

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

TOMASO MILLEVOI

Sulla classificazione cremoniana delle congruenze di curve razionali dello spazio

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 30 (1960), p. 194-214

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1960__30__194_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SULLA CLASSIFICAZIONE CREMONIANA DELLE CONGRUENZE DI CURVE RAZIONALI DELLO SPAZIO

Nota () di TOMASO MILLEVOI (a Trieste)*

Un fascio di curve razionali del piano, in base al teorema di Noether, è sempre riducibile, mediante una opportuna trasformazione birazionale del piano, in un fascio di rette.

Nello spazio, per le congruenze di curve razionali, non sussiste una proprietà analoga. Infatti già Montesano¹⁾ diede esempi di congruenze di coniche nello spazio non cremonianamente riducibili a stelle di rette.

S. Kantor, nel corso di un suo lavoro²⁾, affermò che le congruenze di curve razionali dello spazio sono cremonianamente equivalenti o a congruenze di coniche o a stelle di rette ed abbozzò una dimostrazione incompleta di tale proposizione.

Avendo avuto il Kantor più di una idea geniale, si poteva credere che la sua affermazione fosse giusta; in un articolo di Rohn - Berzolari³⁾ sull'Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften tale risultato si considera appunto acquisito.

Questa proprietà delle congruenze di curve dello spazio risulterebbe molto utile in diversi casi: essa permetterebbe, ad esempio, di dimostrare la supposta irrazionalità dell'ipersuperficie cubica generica dell' S_4 .

(*) Pervenuta in Redazione il 1 Dicembre 1959.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Trieste.

¹⁾ MONTESANO D., *Sui vari tipi di congruenze lineari di coniche dello spazio*. Rend. dell'Acc. di Napoli (1895), pagg. 92-110, 155-181.

²⁾ KANTOR S., *Die Typen der linearen Complexe rationaler Curven im R_r* . Amer. Jour. of Mathem. 23 (1901), pag. 1.

³⁾ Vol. III, 2 parte, 2. A pag. 1340.

Montesano aveva provato l'impossibilità di ridurre cremonianamente a stelle di rette certi tipi di congruenze di coniche di indice uno, con considerazioni sulla parità delle intersezioni variabili delle coniche della congruenza con superficie di un sistema che si possa interpretare come immagine del sistema dei piani dello spazio in una corrispondenza birazionale.

Un tal metodo d'indagine non può però applicarsi per stabilire se stelle di rette e congruenze di coniche sono i soli tipi birazionalmente distinti di congruenze di curve razionali dello spazio.

Visto che vari tentativi di dimostrare questa proprietà non avevano dato alcun risultato positivo, si è pensato che la proprietà stessa non sussistesse, e si è cercato un esempio contrario.

Nella prima parte di questo lavoro si stabilisce un lemma che dà una condizione necessaria affinché due varietà contenenti certe famiglie di coniche si corrispondano birazionalmente in modo che le coniche di una famiglia siano le immagini delle coniche dell'altra; condizione che fa riferimento alle coniche riducibili delle due famiglie.

Nella seconda parte si dà un esempio di una congruenza di curve razionali dell' S_3 che si dimostra, mediante il lemma precedente, non esser riducibile, con una trasformazione cremoniana dell' S_3 , in una stella di rette o in una congruenza di coniche; esempio che dimostra l'infondatezza dell'affermazione del Kantor.

Nel presente lavoro si sviluppano i metodi usati dal prof. Morin nella sua Nota *Sulle varietà algebriche che contengono un sistema di curve razionali* ⁴⁾ e dalla sua allieva M. Mehle Nidito nella Memoria *Sulla classificazione cremoniana delle congruenze di coniche di indice 1 dell' S_3* ⁵⁾.

⁴⁾ Rend. dell'Univ. di Padova, Vol. IX (1938) pag. 123.

⁵⁾ Rend. dell'Univ. di Padova, Vol. XX (1951) pag. 430.

PARTE PRIMA

1. - Consideriamo una ipersuperficie F di uno spazio lineare S_r , dell'ordine n ($n \geq 2$) e dotata di una retta l multipla per la F di molteplicità $n-2$; i piani per l segano la F (fuori della retta l) secondo un sistema K di coniche C . Una tale ipersuperficie la diremo di tipo « C ».

L'equazione della F , ove la retta l si assuma come lato O_0O_1 della piramide delle coordinate nell' S_r , sarà allora

$$(1) \quad F \equiv a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + a_{11}x_1^2 + 2a_{02}x_0 + 2a_{12}x_1 + a_{22} = 0$$

in cui a_{00} , a_{01} , a_{11} ; a_{02} , a_{12} e a_{22} sono forme, nelle variabili x_2, x_3, \dots, x_r rispettivamente dei gradi $n-2$, $n-1$ e n .

Indichiamo con π lo spazio lineare S_{r-2} che congiunge i vertici O_2, O_3, \dots, O_r della piramide delle coordinate. Un punto generico P_c dello spazio π individua un piano per l , cioè una conica C della congruenza K ⁶⁾. Otteniamo così una corrispondenza Ω della F con π nella quale ai punti di una generica conica C di K corrisponde un medesimo punto P_c di π . Alla varietà λ ad $r-2$ dimensioni formata dalle coniche degeneri di K corrisponde nella Ω in π un'ipersuperficie φ , di ordine $3n-4$ data dall'equazione

$$A \equiv |a_{ij}| = 0.$$

2. - Consideriamo una trasformazione birazionale tra due ipersuperficie di tipo « C », trasformazione in cui si corrispondano le coniche dei relativi sistemi K .

