RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

DOMENICO BOCCIONI

$\mathfrak{a}$-modulo supplementare di un S-semigruppo commutativo

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 27 (1957), p. 48-59

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1957__27__48_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1957, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

$\mathfrak{a}$-MODULO SUPPLEMENTARE DI UN S-SEMIGRUPPO COMMUTATIVO

Nota (*) *di* DOMENICO BOCCIONI (*a Padova*)

Lo scopo della presente nota è di mostrare come un ragionamento essenzialmente già fatto in un precedente lavoro ([1][1]), pp. 478-493) si presti pure ad alcune conclusioni, non prive di un certo interesse, relative all'esistenza e alla costruzione di particolari estensioni di un semigruppo commutativo, dotato di un semianello (non necessariamente commutativo) di operatori.

Queste conclusioni si riassumono in un teorema, enunciato nel n.° 3, e in alcuni suoi immediati corollari, in parte già noti, enunciati nei n.i 1, 5 e 6, (si vedano inoltre il 1° e il 2° capov. del n.° 5, e l'ult. capov. del n.° 6).

Nel n.° 6 sono pure stati messi in evidenza alcuni mutui legami fra le proposizioni ottenute.

1. - Siano S un semianello (non necessariamente commutativo), ([1], n.° 1), e G un semigruppo ([1], n.° 1) additivo commutativo.

Diremo che G è un *S-semigruppo* (*commutativo*) *sinistro* se è definita una moltiplicazione (univoca) a sinistra di ogni elemento di S per ogni elemento di G tale che si abbia:

I) $au \in G$,

II) $a(u + u_1) = au + au_1$,

(*) Pervenuta in Redazione il 29 novembre 1956.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

[1]) I numeri fra parentesi quadre rimandano alla bibliografia alla fine della nota.

III) $(a + a_1)u = au + a_1u,$

IV) $a(a_1u) = (aa_1)u,$

qualunque siano $a,\ a_1 \in S,\ u,\ u_1 \in G.$

Come facile conseguenza di un teorema enunciato nel successivo n.° 3, otterremo (nel n.° 3 stesso) il seguente

COROLLARIO: *Di un semianello S sia M un sottoinsieme moltiplicativamente chiuso e costituito da elementi semplificabili in S* ([1], n.° 1), *ed esista un anello complementare sinistro $\mathfrak{A}$ di S rispetto ad M* ([1], n.° 2). *Sia inoltre G un S-semigruppo commutativo sinistro. In queste ipotesi, la seguente condizione:*

C) *Da $\gamma u = \gamma u_1$ $(\gamma \in M,\ u,\ u_1 \in G)$ segue sempre $u = u_1$, è necessaria e sufficiente affinchè esista un « $\mathfrak{A}$-modulo supplementare* ($\mathfrak{A}$-m.s.) *di G rispetto ad M », cioè un $\mathfrak{A}$-modulo sinistro $\mathfrak{G}$, estensione* (cfr. [3], 4° capov. del n.° 17) *di G e tale che ogni elemento ξ di $\mathfrak{G}$ sia rappresentabile nella forma*

$$\xi = \gamma^{-1}(u - v) \qquad (\gamma \in M,\ u,\ v \in G). \tag{1}$$

Se un tale $\mathfrak{G}$ esiste, esso è univocamente determinato da G ed M a meno di isomorfismi.

La necessità della cond. C) si riconosce immediatamente tenendo conto che, se $\mathfrak{G}$ è un $\mathfrak{A}$-m.s. di G rispetto ad M, dalle (1), IV) discende

$$1 \cdot \xi = \xi, \tag{2}$$

qualunque sia $\xi \in \mathfrak{G}$, 1 denotando l'elemento unità di $\mathfrak{A}$, (basta quindi ricordare che ogni $\gamma \in M$ possiede reciproco γ^{-1} in $\mathfrak{A}$).

