

RENDICONTI  
*del*  
SEMINARIO MATEMATICO  
*della*  
UNIVERSITÀ DI PADOVA

LUIGI ANTONIO ROSATI

**Unicità e autodualità dei piani di Hughes**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 30 (1960), p. 316-327

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1960\\_\\_30\\_\\_316\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1960__30__316_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# UNICITÀ E AUTODUALITÀ DEI PIANI DI HUGHES

*Nota (\*) di LUIGI ANTONIO ROSATI (a Firenze)*

Nel 1957, generalizzando un esempio di Veblen Wedderburn [4], D. R. Hughes [1] ha introdotto una nuova classe di piani non desarguesiani notevoli anche per il fatto che costituiscono il primo esempio di piani finiti non desarguesiani diversi dai piani di traslazione. Essi hanno per ordine una potenza ad esponente pari di un numero primo dispari e a ciascuno di essi è associato un quasicorpo associativo  $R$  d'ordine  $q^2$  uguale all'ordine del piano stesso e avente per centro un campo di Galois d'ordine  $q$ . Tali piani sono stati studiati, oltre che da Hughes, anche da G. Zappa [5] e da L. A. Rosati [3] che ne hanno determinato il gruppo delle collineazioni. Non mi risulta invece, come del resto afferma Hughes [2], che sia stato risolto il problema dell'unicità del piano di Hughes di un dato ordine  $q^2 = p^{2m}$  ( $p$  numero primo dispari), nè che si sappia, eccettuato il caso del piano di Hughes d'ordine 9, se i piani di Hughes sono autoduali o no.

In questa nota si affrontano queste due questioni, risolvendole in generale e dimostrando quanto segue:

a) *Se due piani di Hughes relativi a due quasicorpi  $R$  e  $R'$  sono isomorfi, lo sono anche  $R$  e  $R'$ . Pertanto se  $q^2$  è una potenza (ad esponente pari) di un numero primo dispari*

(\*) Pervenuta in Redazione il 13 settembre 1960.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico. Università. Firenze.

esiste sempre uno ed un solo piano di Hughes d'ordine  $q^2$ , eccettuato i casi in cui si ha  $q^2 = 11^2, 23^2, 59^2$ , nei quali si hanno due piani.

b) I piani di Hughes sono autoduali.

1. - Ricordiamo prima di tutto la costruzione dei piani di Hughes che si trova in [3, 5]. Da essa segue l'unicità del piano di Hughes,  $\pi$ , relativo a un dato quasicorpo associativo,  $R^1$ , d'ordine  $q^2$  ( $q$  potenza di un numero primo  $p$ ) avente per centro un campo di Galois,  $F$ , d'ordine  $q$  (questa condizione porta di conseguenza che  $p$  deve essere dispari [6]). I punti di  $\pi$  sono le terne ordinate  $(x, y, z)$  di elementi non tutti nulli di  $R$ , con l'identificazione  $(kx, ky, kz) = (x, y, z)$ . Le rette di  $\pi$  sono i luoghi dei punti ciascuno dei quali verifica un'equazione (che non si riduca ad un'identità) della forma

$$(1) \quad ax + by + cz + (a_1x + b_1y + c_1z)t = 0,$$

dove  $a, b, c, a_1, b_1, c_1$  sono elementi di  $F$  non tutti nulli, e  $t$  è un elemento di  $R^2$ ). Per ogni retta si può scegliere l'equazione (1) in modo che  $t$  non sia in  $F$ .  $\pi$  contiene un sottopiano desarguesiano,  $\pi_0$ , i cui punti sono le terne ordinate  $(x, y, z)$  di elementi di  $F$  non tutti nulli e le cui rette sono rappresentate dalle equazioni

$$ax + by + cz = 0,$$

dove  $a, b, c$  sono elementi di  $F$  non tutti nulli (vale a dire da equazioni (1) con  $a_1 = b_1 = c_1 = 0$ ).