Per l'evidente analogia con le mappe tra spazi fibrati chiameremo tali corrispondenze trasformazioni birazionali tra ipersuperficie « fibrato » di tipo « C ».

Vogliamo studiare le proprietà di siffatte corrispondenze in relazione alle varietà φ rappresentative delle coniche degeneri.

⁶⁾ La (1) può interpretarsi nelle coordinate affini x_0, x_1 come l'equazione della C nel piano (l, P_c) , avente la l come *retta impropria*.

3. - Procuriamoci, per gli sviluppi successivi, un opportuno modello birazionale « normale » di tali ipersuperficie « fibrato ».

Mediante opportune ⁷⁾ trasformazioni birazionali dell' S_7 , una F generale di tipo « C » si trasforma dapprima in una di equazione

$$(2) \quad A_{22}a^2y_0^2 + b^2y_1^2 + a_{00}Ac^2 = 0$$

dove a, b, c son forme generiche, nelle variabili y_2, y_3, \dots, y_7 dei gradi, rispettivamente, $n-2+j, 2n-4+j$ e $j \geq 0$ e dove le forme A_{22}, a_{00} ed A son scritte pure nelle variabili y_2, y_3, \dots, y_7 .

Scegliendo opportunamente le tre forme a, b, c si può fare in modo (mediante semplificazione) che l'equazione si muti poi in una del tipo che diremo « normale »

$$(3) \quad b_{00}y_0^2 + b_{11}y_1^2 + b_{22} = 0$$

dove b_{00}, b_{11}, b_{22} son forme a due a due prive di fattori comuni e dotate eventualmente di fattori multipli al più doppi.

La varietà φ , rappresentativa delle coniche degeneri del sistema K ha, per questa ipersuperficie, equazione

$$(4) \quad b_{00}b_{11}b_{22} = 0.$$

Delle sue componenti chiameremo *virtuali* quelle doppie, che possono eliminarsi per semplificazione (introducendo eventualmente al loro posto delle altre componenti doppie qualunque) con opportuna scelta delle forme a, b, c ; tali componenti doppie sono immagini di coniche di K semplicemente

⁷⁾ Cfr. U. MORIN, — *Sulle varietà algebriche...* — Rend. del Sem. Matem. dell'Univ. di Padova Vol. IX (1938) pagg. 127-128. Si può anzi, in questo caso, prescindere dalle considerazioni del N°. 5 della nota, e supporre che tanto a_{00} quanto A_{22} non siano identicamente nulle, chè, altrimenti, l'ipersuperficie F sarebbe *linearmente* razionale.

degeneri; chiameremo *virtuali* anche le componenti che rappresentano sistemi di coniche riducibili in rette che descrivono varietà distinte.

4. - Possiamo ora enunciare il seguente:

LEMMA: *Una trasformazione birazionale tra due ipersuperficie fibrato di tipo « C » in forma normale subordina tra le componenti « effettive » delle varietà rappresentative delle coniche degeneri una corrispondenza birazionale.*

Infatti: la corrispondenza birazionale tra coniche corrispondenti è una proiettività che può estendersi ad una omografia tra i rispettivi piani. La corrispondenza birazionale tra le coniche in quanto enti subordina una corrispondenza birazionale tra le due stelle di piani su cui giacciono le coniche.

Siccome si corrispondono le rette improprie dei piani delle coniche (in quanto intersezioni di piani corrispondenti) la omografia è un'affinità, in cui inoltre, essendo scritte le coniche in forma canonica, si corrispondono le due origini in quanto poli di rette corrispondenti.

Le equazioni della trasformazione birazionale saranno quindi del tipo

$$\begin{aligned} y_0 &= q(lz_0 + mz_1) \\ y_1 &= q(nz_0 + pz_1) \\ y_2 &= sf_2 \\ &\dots\dots\dots \\ y_r &= sf_r \end{aligned}$$

dove $l, m, n, p; f_2, \dots, f_r; q$ ed s sono forme nelle variabili z_2, \dots, z_r dei gradi, rispettivamente, $\alpha, \beta, \gamma, \alpha + \gamma - \beta + 1$; le ultime $r - 1$ equazioni sono razionalmente invertibili, l, m, n, p son privi di fattori comuni, ed ove inoltre

$$(5) \quad b_{00}lm + b_{11}np \equiv 0$$

e

$$(5') \quad lp - mn \equiv \equiv 0.$$

La ipersuperficie trasformata avrà equazione

$$(6) \quad (b_{00}l^2 + b_{11}n^2)q^2z_0^2 + (b_{00}m^2 + b_{11}p^2)q^2z_1^2 + s^2b_{22} = 0.$$

Essendo però la ipersuperficie trasformata in forma « normale », q deve risultare una costante, oppure b_{22} dev'essere divisibile per q^2 ; più propriamente l'equazione della ipersuperficie trasformata sarà

$$(7) \quad (b_{00}l^2 + b_{11}n^2)z_0^2 + (b_{00}m^2 + b_{11}p^2)z_1^2 + s^2\bar{b}_{22} = 0$$

con $\bar{b}_{22} = b_{22}/q^2$; equazione che si può anche scrivere, tenuto conto delle condizioni (5)

$$(8) \quad b_{00}(lp - mn)\frac{l}{p}z_0^2 + b_{11}(lp - mn)\frac{p}{l}z_1^2 + s^2\bar{b}_{22} = 0.$$

Le medesime considerazioni di prima portano ad affermare che un eventuale fattore comune a due dei coefficienti

$$b_{00}(lp - mn)\frac{l}{p}, \quad b_{11}(lp - mn)\frac{p}{l}, \quad s^2\bar{b}_{22}$$

dev'essere fattore pure del terzo.