Nei n.i successivi sfrutteremo il seguente

LEMMA: *Nelle ipotesi del teorema sopra enunciato, se è soddisfatta la condiz.* C), *le eguaglianze*

$$r\gamma = s\gamma + \alpha, \qquad r_1\gamma_1 = s_1\gamma_1 + \alpha, \tag{3}$$

$$ru + sv + r_1v_1 + s_1u_1 = rv + su + r_1u_1 + s_1v_1, \tag{3'}$$

$$r'\gamma = s'\gamma + \alpha', \qquad r_1'\gamma_1 = s_1'\gamma_1 + \alpha', \tag{4}$$

dove γ, γ_1, α, $\alpha' \in M$, r, s, r_1, s_1, r', s', r_1', $s_1' \in S$, u, v, u_1, $v_1 \in G$, *implicano*

$$(4') \qquad r'u + s'v + r_1'v_1 + s_1'u_1 = r'v + s'u + r_1'u_1 + s_1'v_1 .$$

Per riconoscere le verità di questa proposizione basta ripetere il ragionamento fatto nell'ultimo capov. del n.° 3 di [1], (leggendo u, v, u_1, v_1 risp. invece di a, b, a_1, b_1).

2. - Supponendo soddisfatte le ipotesi del coroll. del n.° 1 e la cond. C), mostreremo ora come si possa costruire un $\mathfrak{A}$-m.s. di G rispetto ad M.

Definiamo nell'insieme $\mathfrak{T}$ delle terne ordinate (γ, u, v), con $\gamma \in M$, u, $v \in G$, una relazione binaria ponendo:

$$(5) \qquad (\gamma, u, v) \backsim (\gamma_1, u_1, v_1),$$

se esistono cinque elementi r, s, r_1, $s_1 \in S$, $\alpha \in M$ per cui valgono le (3), (3').

La (5) è una relazione di equivalenza (cioè è riflessiva, simmetrica e transitiva): ciò risulta dal lemma del n.° preced., con un ragionamento formalmente identico a quello svolto nel 5° e 6° capov. del n.° 4 di [1] (ricordati il teor. del n.° 2 e il lemma del n.° 4 di quel lavoro). Denotata con $[(\gamma, u, v)]$ la classe degli elementi di $\mathfrak{T}$ equivalenti a (γ, u, v), e posto

$$[(\gamma, u, v)] \in \mathfrak{G}',$$

nell'insieme $\mathfrak{G}'$ si ha dunque la seguente *definizione di eguaglianza*:

$$(6) \qquad [(\gamma, u, v)] = [(\gamma_1, u_1, v_1)]$$

se e solo se esistono cinque elementi r, s, r_1, $s_1 \in S$, $\alpha \in M$ per cui valgono le (3), (3').

In particolare (cfr. [1], pp. 480-482):

$$[(m\gamma, mu, mv)] = [(\gamma, u, v)],$$

qualunque sia $m \in S$ tale che $m\gamma \in M$. Se $\gamma = \gamma_1$, la (6) è vera se e solo se $u + v_1 = v + u_1$; perciò

$$[(\gamma, u, v)] = [(\gamma, u + w, v + w)],$$

qualunque sia $w \in G$. Se $u = v$, la (6) è vera se e solo se $u_1 = v_1$. Se $r, s \in S$, $\alpha \in M$ son tali che $r\gamma = s\gamma + \alpha$, allora

$$[(\gamma, u, v)] = [(\alpha, ru + sv, rv + su)].$$

Diamo in $\mathcal{G}'$ la seguente *definizione di addizione*:

$$(7) \qquad [(\gamma, u, v)] + [(\gamma_1, u_1, v_1)] = \\ = [(\alpha, ru + sv + r_1 u_1 + s_1 v_1, rv + su + r_1 v_1 + s_1 u_1)],$$

dove $\alpha \in M$, $r, s, r_1, s_1 \in S$ son cinque elementi per cui valgono le (3).

Tale addizione è univoca, e si ha in particolare

$$[(\gamma, u, v)] + [(\gamma, u_1, v_1)] = [(\gamma, u + u_1, v + v_1)];$$

inoltre $\mathcal{G}'$ (rispetto alle definizioni (6) e (7) è un *modulo* (cioè un gruppo commutativo), avente come zero l'elemento $0' = [(\gamma, u, u)]$ e come opposto di $[(\gamma, u, v)]$ l'elemento $[(\gamma, v, u)]$. Ciò si riconosce con ragionamenti formalmente identici a quelli svolti nel n.° 5 di [1].