Chiamando retta impropria di  $\pi$  quella di equazione  $z = 0$  e punti impropri i punti della retta impropria, i punti propri di  $\pi$  si possono rappresentare anche con le coppie ordinate

<sup>1)</sup> In  $R$  supponiamo che valga la proprietà distributiva a sinistra  $a(b + c) = ab + ac$ .

<sup>2)</sup> Nella nota di Hughes [1] le rette sono definite diversamente.

$(x, y)$  di elementi di  $R$ , e analogamente i punti di  $\pi_0$  si possono rappresentare con le coppie ordinate di elementi di  $F$ , mentre le rette di  $\pi$  e  $\pi_0$  si possono rappresentare rispettivamente con le equazioni (nè identiche, nè impossibili)

$$ax + by + c + (a_1x + b_1y + c_1)t = 0, \quad ax + by + c = 0,$$

col solito significato per  $a, b, c, a_1, b_1, c_1, t$ .

Consideriamo ora due quasicorpi associativi  $R$  e  $R'$  d'ordini rispettivi  $q^2$  e  $q'^2$  aventi ordinatamente come centro un campo di Galois  $F$  d'ordine  $q$  e un campo di Galois  $F'$  d'ordine  $q'$  e supponiamo che i piani  $\pi$  e  $\pi'$  relativi a  $R$  e  $R'$  siano isomorfi. Si ha intanto ovviamente  $q = q'$ . Vogliamo dimostrare che

### 1.1 - $R$ e $R'$ sono isomorfi.

Detti  $\pi_0$  e  $\pi'_0$  i sottopiani desarguesiani di  $\pi$  e  $\pi'$ , anche  $\pi_0$  e  $\pi'_0$  sono isomorfi e un isomorfismo,  $A$ , di  $\pi$  su  $\pi'$  porta  $\pi_0$  su  $\pi'_0$ , subordinando tra questi piani un isomorfismo  $A_0$ : sia  $(x'_0, y'_0, z'_0)$  il punto di  $\pi'_0$  corrispondente al generico punto  $(x_0, y_0, z_0)$  di  $\pi_0$  in  $A$  e  $A_0$ . Consideriamo poi la collineazione  $B_0$  di  $\pi'_0$  che porta il punto  $(x'_0, y'_0, z'_0)$  di  $\pi'_0$  nel punto di  $\pi'_0$  che ha le stesse coordinate  $(x_0, y_0, z_0)$  del corrispondente di  $(x'_0, y'_0, z'_0)$  in  $\pi_0$  per mezzo di  $A_0$ . Allora per un teorema di Zappa [5]  $B_0$  si può prolungare in una collineazione  $B$  di  $\pi'$  e perciò  $T = AB$  è un isomorfismo di  $\pi$  su  $\pi'$  che porta il generico punto di  $\pi_0$  nel punto di  $\pi'_0$  che ha le stesse coordinate (a meno di un fattore di proporzionalità, s'intende). Pertanto  $T$  porta la retta impropria di  $\pi$  in quella di  $\pi'$  e nel resto della dimostrazione del teorema potremo riferire  $\pi$  e  $\pi'$  a coordinate non omogenee. Siccome  $T$  porta la retta  $y=0$  di  $\pi$  nella retta  $y=0$  di  $\pi'$ ,  $T$  porterà il punto  $(\bar{x}, 0)$  di  $\pi$  in un punto  $(\bar{x}', 0)$  di  $\pi'$  (e sarà  $\bar{x} = \bar{x}'$ , se  $(\bar{x}, 0)$  appartiene a  $\pi_0$ , cioè se  $\bar{x}$  appartiene ad  $F$ ). La retta,  $s$ , di  $\pi$  d'equazione  $x = \bar{x}$ , passante per il punto improprio della retta  $x=0$  (appartenente a  $\pi_0$ ) avrà per corrispondente in  $\pi'$  per mezzo di  $T$  una retta passante per il punto improprio

prio della retta di  $\pi'$  d'equazione  $x=0$ , e per  $(\bar{x}', 0)$ , cioè la retta,  $s'$ , d'equazione  $x=\bar{x}'$ .