Un fattore di $(lp - mn)$ che non divida nè p nè l dovrà quindi dividere o s^2 o b_{22} .

Consideriamo ora il « discriminante » della conica ottenuta; esso risulta

$$b_{00}b_{11}\bar{b}_{22}s^2(lp - mn)^2$$

a meno dei fattori di $(lp - mn)$ che non dividono nè p nè l .

Notiamo quindi che la varietà rappresentativa delle coniche degeneri dell'ipersuperficie trasformata è proprio la trasformata birazionale della varietà φ , salvo componenti virtuali doppie (q^2 , s^2 e fattori di $(lp - mn)$ che dividono p od l) e componenti relative a fattori di $(lp - mn)$ che non dividono p od l ; queste però sono anch'esse virtuali in quanto rappresentative di coniche riducibili in rette razionalmente

separabili: infatti per $lp = nm$, $-\frac{b_{00}}{b_{11}}$ risulta un quadrato perfetto, ed il primo membro della (8) o della (3) si spezza in due componenti razionalmente separabili.

Il lemma è così dimostrato.

5. - Si è trovata così una *condizione necessaria* affinché due ipersuperficie di tipo « *C* » in forma normale si corrispondano birazionalmente conservando le « fibrature » dei sistemi di coniche.

Una condizione del tutto analoga (che fa riferimento cioè direttamente alle varietà φ rappresentative delle coniche riducibili) vale però anche per le ipersuperficie generali di tipo « *C* ». Ciò perchè nel passaggio dalla forma generale a quella normale si sono introdotti o soppressi nel « discriminante » della conica solo fattori relativi a componenti virtuali.

Nel passaggio dalla (1) alla (2) si sono infatti introdotti i nuovi fattori a^2 , b^2 , c^2 rappresentativi di componenti doppie relative a coniche semplicemente degeneri; ed i fattori a_{00} ed A_{22} : ma per $a_{00} = 0$, poichè $A_{22} = a_{00}a_{11} - a_{04}^2$, il primo membro della (2) si scinde in due fattori lineari in y_0 , y_1 e quindi le due componenti di queste coniche riducibili appartengono a due distinte varietà; se, d'altra parte, $A_{22} = 0$, cioè $a_{00}a_{11} = a_{04}^2$ risulta $a_{00}A = -(a_{00}a_{12} - a_{10}a_{02})^2$, il primo membro della (2) si scinde ugualmente in due fattori lineari e le due componenti descrivono due varietà distinte.

Nel passaggio dalla (2) alla (3), poi, si sono trasformate le componenti doppie relative a coniche doppiamente degeneri in componenti semplici relative a coniche semplicemente degeneri.

Se quindi, insieme con le componenti semplici relative a coniche riducibili in rette non razionalmente separabili, consideriamo « effettive » anche le componenti doppie relative a coniche doppiamente degeneri (contate però con molteplicità uno) possiamo enunciare il seguente:

LEMMA: *Una trasformazione birazionale tra due ipersuperfici fibrato di tipo « C » subordina tra le componenti « effettive » delle varietà rappresentative delle coniche degeneri una corrispondenza birazionale.*

PARTE SECONDA

1. - Consideriamo la rete Σ_2 delle superficie razionali F^4 con tacnodo in O , aventi ivi il medesimo piano tangente ω , passanti tutte: a) per una curva dell'ottavo ordine e di genere 6, C^8 , avente in O un punto doppio; b) per quattro rette per O appartenenti al piano tangente ω .

Questa rete Σ_2 di superficie individua una congruenza di quartiche razionali (curve caratteristiche della rete).

Una F^4 con tacnodo può rappresentarsi su di un piano col sistema delle \mathcal{C}^6 per sette punti doppi $A_1 \dots A_7$ e quattro punti semplici $A_8 \dots A_{11}$ situati sopra una medesima cubica ellittica \mathcal{C}^3 ; questa è l'immagine dell'intorno del tacnodo O , ed i quattro punti $A_8 \dots A_{11}$ sono le immagini delle quattro rette in cui il piano tangente in O sega la superficie. La curva C^8 sia rappresentata da una \mathcal{C}^{12} per A_1^3 , per $A_2^4 \dots A_7^4$ (quadrupli) e per $A_8 \dots A_{11}$.

Una generica superficie F del quarto ordine sega questa F^4 in una curva che si rappresenta con una \mathcal{C}^{24} per $A_1 \dots A_7$ multipli di molteplicità 8 e per $A_8 \dots A_{11}$ quadrupli; se la F passa per le quattro rette del piano ω la \mathcal{C}^4 avrà i quattro punti $A_8 \dots A_{11}$ quintupli; se la F passa per la C^8 , la \mathcal{C}^{24} conterrà la \mathcal{C}^{11} per A_1^3 per $A_2^4 \dots A_7^4$ e per $A_8 \dots A_{11}$; se la F ha in O un tacnodo con piano tangente ω , la \mathcal{C}^{24} conterrà la \mathcal{C}^3 quattro volte; della \mathcal{C}^{24} per $A_1^8 \dots A_7^8 A_8^5 \dots A_{11}^5$ rimane quindi variabile una \mathcal{C}^1 per A_1 , che rappresenta appunto una quartica (razionale) avente in O un punto doppio.

2. - Trasformiamo razionalmente l' S_3 in una V_3 dell' S_4 in modo che alle quartiche della congruenza corrispondano delle coniche: le sezioni iperpiane della V_3 siano rappresentate in S_3 dal sistema Σ_4 delle superficie del quinto ordine F^5 aventi in O un punto triplo con retta doppia infinitesima nel piano ω , passanti per le quattro rette, per la C^8 , per due punti A e B su di una retta b per O e per altri due punti C e D su di una retta d per O nessuna delle quali appartenga ad ω .