Diamo ora la seguente *definizione di moltiplicazione di* $x = \gamma^{-1}(a - b) \in \mathfrak{A}$ $(\gamma \in M, a, b \in S)$ *per* $\xi_1' = [(\gamma_1, u_1, v_1)] \in \mathcal{G}'$:

$$(8) \qquad \gamma^{-1}(a - b) \cdot [(\gamma_1, u_1, v_1)] = [(\nu\gamma, pu_1 + qv_1, pv_1 + qu_1)],$$

dove $\nu \in M$, $p, q \in S$ son tre elementi tali che

$$(8') \qquad \nu a + q\gamma_1 = \nu b + p\gamma_1 .$$

Questa moltiplicazione è univoca e soddisfa alle I), II), III), IV) del n.° 1 (ove si legga $x, x_1 \in \mathfrak{A}$ e $\xi', \xi_1' \in \mathcal{G}'$ invece risp. di $a, a_1 \in S$ ed $u, u_1 \in G$); ciò si riconosce con considerazioni perfettamente analoghe a quelle svolte nelle prime parti dei n.i 6 e 7 di [1]. Dunque $\mathcal{G}'$ (rispetto alle definizioni (6), (7) e (8)) è un $\mathfrak{A}$-modulo sinistro.

3. - Osserviamo che, se in particolare $u = \gamma w + v$ $(\in G)$, la (6) è vera se e soltanto se $u_1 = \gamma_1 w + v_1$. Infatti la (3'), con $u = \gamma w + v$, $u_1 = \gamma_1 w + v_1$, è soddisfatta qualunque siano $r, s, r_1, s_1 \in S$, $\alpha \in M$ soddisfacenti alle (3). Viceversa, se la

(6) è vera, esistendo (cfr. [1], penult. capov. di p. 481) r' $s' \in S$, $\rho \in M$ per cui valgono le (4) con $\alpha' = \rho\gamma_1$, $r_1' = 2\rho$, $s_1' = \rho$, per il lemma del n.° 1 vale pure la (4'). Da questa, poichè $u = \gamma w + v$, posto (per la $(4)_2$) $r'\gamma = s'\gamma + \rho\gamma_1$, segue appunto (semplificando rispetto all'addizione e ricordando la cond. C)) $u_1 = \gamma_1 w + v_1$.

Ne segue che l'elemento $[(\gamma, \gamma w + v, v)]$ di $\mathcal{G}'$ $(w \in G)$ non dipende dai particolari elementi $\gamma \in M$, $v \in G$. Se si pone:

$$[(\gamma, \gamma w + v, v)] \in G' \qquad (w \in G), \tag{9}$$

è allora chiaro (in base ad una osservazione del 4° capov. del n.° 2 ed alla cond. C)) che la corrispondenza

$$w \rightarrow [(\gamma, \gamma w + v, v)] \tag{10}$$

fra G e G' è biunivoca. Anzi questa corrispondenza (10) è un S-isomorfismo, ossia, posto

$$\eta_i' = [(\gamma, \gamma w_i + v, v)] \qquad (i = 1, 2),$$

si ha (cfr. [1], 2° capov. di p. 492):

$$w_1 + w_2 \rightarrow \eta_1' + \eta_2', \qquad s_1 w_2 \rightarrow s_1 \eta_2', \tag{11}$$

qualunque siano $\eta_i' \in G'$, $s_1 \in S$; (per verificare la $(11)_2$ si osservi che $s_1 = \gamma^{-1}(\gamma s_1 + b - b)$, con $\gamma \in M$, $b \in S$, e si ricordino le osservazioni del 4° capov. del n.° 2).

Ogni elemento $[(\gamma, u, v)]$ dell'$\mathfrak{A}$-modulo sinistro $\mathcal{G}'$ è rappresentabile nella forma

$$[(\gamma, u, v)] = \gamma^{-1} \cdot ([(\gamma, \gamma u + w, w)] - [(\gamma, \gamma v + w, w)]), \qquad (w \in G), \tag{12}$$

(cfr. [1], inizio p. 493, osservato che $\gamma^{-1} = (\gamma^2)^{-1}(\gamma + c - c)$, con $c \in S$).