Consideriamo ora il punto di  $\pi$  di coordinate  $(\bar{x}, \bar{y})$ . Esso appartiene ad  $s$ ; il suo corrispondente in  $\pi'$  per mezzo di  $T$  apparterrà ad  $s'$  ed avrà perciò le coordinate  $(\bar{x}', \bar{y}')$ , cosicchè  $\bar{x}'$  dipende soltanto da  $\bar{x}$  e non da  $\bar{y}$ . Questo significa che, se  $(x, y)$  è il generico punto (proprio) di  $\pi$  e  $(x', y')$  il suo corrispondente in  $\pi'$  per mezzo di  $T$ , si ha

$$x' = \alpha x,$$

essendo  $\alpha$  un'applicazione di  $R$  in  $R'$ .

Analogamente si ha

$$y' = \beta y,$$

essendo  $\beta$  un'applicazione di  $R$  in  $R'$ . Evidentemente tanto  $\alpha$  che  $\beta$  mutano un elemento di  $F$  in un eguale elemento di  $F'$ .

Si vede facilmente che  $\alpha$  coincide con  $\beta$ . Infatti la retta  $x=y$  di  $\pi$  appartiene a  $\pi_0$ , e quindi da  $T$  verrà portata nella retta di  $\pi'$  che ha la stessa equazione; d'altra parte il suo generico punto  $(x, x)$  viene portato da  $T$  in  $(x', \beta x)$ , quindi  $\alpha = \beta$ .

Vogliamo ora dimostrare che  $\alpha = \beta$  è un isomorfismo di  $R$  su  $R'$ . Consideriamo la retta,  $u$ , di  $\pi$  d'equazione  $y=xt$ , essendo  $t$  un qualsiasi elemento di  $R$ . Essa passa per  $(0, 0)$  e quindi anche la sua corrispondente,  $u'$ , in  $\pi'$  passerà per  $(0, 0)$ . Ma, al variare di  $t'$  in  $R'$ ,  $y=xt'$  fornisce  $q^2$  rette per  $(0, 0)$  e quindi tutte le rette di  $\pi'$  per  $(0, 0)$  diverse dalla retta  $x=0$ . Pertanto anche  $u'$  (che non può avere l'equazione  $x=0$ , in quanto  $T^{-1}$  muta un punto di  $\pi_0'$  nel punto di  $\pi_0$  che ha le stesse coordinate) avrà un'equazione del tipo  $y=x't'$ . Quindi, se  $(x, xt)$  è un generico punto di  $u$  e  $(x', x't')$  il suo corrispondente in  $u'$  per mezzo di  $T$  si ha

$$(2) \quad x' = \alpha x \quad , \quad x't' = \alpha(xt).$$

Siccome  $\alpha$  muta elementi di  $F$  in eguali elementi di  $F'$ , per  $x=1$  si ha  $x'=1$ , e dalle (2) si ottiene  $t' = \alpha t$ , e perciò

$$(3) \quad \alpha x t = \alpha(xt).$$

In particolare per  $t = -1$  si ha  $\alpha t = -1$  e

$$(4) \quad -\alpha t = \alpha(-t).$$

Consideriamo ora la retta,  $r$ , d'equazione  $x + y + 1 = 0$ : essa viene trasformata da  $T$  in una retta di  $\pi'$ ,  $v'$ , che ha la stessa equazione: quindi in  $\pi'$  la retta d'equazione  $\alpha x + \alpha y + 1 = 0$  deve coincidere con la retta  $x + y + 1 = 0$ . Di conseguenza, qualunque sia  $x$  in  $R$ , deve essere