Una generica superficie F del quinto ordine sega una F^4 della rete in una curva cui corrisponde, nella rappresentazione piana della F^4 , una \mathcal{C}^{30} con $A_1 \dots A_7$ multipli di molteplicità 10 e con $A_8 \dots A_{11}$ quintupli; se la F passa per le quattro rette di ω i punti $A_8 \dots A_{11}$ risultano sestupli: se la F contiene la \mathcal{C}^8 la \mathcal{C}^{30} conterrà la \mathcal{C}^{11} ; se la F ha un punto triplo in O , con retta doppia infinitesima su ω , la \mathcal{C}^{30} conterrà cinque volte la cubica \mathcal{C}^3 . Della \mathcal{C}^{30} per $A_1^{10} \dots A_7^{10}$ e $A_8^6 \dots A_{11}^6$ rimane quindi variabile una \mathcal{C}^4 con A_1 doppio e passante per $A_2 \dots A_7$.

Il sistema di tali \mathcal{C}^4 ha dimensione

$$\frac{4(4 + 3)}{2} - 3 - 6 = 5$$

e quindi, essendo tre le F linearmente indipendenti che contengono la F^4 , il sistema Σ delle F ha dimensione $3 + 5 = 8$.

Queste superficie F possono interpretarsi come il sistema rappresentativo delle sezioni iperpiane di una varietà W_3 di un S_8 trasformata razionale dell' S_3 della congruenza. In questa trasformazione razionale alle quartiche della congruenza corrispondono delle coniche in quanto una \mathcal{C}^4 incontra una \mathcal{C}^1 per A_1 (immagine di una quartica della congruenza) in due punti variabili, cioè una F del sistema Σ incontra una quartica della congruenza in due punti.

Consideriamo, in S_3 , una retta per O , non appartenente al piano ω , e su questa fissiamo due punti A e B ; poi su di un'altra retta per O , non giacente sul piano ω , fissiamo un'altra coppia di punti C e D ; le F di Σ che passano per questi quattro punti formano un sistema lineare Σ_4 di dimensione 4 che potremo interpretare come il sistema rappresentativo delle sezioni iperpiane di una varietà V_3 di un S_4 trasformata razionale dell' S_3 . Questa V_3 può pensarsi come proiezione della W_3 e quindi anche in V_3 alle quartiche della congruenza corrispondono delle coniche.

3. - Vogliamo studiare questa V_3 e determinarne, in particolare, l'ordine che sarà uguale al grado del sistema lineare Σ_4 . Osserviamo intanto che esiste in Σ_4 una rete di superficie che si spezzano nel piano OBD ed in una F^4 di Σ_2 .

Prendiamo allora tre F^5 e vediamo in quanti punti si intersecano fuori dei punti base; una delle F^5 si spezzi nel piano OBD ed in una F^4 ; sulla F^4 le rimanenti F^5 segano curve che si rappresentano con \mathcal{C}^4 per $A_1^2, A_2 \dots A_7$ ed han quindi $4 \cdot 4 - 2 \cdot 2 - 6 = 6$ punti (variabili) in comune; sul piano OBD le F^5 di Σ_4 segano delle quintiche con O triplo aventi nell'intorno infinitesimo del prim'ordine di O , nella direzione dell'intersezione col piano ω , un punto O' doppio, e passano inoltre per A, B, C, D e per i 6 punti intersezione del piano fuori di O con la C^8 ; la dimensione del sistema di tali quintiche è

$$d = \frac{5 \cdot 8}{2} - 6 - 3 - 10 = 1;$$

si tratta quindi di un fascio Φ di quintiche che avranno altri due punti base E ed F ($25 - 9 - 4 - 10 = 2$) pei quali punti base passano quindi tutte le F^5 di Σ_4 , che non hanno su OBD intersezioni variabili. Il grado del sistema Σ_4 è quindi 6: la V_3 ha quindi ordine 6.

Le quintiche di Φ sono curve fondamentali, che si trasformano quindi in punti; al piano OBD corrisponde quindi una curva che, dovendo appartenere ad un sistema lineare ∞^2 di sezioni iperpiane (corrispondenti di F^5 che si spezzano in OBD ed in una F^4 di Σ_2) è una retta. Le quartiche intersezione delle F^4 col piano OBD segano le quintiche di Φ , fuori dai punti base, in $20 - 6 - 4 - 6 = 4$ punti: il piano OBD si trasforma quindi in una retta l quadrupla. Consideriamo un piano generico π per l ; esso sega ulteriormente la V_3^6 in una conica che è l'immagine di una quartica della congruenza; infatti il piano π potendosi pensare come l'intersezione di due iperpiani per l , la conica sarà l'immagine dell'intersezione di due F^5 per OBD fuori del piano stesso (e delle curve basi), cioè dell'intersezione di due F^4 che è appunto una quartica della congruenza.