Le considerazioni di questo e del preced. n.° dimostrano dunque il seguente

TEOREMA: *Nelle ipotesi del coroll. del n.° 1, se la condiz.* C) *è soddisfatta, la relazione binaria* (5), *definita nell'insieme delle terne ordinate* (γ, u, v) $(\gamma \in M, u, v \in G)$ *è una relazione*

di equivalenza, e l'insieme $\mathfrak{G}'$ *delle relative classi di equivalenza* $[(\gamma, u, v)]$ *è un* $\mathfrak{A}$*-modulo sinistro rispetto alle due leggi di composizione* (7) *e* (8). *Questo* $\mathfrak{A}$*-modulo sinistro* $\mathfrak{G}'$ *è estensione di un* S*-semigruppo commutativo sinistro* G' (v. (9)) S*-isomorfo* (mediante la (10)) *a* G, *ed ogni elemento* ξ' *di* $\mathfrak{G}'$ *è rappresentabile nella forma*

$$\xi' = \gamma^{-1}(\eta' - \zeta'), \tag{13}$$

con $\gamma \in M$, $\eta', \zeta' \in G'$.

Da questo teorema segue subito il corollario enunciato nel n.° 1. E infatti, quanto alla sufficienza della C) (per la necessità, v. il n.° 1), posto $\mathfrak{G} = (\mathfrak{G}' \dot{-} G') \dot{+} G$, e detta Φ la corrispondenza biunivoca fra $\mathfrak{G}'$ e $\mathfrak{G}$ che subordina su $\mathfrak{G}' \dot{-} G'$ l'identità e fra G' e G l'S-isomorfismo di cui parla il preced. teorema, basta definire un'addizione in $\mathfrak{G}$ ed una moltiplicazione fra $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{G}$ in modo che Φ sia un $\mathfrak{A}$-isomorfismo; l'insieme $\mathfrak{G}$ diventa allora un $\mathfrak{A}$-modulo sinistro, che è appunto un $\mathfrak{A}$-m.s. di G rispetto ad M (v. (13)).

Quanto poi all'ultima parte del coroll. del n.° 1, basta osservare che, se $\mathfrak{G}$ è un qualsiasi $\mathfrak{A}$-m. s. di G rispetto ad M (supposto esistente), in esso valgono (cfr. il 4° capov. del n.° 6) le seguenti regole di calcolo (si ricordi la (1)):

$$\gamma^{-1}(u - v) = \gamma_1^{-1}(u_1 - v_1) \tag{14}$$

se e solo se vale la (5);

$$\begin{aligned} \gamma^{-1}(u - v) + \gamma_1^{-1}(u_1 - v_1) &= \\ = \alpha^{-1}(ru + sv + r_1u_1 + s_1v_1 - (rv + su + r_1v_1 + s_1u_1)), \end{aligned} \tag{15}$$

dove $\alpha \in M$, $r, s, r_1, s_1 \in S$ soddisfano alle (3);

$$\gamma^{-1}(a - b) \cdot \gamma_1^{-1}(u_1 - v_1) = (\nu\gamma)^{-1}(pu_1 + qv_1 - (pv_1 + qu_1)) \tag{16}$$

dove $\nu \in M$, $p, q \in S$ soddisfano alla (8') ($\gamma^{-1}(a - b) \in \mathfrak{A}$). Ciò è sufficiente per concludere che la corrispondenza che associa gli elementi di due qualsiasi $\mathfrak{A}$-m.s. di G rispetto ad M ammettenti una medesima rappresentazione $\gamma^{-1}(u - v)$ è un $\mathfrak{A}$-isomorfismo. La dimostrazione del coroll. del n.° 1 è perciò completata.

4. - Detti *opposti* due semianelli S, S' se sono opposti ([3], n.° 11) i loro pseudogruppi moltiplicativi mentre coincidono le loro parti additive, osserveremo che ogni S-semigruppo sinistro è (rispetto alle sue due stesse leggi di composizione interna ed esterna) un *S'-semigruppo destro* (e viceversa), quest'ultimo concetto non abbisognando di chiarimento (cfr. il 1° capov. del n.° 14 di [3] e le referenze ivi citate).