$$\alpha x + \alpha(-1 - x) + 1 = 0,$$

cioè, tenuto conto della (4)

$$(5) \quad \alpha(x + 1) = \alpha x + 1.$$

Prendiamo ora due elementi qualsiasi di  $R$ ,  $h$  e  $k$ . Tenuto conto della (3) e della (5) si ha

$$\begin{aligned} \alpha(h + k) &= \alpha[k(k^{-1}h + 1)] = \alpha k \alpha(k^{-1}h + 1) = \alpha k [\alpha(k^{-1}h) + 1] = \\ &= \alpha k [\alpha k^{-1} \alpha h + 1] = \alpha(k k^{-1}) \alpha h + \alpha k = \alpha h + \alpha k. \end{aligned}$$

Dunque, qualunque siano  $h$  e  $k$  in  $R$ , abbiamo

$$(6) \quad \alpha(h + k) = \alpha h + \alpha k.$$

Tenuto conto che  $\alpha$  pone una corrispondenza biunivoca fra gli elementi di  $R$  e quelli di  $R'$  la (3) e la (6) dicono che  $\alpha$  è un isomorfismo di  $R$  su  $R'$  e il teorema è dimostrato.

È immediato ora dimostrare il resto della proposizione enunciata nell'introduzione.

*1.2 - Se  $q^2$  è una potenza ad esponente pari di un numero primo dispari esiste sempre uno ed un solo piano di Hughes d'ordine  $q^2$ , eccettuato i casi in cui si ha  $q^2 = 11^2, 23^2, 59^2$  nei quali si hanno due piani di Hughes distinti.*

Infatti, se ogni fattore primo di  $m$  è un divisore di  $q - 1$ , e si ha inoltre  $m \not\equiv 0 \pmod{4}$  se  $q \equiv 3 \pmod{4}$ , il numero dei quasicorpi associativi e non eccezionali d'ordine  $q^m$  ( $q = p^t$ ,

$p$  numero primo), aventi per centro un campo di Galois d'ordine  $q$ , è  $\varphi(m)$  ( $\varphi$  indicatore d'Eulero) [6]. Perciò se  $q = p^t$  e  $p$  è un numero primo dispari esiste sempre uno e un solo quasicorpo associativo e non eccezionale d'ordine  $q^2$  e avente per centro un campo di Galois d'ordine  $q$  e di conseguenza un piano e un piano solo d'ordine  $q^2$  e relativo a un quasicorpo non eccezionale. Tenuto conto che ciascuno dei 7 quasicorpi eccezionali ha ordine  $p^2$  ( $p$  numero primo), ma soltanto quelli che H. Zassenhaus indica con II, IV, VII, hanno per centro un campo di Galois d'ordine  $p$ , ricordato che i rispettivi ordini sono  $11^2$ ,  $23^2$ ,  $59^2$ , si ha quanto si voleva dimostrare.

**2.** - Per risolvere la questione della autodualità dei piani di Hughes modificheremo la ricordata definizione di essi. Risulterà poi immediato dimostrare che sono autoduali.

Cominciamo col dimostrare il seguente lemma

2.1 - Sia  $R$  un quasicorpo associativo avente per centro il campo di Galois  $F$ . Allora, se  $t$  è un elemento dell'insieme  $R - F$  degli elementi di  $R$  non appartenenti a  $F$  e  $l, m, l_1, m_1$  sono elementi di  $F$ , da

$$(7) \quad l + mt + (m_1 + l_1 t)t = 0$$

segue

$$(8) \quad l + m_1 t + (m + l_1 t)t = 0$$

e viceversa.