4. - Il sistema Σ_4 è semplice, infatti:

Fissiamo un punto P in posizione generica e consideriamo

tutte le F^5 per P ; tra queste ci sono quelle che si spezzano nel piano OBD ed in una F^4 per P , (tali F^4 si segano lungo una quartica della congruenza), c'è la F^5 che si spezza nel piano CDP e nella F^4 per A e B e quella che si spezza nel piano ABP e nella F^4 per C e D ; queste ultime due F^5 si segano lungo una quartica Q^4 sul piano CDP , ed un'altra sul piano ABP , lungo la retta OP e lungo la quartica L^4 della congruenza intersezione delle due F^4 ; passando la L^4 per E ed F (la F^5 che si spezza nel piano CDP e nella F^4 per A e B passa per E ed F , e siccome il piano CDP non vi passa, essi appartengono alla F^4 ; analogamente per la F^4 per C e D) essa interseca il piano ABP solo in punti base e non ha (fuori di O) intersezioni con un'altra quartica della congruenza; la quartica Q^4 incontra il piano OBP solo in punti base (O^2 , C , D), così pure la quartica del piano ABP e la retta OP ; quindi un eventuale punto P' comune a tutte le F^5 per P dovrebbe trovarsi sulla quartica della congruenza che passa per P . Ora la F^4 per A e B (e quella per C e D) se contiene un punto di questa quartica, la contiene tutta e quindi contiene P contro l'ipotesi che P sia generico; il piano ABP sega la quartica per P (fuori di O) in un ulteriore punto P_1 , il piano CDP in un ulteriore punto P_2 , quindi dovrebbe essere $P' = P_1 = P_2$ allineato con OP ; ciò è impossibile in quanto si può imporre alle F^5 di Σ_4 di passare per due punti qualunque allineati con O senza che per questo contengano la loro congiungente. (Inoltre la quartica generica della congruenza dovrebbe esser piana poichè un piano per P ed R , non allineato con O e P la segherebbe in sei punti O^2 , P , P' , R , R'). Essendo il sistema Σ_4 semplice, la corrispondenza razionale tra l' S_3 e la V_3^6 è in particolare birazionale.

5. - Consideriamo le F^5 di Σ_4 che si spezzano nella F^4 per A e B ed in un piano per C e D . Esse formano un fascio; a questo corrisponde in S_4 un fascio di superficie segate da un fascio di iperpiani (che ha per sostegno un piano σ). Ad un piano per C e D corrisponde una superficie di quart'ordine, infatti due F^5 si incontrano sul piano in 4 punti variabili [25 — 9 (assorbiti da O) — 4 (dal punto dop

piano O' nell'intorno infinitesimo di O nella direzione dell'intersezione col piano ω) — 2 (C, D) — 6 (C^s fuori di O)] ; alla F^4 per A e B corrisponde una superficie di ordine due, poichè due F^5 vi si incontrano in due punti variabili (su una F^4 generica in 6, da questi bisogna togliere A, B ed anche E ed F , poichè la F^4 più un piano per CD segano il piano OBD in una quintica di Φ che si spezza nella retta OD ed in una quartica che passa quindi per E ed F). Come la F^4 per A e B è parte comune delle F^5 del fascio, così la quadrica in cui si trasforma la F^4 dev'essere parte comune delle superficie segate sulla V_3^i dal fascio di iperpiani e non può esser quindi che il piano σ contato due volte.

Che la F^4 per A e B si trasformi in un piano doppio lo si può vedere anche dal fatto che le F^5 di Σ_4 vi inducono una involuzione I_2 di coppie di punti: nella rappresentazione piana della F^4 le curve intersezioni delle F^5 hanno per immagine delle \mathcal{C}^4 con A_1 doppio e passanti per $A_2 \dots A_7$ e per i punti A', B', E', F' corrispondenti, rispettivamente, di A, B, E, F . Sembrerebbe trattarsi di un fascio ($14 - 3 - 10 = 1$), invece appartenendo E, F ad una quartica della congruenza (anche la F^4 per C e D passa per E, F) E' ed F' sono allineati con A_1 , ed essendo A, B allineati con O , esiste un fascio di sezioni piane per O, A, B e quindi un fascio di cubiche per $A_1, A_2, \dots, A_7, A', B'$ una delle quali (in corrispondenza alla sezione col piano OBD) passa per E', F' . Potendosi quindi trovare tre curve linearmente indipendenti, due che si spezzano nella retta A_1E' ed in due cubiche del fascio ed una nella cubica per E', F' ed in una retta per A_1 , il sistema delle quartiche è (almeno) una rete; e non può aver dimensione maggiore di due chè essendoci due F^5 del sistema Σ_4 diverse che contengono la F^4 , questo avrebbe dimensione maggiore di quattro. Le curve della rete si incontrano in $4 \cdot 4 - 4 - 10 = 2$ punti variabili e generano così una involuzione I_2 .

Il piano σ ha in comune con l un (solo) punto (corrispondente della quintica di Φ che la F^4 più un piano per CD segano sul piano OBD).

Analoghi ragionamenti si possono fare a riguardo della

F^4 per C e D che si trasforma quindi in un piano doppio τ della V_3^6 che è incidente in un punto la retta l .

Queste due F^4 si incontrano lungo la quartica della congruenza che passa per E ed F . Essa è una curva fondamentale per il sistema delle F^5 , infatti una F^5 sega una quartica generica della congruenza in due punti (fuori dai punti base); ora, passando la quartica per E ed F questi assorbono le due intersezioni e non ne rimangono di variabili; la quartica in questione si trasforma quindi in un punto T . Prendiamo tre F^5 che passino per questa quartica: una sia la F^4 per A, B più un piano per C, D ; sulla F^4 le altre due F^5 si incontrano solo sulla quartica (fuori dai punti base), sul piano si incontrano (fuori dai punti base) in $25 - 9(O) - 4(O') - 6(C^8) - 2(C, D) = 4$ punti due dei quali appartengono alla quartica: le tre superficie si incontrano quindi, fuori della quartica in due punti variabili. Ciò vuol dire che il punto T è quadruplo.

