un teorema di stabilità per le equazioni differenziali lineari del secondo ordine*, Rend. Acc. Naz. Lincei, Roma (1960).

convergono quando x tende a $+\infty$; e posto:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \gamma, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \delta,$$

è lecito supporre altresì che i numeri γ e δ non siano nulli, perchè altrimenti il teorema sarebbe senz'altro verificato. Allora la funzione $\gamma g(x) - \delta f(x)$ è un integrale non identicamente nullo della (1), infinitesimo quando x tende a $+\infty$. Donde di nuovo il teorema.

Escluso tale caso, considero una soluzione $y(x)$, certo esistente, della (1), non identicamente nulla e dotata di infiniti punti di massimo, contenuti nella semiretta $x \geq x_0$. Dimostro che questo insieme di punti di massimo non può avere punti d'accumulazione al finito. Infatti se, per assurdo, ξ è un tal punto d'accumulazione, la continuità di $y'(x)$ porta alla $y'(\xi) = 0$, e la continuità di $y''(x)$ e il teorema di Rolle conducono alla $y''(\xi) = 0$. Dopo di chè la (1) e la $\beta(\xi) > 0$ danno $y(\xi) = 0$; e $y(x)$ sarebbe identicamente nulla, essendo nulla nel punto ξ assieme alla sua derivata prima e soddisfacendo alla (1).

Nelle considerazioni svolte, è implicito che la soluzione $y(x)$ non può annullarsi nei suoi punti di massimo. Sicchè non è restrittivo considerare per $y(x)$ una successione di punti di massimo

$$(2) \quad \eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots$$

siffatti che η_i diverga a $+\infty$ e che $y(\eta_i)$ sia sempre maggiore di zero, perchè altrimenti basterebbe passare da $y(x)$ a $-y(x)$.

Mostrerò in seguito che per ogni altra soluzione $z(x)$ della (1), nelle ipotesi attuali, risulta:

$$(3) \quad \lim_{i \rightarrow +\infty} |z(\eta_i)| = \lambda_z,$$

il significato di λ_z essendo naturalmente analogo a quello di λ_y . Ed ora invece sfrutterò la (3) per completare la dimostrazione del teorema.

Ammetto infatti per assurdo, che l'unica soluzione della (1), infinitesima al tendere di x a $+\infty$ sia quella identicamente

nulla. Chiamo $u(x)$ e $v(x)$ due soluzioni linearmente indipendenti e quindi non identicamente nulle della (1) di guisa che $\lambda_u > 0$ e $\lambda_v > 0$, il significato di λ_u e λ_v essendo ormai ovvio. Suppongo, com'è lecito, che fra i termini della successione:

$$u(\eta_1), u(\eta_2), u(\eta_3), \dots$$

ve ne siano infiniti positivi o nulli; nel caso contrario basterebbe considerare $-u(x)$ al posto di $u(x)$. Ricordando la (3), si riconosce che dalla successione (2) si può estrarre la successione:

$$(4) \quad \eta'_1, \eta'_2, \eta'_3, \dots$$

in tal guisa da aversi

$$(5) \quad \lim_{i \rightarrow +\infty} u(\eta'_i) = \lambda_u.$$

Allo stesso modo, si riconosce che dalla successione (4) se ne può estrarre un'altra

$$\eta''_1, \eta''_2, \eta''_3, \dots$$

siffatta da aversi

$$(6) \quad \lim_{i \rightarrow +\infty} v(\eta''_i) = \lambda_v,$$

mentre dalla (5) segue

$$(7) \quad \lim_{i \rightarrow +\infty} u(\eta''_i) = \lambda_u.$$

Posto ora

$$(8) \quad \tau(x) = \lambda_v u(x) - \lambda_u v(x),$$

$\tau(x)$ è una soluzione non identicamente nulla della (1). Inoltre dalla (3) deduco

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} |\tau(\eta_i)| = \lambda_\tau$$

e quindi

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} |\tau(\eta''_i)| = \lambda_\tau,$$

mentre le (6), (7) e (8) porgono

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \tau(\eta_i'') = \hat{\lambda}_r \hat{\lambda}_u - \hat{\lambda}_u \hat{\lambda}_r = 0,$$

donde appunto $\hat{\lambda}_r = 0$, e quindi la conclusione.

Per completare la dimostrazione, resta da far vedere che:
Ferme le ipotesi del teorema precedente, se la (1) ammette una soluzione $y(x)$ non identicamente nulla e dotata di massimi in una successione divergente a $-\infty$

$$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots$$

per ogni altra soluzione $z(x)$ della (1), risulta:

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} |z(\eta_i)| = \hat{\lambda}_z,$$

cioè sussiste la (3).

Infatti se

$$W(x) = y(x)z'(x) - z(x)y'(x)$$

è il wronskiano di $y(x)$ e $z(x)$, risulta notoriamente

$$y(x)z'(x) - z(x)y'(x) = W(x_0)e^{\int_{x_0}^x Q(t)dt}$$

epperò, attesa la $y'(\eta_i) = 0$,

$$y(\eta_i)z'(\eta_i) = W(x_0)e^{\int_{x_0}^{\eta_i} Q(t)dt}$$

e quindi

$$(9) \quad z'(\eta_i) = \frac{W(x_0)e^{\int_{x_0}^{\eta_i} Q(t)dt}}{y(\eta_i)}$$

la divisione essendo lecita appunto perchè $y(\eta_i)$ è diverso da zero; non è restrittivo anzi supporre che sia sempre $y(\eta_i) > 0$. D'altra

parte, poichè $y'(\eta_i)$ è nulla, poichè

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi_v(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[y^2(x) + \frac{y'^2(x)}{\beta(x)} \right] = \lambda_v^2,$$

e per l'ipotesi II), trovo:

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} y^2(\eta_i) = \lambda_v^2$$

e quindi

$$(10) \quad \lim_{i \rightarrow +\infty} y(\eta_i) = \lambda_v$$

perchè nelle ipotesi attuali $y(\eta_i)$ è maggiore di zero al pari di λ_v . Poichè $\Phi_v(x)$ non cresce di modo che $\Phi_v(x) \geq \lambda_v^2$ e poichè $y'(\eta_i) = 0$, la (10) può essere accompagnata dalla

$$y(\eta_i) \geq \lambda_v$$

e la (9) porge allora:

$$|z'(\eta_i)| \leq \frac{|W(x_0)| e^{\int_{x_0}^{\eta_i} -|Q(t)| dt}}{\lambda_v}$$

Da questa disuguaglianza e dall'ipotesi IV), segue che l'insieme dei valori $z'(\eta_i)$ è un insieme limitato. Di qui, dalla

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi_z(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[z^2(x) + \frac{z'^2(x)}{\beta(x)} \right] = \lambda_z^2$$

e dall'ipotesi V), segue

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} z^2(\eta_i) = \lambda_z^2$$

donde la (3), visto che λ_z non è negativo. E la dimostrazione è ultimata.