Naturalmente basterà dimostrare che dalla (7) segue la (8). Se vale la (7), si ha

$$(m_1 + l_1 t)t = -l - mt.$$

da cui

$$\begin{aligned} (m_1 + l_1 t)(m + l_1 t) &= mm_1 + l_1 mt + l_1(m_1 + l_1 t)t = \\ &= mm_1 + l_1 mt - l_1(l + mt) = mm_1 - ll_1. \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$m_1 + l_1 t = (mm_1 - ll_1)(m + l_1 t)^{-1} = (m + l_1 t)^{-1}(mm_1 - ll_1)$$

e pertanto

$$(9) \quad (m + l_1 t)(m_1 + l_1 t) = mm_1 - ll_1.$$

D'altra parte è

$$(10) \quad (m + l_1 t)(m_1 + l_1 t) = mm_1 + m_1 l_1 t + l_1(m + l_1 t)t.$$

Dalle (9) e (10) segue

$$-ll_1 = m_1 l_1 t + l_1(m + l_1 t)t,$$

ossia, moltiplicando per  $l_1^{-1}$

$$l + m_1 t + (m + l_1 t)t = 0,$$

cioè la (8).

Come abbiamo già osservato, ricordiamo che, se  $\alpha$  è un qualunque elemento di un quasicorpo associativo  $R$  d'ordine  $q^2$  avente per centro il campo di Galois  $F$  d'ordine  $q$  e  $t$  è un elemento di  $R - F$ , sono univocamente determinati due elementi di  $F$ ,  $l$ ,  $l_1$ , tali che  $\alpha = l + l_1 t$ . Chiameremo  $l$ ,  $l_1$  le *componenti* di  $\alpha$  secondo  $t$  e le scriveremo sempre nell'ordine ora usato. Si ha il seguente lemma

*2.2 - Sia  $t$  un elemento di  $R - F$  e siano  $x, y, z, u, v, w$  elementi di  $R$  di componenti rispetto a  $t$  ordinatamente uguali a  $p, p_1; q, q_1; r, r_1; a, a_1; b, b_1; c, c_1$ . Allora, se vale una delle due uguaglianze*

$$(11) \quad ax + by + cz + (a_1 x + b_1 y + c_1 z)t = 0$$

$$(12) \quad pu + qv + rw + (p_1 u + q_1 v + r_1 w)t = 0,$$

*vale anche l'altra (per il medesimo  $t$ ) e valgono anche le analoghe uguaglianze ottenute in corrispondenza dei vari valori di  $t$  in  $R - F$ .*



Supponiamo verificata, per esempio, la (11) per un certo  $t$  e consideriamo un altro elemento,  $t'$ , di  $R - F$ . Dette  $\lambda, \mu$  le componenti di  $t$  secondo  $t'$ , si ha  $t = \lambda + \mu t'$ , da cui sostituendo nella (11) si ottiene

$$(a + \lambda a_1)x + (b + \lambda b_1)y + (c + \lambda c_1)z + (\mu a_1x + \mu b_1y + \mu c_1z)t' = 0.$$

Ora  $a + \lambda a_1, \mu a_1; b + \lambda b_1, \mu b_1; c + \lambda c_1, \mu c_1$  sono proprio le componenti di  $u, v, w$  secondo  $t'$  e quindi è verificata anche la analoga della (11) rispetto a  $t'$ .

Dal lemma 2.1 si ha poi che le (11), (12) sono l'una conseguenza dell'altra. Infatti per esempio dalla (11) si ha

$$ap + bq + cr + (ap_1 + bq_1 + cr_1)t + [a_1p + b_1q + c_1r + (a_1p_1 + b_1q_1 + c_1r_1)t]t = 0,$$

e quindi per il lemma 2.1

$$ap + bq + cr + (a_1p + b_1q + c_1r)t + [ap_1 + bq_1 + cr_1 + (a_1p_1 + b_1q_1 + c_1r_1)t]t = 0,$$

cioè la (12).

Dal lemma ora dimostrato segue che, fissati in  $R$   $u, v, w$  non tutti nulli, l'insieme delle terne ordinate di elementi di  $R$  non tutti nulli  $x, y, z$  che verificano la (11) dipende unicamente da  $u, v, w$ , cioè non varia se, variando  $t$  in  $R - F$ , variano conseguentemente  $a, a_1, b, b_1, c, c_1$  in  $F$ .