6. - Il piano ω si trasforma in una retta m ; infatti: una F^5 di Σ_4 che passi per un punto P di ω contiene di conseguenza la retta OP , il fascio di rette per O su ω è quindi un fascio di curve fondamentali, ed il piano ω si trasforma in una curva m ; ora una F^5 ha in comune col fascio una sola retta e quindi una sezione iperpiana incontra m in un solo punto ed m è quindi una retta; la retta m è semplice in quanto una F^5 che contiene ω ha una parte residua che è una superficie del quarto ordine con O doppio e tangente ivi ad ω , e questa superficie incontra una retta del fascio (fuori di O) in un sol punto. Che la retta sia semplice lo si può vedere anche nel seguente modo: prendiamo tre F^5 di Σ_4 che passino per una retta OP di ω e vediamo in quanti punti si intersecano fuori dai punti base e da OP ; di queste F^5 una si spezzi nella F^4 per A e B e nel piano OPD , su questo piano una F^5 per P sega una quintica che contiene la retta OP , la quartica residua avrà perciò O doppio ed O' (punto dell'intorno infinitesimo di O nella direzione OP) semplice; le due quartiche residue segate dalle due F^5 sul piano si incontreranno in

$$16 - 4 - 1 - 6(C^8) - 2(C, D) = 3$$

tre punti fuori dai punti base; sulla F^4 le due F^5 si incontrano, come si è già visto, in due punti (fuori dai punti base); quindi fuori di OP (e dei punti base) tre F^5 per la retta si incontrano in cinque punti, e la retta si trasforma perciò in un punto semplice.

La retta m si appoggia alla retta l in un punto, ed è componente semplice di una conica (semplicemente) degenera della congruenza sulla V_3^6 .

Infatti la retta intersezione di ω col piano OBD è una retta fondamentale del fascio Φ di quintiche e si trasforma quindi in un punto di l ; non ci sono d'altra parte altri punti di ω che possano avere il corrispondente su l . La curva intersezione della V_3^6 con il piano per l, m proviene dall'intersezione di due F^5 che contengono ω ed il piano OBD ; esse si spezzano quindi nei due piani ed in due F^3 tangenti in O ad ω che passano per la C^8 ; le due F^3 si incontrano ulteriormente lungo una retta n , retta che è curva fondamentale per il sistema delle F^4 , in quanto fa parte dell'intersezione di due particolari F^4 di Σ_2 , le due F^3 più il piano ω . Le due F^3 segano ω lungo due cubiche con O doppio, che passano inoltre per i quattro punti che la C^8 ha a comune con ω fuori di O ; le due cubiche si incontrano ulteriormente in un punto N che è quindi l'intersezione di ω con la retta n . La retta n incontra una F^4 in quattro punti che appartengono, in quanto essa è curva fondamentale di Σ_2 alla C^8 : le F^5 incontrano quindi la retta n in un solo punto variabile e la sua immagine sulla V_3^6 è quindi ancora una retta che incontra la m in un punto che è il corrispondente di N , e la retta l nel punto corrispondente dell'intersezione di n col piano OBD .

7. - Scriviamo ora l'equazione della V_3^6 assumendo come lato O_0O_1 della piramide fondamentale delle coordinate la retta l . Si ottiene così l'equazione:

$$(1) \quad a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + a_{11}x_1^2 + 2a_{02}x_0 + 2a_{12}x_1 + a_{22} = 0$$

con a_{00} , a_{01} , a_{11} forme omogenee di quarto grado nelle variabili x_2 , x_3 , x_4 ; a_{02} , a_{12} forme di quinto grado e a_{22} forma di sesto grado, sempre nelle variabili x_2 , x_3 , x_4 .

Sia inoltre σ il piano $x_0 = x_2 = 0$ e τ il piano $x_1 = x_3 = 0$, di modo che T risulta essere O_4 .

L'equazione (1) risulta quindi

$$(2) \quad b_{00}x_0^2x_3^2 + 2b_{01}x_0x_1x_2x_3 + b_{11}x_1^2x_2^2 + \\ + 2b_{02}x_0x_2x_3^2 + 2b_{12}x_1x_2^2x_3 + b_{22}x_2^2x_3^2 = 0$$

con le b_{ij} forme di secondo grado nelle variabili x_2 , x_3 , x_4 .

8. - Il discriminante A dell'equazione (2) per rispetto alle sole variabili x_0x_1 risulta

$$A = \begin{vmatrix} b_{00}x_3^2 & b_{01}x_2x_3 & b_{02}x_2x_3^2 \\ b_{01}x_2x_3 & b_{11}x_2^2 & b_{12}x_2^2x_3 \\ b_{02}x_2x_3^2 & b_{12}x_2^2x_3 & b_{22}x_2^2x_3^2 \end{vmatrix}$$

L'equazione $A = 0$ rappresenta la curva λ del piano $x_2x_3x_4$ in corrispondenza biunivoca colle coniche degeneri segate sulla V_3^6 dai piani per l . Essa, come si vede, è una curva del quattordicesimo ordine. Da essa si staccano, come si verifica con facili calcoli, le due rette $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ ciascuna con molteplicità quattro, e rimane una curva γ di sesto ordine. Si vede facilmente come queste due rette non facciano parte della curva immagine delle quartiche degeneri della congruenza dell' S_3 ; infatti: le coniche degeneri per la retta l , le cui immagini nel piano $x_2x_3x_4$ sono punti di una di queste due rette, non sono corrispondenti di quartiche degeneri della congruenza, ma bensì delle ∞^1 quartiche non degeneri che appartengono alla superficie F^4 per A e B o a quella per C e D .