Vale il teorema che si deduce dal coroll. del n.° 1 leggendo destro invece di sinistro, ed $u\gamma$, $u_1\gamma$, $(u-v)\gamma^{-1}$ *invece risp. di* γu, γu_1, $\gamma^{-1}(u-v)$. Basta infatti ricordare una definizione data in [1] (penult. capov. di p. 495) e sfruttare opportunamente l'osservazione del precedente capoverso (cfr. [2], ult. capov. di p. 187).

I simboli S, M, G avendo il significato detto nell'enunciato del coroll. del n.° 1, se esistono sia un anello complementare sinistro $\mathfrak{A}$ che un semianello dei quozienti a sinistra $\mathfrak{S}$ ([3], 1° capov. di p. 107, 2° capov. di p. 105) di S rispetto ad M, ogni $\mathfrak{A}$-modulo supplementare $\mathfrak{G}$ di G rispetto ad M, ove esista, è estensione di un *$\mathfrak{S}'$-modulo complementare* (*$\mathfrak{S}'$-m.c.*) *di G rispetto ad M* ([3], 1° capov. di p. 107 e 106, 1° e 3° capov. di p. 98, 4°-ult. capov. di p. 88) avente la stessa parte additiva $\mathfrak{G}$, con $\mathfrak{S}'$ immagine isomorfa di $\mathfrak{S}$; viceversa, ogni $\mathfrak{S}$-m.c. $\mathfrak{G}'$ di G rispetto ad M, ove esista, si può estendere ad un $\mathfrak{A}'$-m.s. di G rispetto ad M avente la stessa parte additiva $\mathfrak{G}'$, con $\mathfrak{A}'$ immagine isomorfa di $\mathfrak{A}$. Infatti, la 1ª osservazione essendo evidente ($\mathfrak{S}'$ è l'insieme degli elementi di $\mathfrak{A}$ della forma $\gamma^{-1}a$, con $\gamma \in M$, $a \in S$) quanto alla 2ª (viceversa) basta notare che l'anello $\mathfrak{A}'$ delle differenze di $\mathfrak{S}$ ([3], p. 120) è un anello complementare sinistro di S rispetto ad M ([3], p. 219, coroll. 13) e che il modulo $\mathfrak{G}'$ diventa appunto un $\mathfrak{A}'$-m.s. di G rispetto ad M ove si definisca la moltiplicazione di $x' = \gamma^{-1}(a-b) \in \mathfrak{A}'$ ($\gamma \in M$, a, $b \in S$) per $\xi' \in \mathfrak{G}'$ nel modo sequente:

$$x'\xi' = (\gamma^{-1}a)\xi' - (\gamma^{-1}b)\xi',$$

([2], fine del 1° capov. di p. 182).

Osserveremo ancora che, nelle ipotesi del coroll. del n.° 1, se l'S-semigruppo commutativo sinistro G è, in particolare, la parte additiva del semianello S (la moltiplicazione fra

S e G essendo quella definita in $S = G$), la parte additiva $\mathfrak{G}$ di un qualsiasi $\mathfrak{A}$-m.s. di G rispetto ad M non è altro (v. l'ult. capov. del n.° 3) che la parte additiva di un anello complementare sinistro di S rispetto ad M, (cfr. [2], 2° capov. di p. 191).

Si osservi infine che, *se, in particolare, il semianello S è commutativo* ([1], p. 475), *le definizioni* (6), (7), (8) *sono risp. equivalenti alle seguenti*:

$$(\bar{6}) \quad [(\gamma, u, v)] = [(\gamma_1, u_1, v_1)] \text{ se e solo se } \gamma_1 u + \gamma v_1 = \gamma_1 v + \gamma u_1,$$

$$(\bar{7}) \quad [(\gamma, u, v)] + [(\gamma_1, u_1, v_1)] = [(\gamma\gamma_1, \gamma_1 u + \gamma u_1, \gamma_1 v + \gamma v_1)],$$

$$(\bar{8}) \quad \gamma^{-1}(a - b) \cdot [(\gamma_1, u_1, v_1)] = [(\gamma\gamma_1, au_1 + bv_1, av_1 + bu_1)].$$

Ciò si vede (ricordando il lemma del n.° 1 e) particolarizzando opportunamente la scelta degli elementi ausiliari nelle (6), (7), (8) (cfr. [1], p. 497).