Ad ogni terna ordinata di elementi di  $R$  non tutti nulli  $a, b, c$  associamo ora due diversi contrassegni  $()$  e  $[\ ]$  e chiamiamo punti le terne contrassegnate  $(a, b, c)$  e rette le terne contrassegnate  $[a, b, c]$ . Diciamo poi coincidenti due punti  $(a, b, c), (a', b', c')$  (due rette  $[a, b, c], [a', b', c']$ ) se, e soltanto se,  $a' = ka, b' = kb, c' = kc$ , essendo  $k$  un elemento di  $R$  diverso da zero. Diciamo anche che  $(x, y, z)$  e  $[u, v, w]$  sono incidenti se, e soltanto se, detto  $t$  un qualunque elemento di  $R - F$  e indicate con  $p, p_1; q, q_1; r, r_1; a, a_1; b, b_1; c, c_1$  ordinatamente le componenti di  $x, y, z, u, v, w$  secondo  $t$ , risultano verificate le (11), (12). Allora abbiamo subito che

2.3 - *Se due rette (punti) coincidono, ogni punto (retta) incidente all'una (all'uno) è incidente anche all'altra (all'altro).*

Supponiamo per esempio che  $(x, y, z)$  sia incidente a  $[u, v, w]$ . Si hanno allora la (11) e la (12). Conseguentemente, se  $k$  è un qualunque elemento di  $R$  diverso da zero, si ha anche

$$p(ku) + q(kv) + r(kw) + [p_1(ku) + q_1(kv) + r_1(kw)]t = 0,$$

cioè  $(x, y, z)$  è incidente anche a  $[ku, kv, kw]$ . Analogamente ogni punto incidente a  $[ku, kv, kw]$  è incidente anche a  $[u, v, w]$ . Tenuto conto della dualità delle definizioni di retta e di punto e delle relazioni d'incidenza risulta dimostrato quanto si voleva. Dal seguito risulterà anche l'inverso di questo teorema.

Consideriamo ora l'insieme  $\pi'$  dei punti e delle rette ora definiti con le date relazioni d'incidenza e dimostriamo che  $\pi'$  coincide col piano di Hughes relativo a  $R$ . Basterà vedere che, associando al punto  $(x, y, z)$  di  $\pi'$  il punto  $(x, y, z)$  di  $\pi$  e alla retta  $[u, v, w]$  di  $\pi'$  la retta di  $\pi$  d'equazione (11) (essendo, d'accordo col lemma 2,2,  $t$  un qualunque elemento di  $R - F$  e  $a, a_1; b, b_1; c, c_1$  rispettivamente le componenti di  $u, v, w$  secondo  $t$ ) si ottiene una corrispondenza biunivoca fra gli elementi di  $\pi'$  e di  $\pi$  che conserva le incidenze. Infatti la corrispondenza che abbiamo stabilito associa a un punto o a una retta di  $\pi'$  un ben determinato punto o una ben determinata retta di  $\pi$ . Viceversa ogni punto o retta di  $\pi$  proviene da un ben determinato punto o retta di  $\pi'$ : se, per assurdo, una retta di  $\pi$  provenisse da due rette distinte di  $\pi'$ , il numero delle rette distinte di  $\pi$  sarebbe inferiore al numero delle rette di  $\pi'$ , mentre notiamo subito che le rette di  $\pi'$  sono  $q^4 + q^2 + 1$  e d'altra parte sappiamo che altrettante sono le rette di  $\pi$ . Inoltre se un punto e una retta di  $\pi'$  si appartengono, si appartengono anche il punto e la retta corrispondente di  $\pi$  e viceversa. Risulta così dimostrato il teorema.