La curva γ viene ad aver equazione

$$|b_{ij}| = 0.$$

Un punto doppio U della curva λ può provenire o da un punto doppio (fuori di l) della V_3^6 , se le sue coordinate non annullano A_{22} , oppure, e ciò si può vedere direttamente⁸⁾, se per esso $A_{22} = 0$, ma non tutti gli A_{ij} son nulli, da una retta doppia infinitesima nell'intorno di un punto di l , con-

⁸⁾ Consideriamo una V_3^n di S_4 con retta l ($n-2$)-upla (retta A_0A_1) e sia U un punto doppio di λ . Poniamo in U il vertice A_4 . Se, essendo $A(0, 0, 1) = 0$ è anche $A_{22}(0, 0, 1) = 0$, la conica degenera segata dal piano lU ha il punto doppio su l . Poniamo in questo punto il vertice A_0 . Si avrà quindi $a_{00}(0, 0, 1) = a_{01}(0, 0, 1) = a_{02}(0, 0, 1) = 0$. Ora $A = a_{00}A_{00} + a_{01}A_{01} + a_{02}A_{02}$, ed indicando con l'apice una derivata parziale rispetto a una qualunque variabile,

$$A' = a'_{00}A_{00} + a_{00}A'_{00} + a'_{01}A_{01} + a_{01}A'_{01} + a'_{02}A_{02} + a_{02}A'_{02}.$$

Calcolando A' in $(0, 0, 1)$ esso risulta $= a'_{00}(0, 0, 1) \cdot A_{00}(0, 0, 1)$. Quindi se U è punto doppio o $a'_{00}(0, 0, 1) = 0$ oppure $A_{00}(0, 0, 1) = 0$. Nella seconda ipotesi la conica segata è doppiamente degenera. Se la supponiamo semplicemente degenera $A_{00}(0, 0, 1) \neq 0$ e quindi si annullano le derivate parziali $a'_{00}(0, 0, 1)$. Introduciamo coordinate non omogenee in modo che A_0 risulti l'origine. L'equazione della V_3^n diventa

$$F \equiv a_{00}^{(n-2)} + 2a_{01}^{(n-2)}y_1 + a_{11}^{(n-2)}y_1^2 + 2a_{02}^{(n-1)} + 2a_{12}^{(n-1)}y_1 + a_{22}^{(n)} = 0$$

dove le $a_{ij}^{(k)}$ son forme omogenee di grado k nelle variabili z_1, w_1, t_1 . Consideriamo una trasformazione per raggi vettori reciproci; la F diventa

$$F_1 \equiv a_{00}^{(n-2)}(y^2 + z^2 + w^2 + t^2) + 2a_{01}^{(n-2)}y(y^2 + \dots) + a_{11}^{(n-2)}y^2 + \\ + 2a_{02}^{(n-1)}(y^2 + \dots) + 2a_{12}^{(n-1)}y + a_{22}^{(n)} = 0.$$

Se interseco la $F_1 = 0$ che ha ordine $n+2$ con una retta parallela al

tenuta nel piano per l che proietta il punto U , oppure da una conica doppiamente degenerare segata sulla V_3 dal piano lU , se tutti gli A_{ij} sono nulli.

Ora un punto doppio isolato per la V_3^6 proviene da una coppia neutra per le superficie di Σ_4 . Si è già visto che se P, P' costituiscono una coppia neutra essi devono appartenere ad una medesima quartica della congruenza. Se la quartica è generica, il sistema delle F^5 vi sega una g_2^2 che non può avere coppie neutre. Se la quartica è riducibile in una C^3 ed in una delle quattro rette tacnodali, essa proviene (nella rappresentazione di una F^4 per essa) da una retta per uno degli A_8, A_9, A_{10}, A_{11} ; in questo caso le F^5 di Σ_4 segano sulla cubica una g_3^2 , e posso trascurare la retta in quanto è una curva base per le F^5 . Se la quartica è riducibile in una C^2 ed in una delle coniche che provengono da uno dei punti A_2, A_3, \dots, A_7 , le F^5 che passano per un punto prefissato di una delle due coniche segano l'altra in una g_1^4 , e non ci sono quindi coppie neutre.

Così è esclusa pure l'eventualità di coppie neutre negli intorni della C^8 .

L'eventualità che ci sia un piano per l che seghi la V_3^6 in una conica doppiamente degenerare è da scartare in quanto questa conica, immagine di una quartica della congruenza, essendo doppiamente degenerare implicherebbe o l'esistenza di

piano $z = w = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = l\rho + y_0 \\ z = z_0 \\ w = w_0 \\ t = p\rho + t_0 \end{array} \right.$$

per il fatto che $a_{00}(0, 0, 1) = a_{01}(0, 0, 1) = a_{02}(0, 0, 1) = 0$, mancano, nell'equazione $F_1 = 0$, i termini di grado massimo in x_4 , e da $a'_{00}(0, 0, 1) = 0$ segue che vi mancano i termini con x_4^{n-3} ; e quindi l'equazione risultante risulta di grado n in ρ e quindi la V_3 ha nell'intorno di A_0 , nel piano $x_2 = x_3 = 0$ una retta doppia infinitesima.

infinite coppie neutre sulla quartica (ipotesti questa già scartata) o l'essere la quartica stessa doppiamente degenera (una C^2 contata due volte); le F^4 di Σ_2 passanti per la C^2 dovrebbero esser ivi tra loro tangenti.

Il piano di questa C^2 segherebbe il fascio di tali F^4 (fuori della C^2) in un fascio di coniche cui apparterebbe anche la C^2 .

I sei punti (fuori di O) intersezione di questo piano con la C^3 dovrebbero appartenere a tutte le F^4 e quindi a tutte le curve intersezione delle F^4 col piano, e sarebbero quindi situati sulla C^2 stessa.

Essa C^2 risulterebbe quindi una curva base per il sistema delle F^4 .