2.4 - *Chiamiamo punti le terne ordinate e contrassegnate  $(a, b, c)$  di elementi non tutti nulli di  $R$  e rette le terne*

ordinate e contrassegnate  $[a, b, c]$  di elementi non tutti nulli di  $R$ . Identifichiamo  $(a, b, c)$ ,  $(a', b', c')$  ( $[a, b, c]$ ,  $[a', b', c']$ ) se e solamente se  $a' = ka$ ,  $b' = kb$ ,  $c' = kc$ , essendo  $k$  un elemento di  $R$  diverso da zero. Diciamo poi che  $(x, y, z)$  e  $[u, v, w]$  sono incidenti se, e soltanto se, indicato con  $t$  un qualunque elemento di  $R - F$  e dette  $p, p_1; q, q_1; r, r_1; a, a_1; b, b_1; c, c_1$  rispettivamente le componenti di  $x, y, z, u, v, w$  secondo  $t$ , risultano verificate le (11), (12). Allora tali punti e tali rette con le date relazioni d'incidenza costituiscono il piano di Hughes relativo a  $R$ .

Da questo teorema si ha subito il risultato che cerchiamo

2.5 - Siano  $(x, y, z)$  e  $[u, v, w]$  rispettivamente un punto qualunque e una retta qualunque di  $\pi$ . Allora la corrispondenza  $\mathfrak{D}$  che porta  $(x, y, z)$  in  $[x, y, z]$  e  $[u, v, w]$  in  $(u, v, w)$  è una polarità di  $\pi$ .

È ovvio che  $\mathfrak{D}$  è una dualità. Infatti porta un punto in una retta e una retta in un punto e, per le (11), (12), se un punto e una retta si appartengono, si appartengono anche la retta e il punto corrispondenti in  $\mathfrak{D}$ . Ma si vede subito che  $\mathfrak{D}$  è una polarità; infatti  $\mathfrak{D}$  porta  $(x, y, z)$  in  $[x, y, z]$  e  $[x, y, z]$  in  $(x, y, z)$ ; pertanto il quadrato di  $\mathfrak{D}$  porta  $(x, y, z)$  in se stesso.

Nel dimostrare il teorema 2.4 abbiamo fatto vedere che  $\pi'$  è un piano proiettivo verificando che  $\pi'$  è isomorfo al piano di Hughes  $\pi$  definito in principio. Ora concludiamo facendo vedere come indipendentemente da [1, 3, 5] si possa facilmente mostrare lo stesso fatto.

Tenuto conto della dualità delle definizioni di punto e di retta di  $\pi'$  e delle relazioni d'incidenza, ci basterà riconoscere che due rette distinte di  $\pi'$  hanno uno ed un solo punto in comune. Osserviamo prima di tutto che una sostituzione lineare a coefficienti in  $F$  sulle variabili  $x, y, z$  di determinante diverso da zero fornisce una trasformazione di  $\pi'$  in sé che muta i punti di una retta in punti di una retta, e che chiameremo pertanto una collineazione di  $\pi'$ . Siano allora  $(u, v, w)$ ,  $[u', v', w']$  due rette distinte di  $\pi'$ . Siccome i punti e le rette di  $\pi'$  a coordinate appartenenti ad  $F$  o proporzionali

ad elementi di  $F$  sono, come si vede subito, gli elementi di un piano desarguesiano e poichè inoltre due rette di  $\pi'$  a coordinate in  $F$  non possono avere a comune un punto a coordinate non appartenenti ad  $F$ , ci basterà supporre che per esempio  $u, v, w$  non siano tutti e tre in  $F$ , nè che siano proporzionali ad elementi di  $F$ . Allora, se la (11) è un'equazione a cui soddisfano i punti di  $[u, v, w]$ ,  $a_1, b_1, c_1$  non sono tutti e tre nulli, nè proporzionali (secondo un elemento di  $F$ ) ad  $a, b, c$ . Quindi esiste una sostituzione lineare a coefficienti in  $F$  e di determinante diverso da zero che muta la forma  $y + xt$  nella forma  $ax + by + cz + (a_1x + b_1y + c_1z)t$ , cioè una collineazione di  $\pi'$  che muta  $[t, 1, 0]$  (cioè la retta i cui punti soddisfano l'equazione  $y + xt = 0$ ) in  $[u, v, w]$ . Allora la collineazione inversa muta  $[u, v, w]$  in  $[t, 1, 0]$  e muterà  $[u', v', w']$  in  $[\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}]$ . Siccome  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$  sono determinati a meno d'un fattore appartenente ad  $R$ , tenuto conto di 2.3, possiamo supporre che  $\bar{v}$  appartenga ad  $F$ . Ne viene che, posto  $\bar{u} = a + a_1t$ ,  $\bar{v} = b$ ,  $\bar{w} = c + c_1t$  ( $t$  elemento qualunque di  $R - F$ ;  $a, a_1, b, c, c_1$  elementi di  $F$ ), i punti di  $[\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}]$  soddisfano l'equazione

$$(13) \quad ax + by + cz + (a_1x + c_1z)t = 0,$$

e ci sarà sufficiente dimostrare che il sistema dell'equazione (13) e dell'equazione  $y + xt = 0$  ammette, a meno d'un fattore sinistro appartenente ad  $R$ , una ed una sola soluzione. Notiamo che  $[\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}]$  e  $[t, 1, 0]$  sono distinte perchè se queste due rette coincidessero coinciderebbero anche  $[u, v, w]$  e  $[u', v', w']$ , perchè una collineazione muta rette coincidenti in rette coincidenti. Dall'equazione (13) e dall'equazione  $y + xt = 0$  abbiamo

$$(14) \quad x(a - bt) + cz + (a_1x + c_1z)t = 0.$$

Ebbene questa permette di ricavare in modo unico  $x, z$  (e quindi  $y$ ), a meno di un fattore sinistro. La cosa è evidente per  $c_1 = 0$ , perchè allora la (14) dà

$$x(a - bt + a_1t) + cz = 0,$$

che non è indeterminata perchè, se fosse  $a=c=0$ ,  $a_1=b$ ,  $[\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}]$  e  $[t, 1, 0]$  coinciderebbero. Se  $c_1 \neq 0$ , posto  $a_1x + c_1z = Z$ , si ha  $z = c_1^{-1}(Z - a_1x)$ , e quindi dalla (14) si ottiene

$$x(a - cc_1^{-1}a_1 - bt) + Z(cc_1^{-1} + t) = 0.$$

Neanche questa può essere indeterminata e permette di ricavare in modo unico  $x$  e  $Z$  a meno di un fattore sinistro. Sempre poi a meno dello stesso fattore sinistro si possono ricavare in modo unico  $y$  e  $z$ .

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] D. R. HUGHES, *A class of non-desarguesian projective planes*, Canadian J. Math., 9, pp. 377-388 (1957).
- [2] D. R. HUGHES, *Review of some results in collineation groups*, Proceedings of symposia in pure mathematics, vol. 1, pp. 42-55.
- [3] L. A. ROSATI, *I gruppi di collineazioni dei piani di Hughes*, Boll. U.M.I., serie III, vol. 13 (1958), pp. 505-513.
- [4] O. VELEN e J. H. M. WEDDERBURN, *Non-desarguesian and non-pascalian geometries*, Trans. Amer. Math. Soc., 8 (1907), pp. 379-388.
- [5] G. ZAPPA, *Sui gruppi di collineazioni dei piani di Hughes*, Boll. U.M.I., serie III, vol. 12 (1957), pp. 507-516.
- [6] H. ZASSENHAUS, *Über endliche Fästkörper*, Abh. Math. Sem. Hamburg Univ., 11 (1935), pp. 187-220.