9. - Abbiamo visto così che la curva λ non ha punti multipli fuori dalle due rette $x_2=0$, $x_3=0$, poichè abbiamo escluso la possibilità di punti multipli per la V^3 fuori dai due piani σ e τ (e dalla retta l) e di coniche doppiamente degeneri. Quindi la curva γ non ha punti multipli fuori dalle due rette. Possiamo però asserire che essa non ha punti multipli neanche sulle due rette; infatti:

Consideriamo una V_3 che abbia in O_0O_1 la retta multipla ed abbia τ come piano doppio. Considerando $x_4=0$ come iperpiano improprio ed introducendo coordinate non omogenee, la sua equazione sarà del tipo

$$c_{00}w^2x^2 + 2c_{01}wxy + c_{11}y^2 + 2c_{02}w^2x + 2c_{12}wy + c_{22}w^2 = 0.$$

La curva λ rappresentativa delle coniche degeneri avrà equazione, sul piano zw ,

$$w^4 \cdot |c_{ij}| = 0.$$

Se si considera la trasformazione quadratica di equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x \\ y' = \frac{y}{w} \\ z' = z \\ w' = w \end{array} \right.$$

la trasformata della V_3 sarà una V'_3 , del medesimo ordine. di equazione

$$c_{00}x'^2 + 2c_{01}x'y' + c_{11}y'^2 + 2c_{02}x' + 2c_{12}y' + c_{22} = 0.$$

Ai piani della stella di sostegno la retta impropria del piano xy corrispondono i piani della stella di sostegno la retta impropria del piano $x'y'$; alle coniche segate sulla V_3 dai primi le coniche segate sulla V'_3 dai corrispondenti.

Le coniche degeneri della V'_3 sono in corrispondenza biunivoca coi punti della curva $|c_{ij}| = 0$. Un punto multiplo di questa proviene o da un punto multiplo della V'_3 o da una conica doppiamente degenerare. Qui interessa in particolare il caso che il punto multiplo sulla $|c_{ij}| = 0$ si trovi sull'intersezione della curva con la retta $w' = 0$. In questo caso il punto multiplo (o la conica) della V'_3 sarà situato sull'iperpiano $w' = 0$ e sarà quindi il corrispondente (nella trasformazione quadratica) di un punto multiplo della V_3 nell'intorno infinitesimo di un punto del piano $y = w = 0$, piano che appunto si trasforma nell'iperpiano $w' = 0$.

Con riferimento alla V_3^6 possiamo quindi escludere la possibilità di punti multipli della curva γ su una delle due rette in questione ($x_2 = 0$; $x_3 = 0$).

La curva γ è quindi una sestica priva di punti multipli. Il suo genere p è

$$p = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10.$$

10. - La congruenza di quartiche in questione non è cremonianamente riducibile ad una stella di rette, poichè, altrimenti, esisterebbe una superficie unisecante le quartiche stesse⁹⁾; ciò non è possibile poichè, detto n l'ordine della superficie, $4n$ sarà il numero dei punti intersezione della super-

⁹⁾ Cfr. A. COMESSATTI: *Intorno ad un classico problema di unisecanti*. Boll. U.M.I. (II) A. II (1940), n. 2, pag. 97.

ficie con la quartica generica, e quindi $4n - 1$ intersezioni dovrebbero cadere o in punti fissi o in punti di una curva fissa. Le quartiche hanno in O l'unico punto fisso che però è doppio e non esiste alcuna curva che le incontri in un numero dispari di punti: una curva siffatta dovrebbe appartenere a ciascuna delle F^4 e non potrebbe perciò che essere o una delle quattro rette per O o la C^8 ; ma la C^8 incontra le quartiche in 8 punti variabili e le rette in nessun punto (variabile).

11. - Le congruenze di coniche dello spazio si dividono in tre tipi rispetto alle trasformazioni cremoniane¹⁰).

1) Congruenze di coniche cremonianamente riducibili a stelle di rette.

2) Congruenza delle coniche che giacciono nei piani di un fascio, generando in ciascun piano un fascio di coniche. Le coniche degeneri di una tale congruenza costituiscono, in senso astratto, una curva, sopra la quale le tre coniche degeneri di ogni piano danno un gruppo di una serie lineare (e quindi la curva è trigonale).

3) Congruenza delle coniche caratteristiche di una rete di superficie cubiche con una curva base del settimo ordine.

Si può¹¹) in questo caso trasformare birazionalmente l' S_3 in una V_3^4 dell' S_4 con retta l doppia in modo che alle coniche della congruenza corrispondano le coniche segate sulla V_3 dai piani per l . Le coniche degeneri della V_3 costituiscono, in senso astratto, una curva che ha una componente irriducibile (proveniente dalle coniche degeneri della congruenza in S_3) di genere 6 e non trigonale.

¹⁰) Cfr. M. NIDITO MEHLE: *Sulla classificazione cremoniana...* Rend. di Padova, vol. XX (1951), pag. 437.

¹¹) Cfr. M. NIDITO MEHLE: *Sulla classificazione cremoniana ...* Rend. di Padova, vol. XX (1951), pagg. 439-445.

In base al lemma stabilito nella prima parte, la V_3^6 ora considerata non può essere birazionalmente equivalente alla V_3^4 rappresentativa dell' S_3 con congruenze di coniche del 3° tipo, avendo la curva rappresentativa delle coniche degeneri della V_3^6 una componente irriducibile (proveniente dalle curve degeneri della congruenza in S_3) di genere 10.

Siccome poi questa stessa componente (irriducibile) non è trigonale, essa non può essere birazionalmente equivalente alla curva delle coniche riducibili di una congruenza del 2° tipo.

Non esiste quindi alcuna trasformazione cremoniana in cui si corrispondano l' S_3 della congruenza di quartiche e uno degli S_3 delle congruenze di coniche.