5. - Con referenza al coroll. del n.° 1, *se, in particolare, S è un anello,* $\mathfrak{A}$ è un anello dei quozienti a sinistra di S rispetto ad M ([1], p. 494), e si ritrova allora il coroll. 2′ di [3] (p. 106), relativo al caso in cui $G = \Gamma$ è un semigruppo commutativo (cfr. [3], p. 98, 1° e 3° capov.).

Se, in particolare, S è un anello e il semigruppo G è un gruppo, il coroll. del n.° 1 fornisce nuovamente il corollario a p. 187 di [2] (dovuto ad Asano).

Se il semigruppo G è un gruppo (commutativo), ferme restando le altre ipotesi del coroll. del n.° 1, da questo si trae immediatamente il seguente altro

COROLLARIO: *I simboli S ed M abbiano il significato detto nell'enunciato del coroll. del n.° 1, ed esista un anello complementare sinistro $\mathfrak{A}$ di S rispetto ad M. Sia inoltre G un S-modulo sinistro. In queste ipotesi, la cond.* C) *del n.° 1 è necessaria e sufficiente affinchè esista un « $\mathfrak{A}$-modulo supplementare ($\mathfrak{A}$-m.s) di G rispetto ad M », cioè un $\mathfrak{A}$-modulo sinistro $\mathfrak{G}$, estensione di G e tale che ogni $\xi \in \mathfrak{G}$ sia rappresentabile nella forma*

$$(17) \qquad \xi = \gamma^{-1} u \qquad (\gamma \in M, \ u \in G).$$

Se un tale $\mathcal{G}$ esiste, esso è univocamente determinato da G ed M a meno di isomorfismi.

Se la cond. C) è soddisfatta, per la costruzione di questo $\mathcal{A}$-m.s. $\mathcal{G}$ dell'S-modulo sinistro G rispetto ad M si può anche seguire una via diversa da quella indicata dal teor. del n.° 3. Precisamente, definita nell'insieme delle coppie ordinate (γ, u) $(\gamma \in M, u \in G)$ una relazione binaria ponendo:

$$(\gamma, u) \backsim (\gamma_1, u_1) \tag{18}$$

se esistono cinque elementi $r, s, r_1, s_1 \in S$, $\alpha \in M$ soddisfacenti alle (3) e tali che

$$ru - su = r_1 u_1 - s_1 u_1, \tag{18'}$$

denotato adesso, ove la (18) sia una relazione di equivalenza, con $\mathcal{G}'$ l'insieme delle relative classi di equivalenza $[(\gamma, u)]$, date in $\mathcal{G}'$ la seguente *definizione di addizione*:

$$[(\gamma, u)] + [(\gamma_1, u_1)] = [(\alpha, ru - su + r_1 u_1 - s_1 u_1)], \tag{19}$$

dove $\alpha \in M$, $r, s, r_1, s_1 \in S$ soddisfano alle (3), e la seguente *definizione di moltiplicazione di* $\gamma^{-1}(a - b) \in \mathcal{A}$ $(\gamma \in M, a, b \in S)$ *per* $[(\gamma_1, u_1)] \in \mathcal{G}'$:

$$\gamma^{-1}(a - b) \cdot [(\gamma_1, u_1)] = [(\nu\gamma, pu_1 - qu_1)], \tag{20}$$

dove $\nu \in M$, $p, q \in S$ soddisfano alla (8'), considerata fra G e il sottinsieme G' di $\mathcal{G}'$ così definito:

$$[(\gamma, \gamma u)] \in G' \qquad (\gamma \in M, u \in G) \tag{21}$$

la corrispondenza

$$u \rightarrow [(\gamma, \gamma u)], \tag{22}$$

si può sfruttare, invece del teor. del n.° 3, il seguente altro

TEOREMA: *Nelle ipotesi del precedente corollario, se la condiz.* C) *è soddisfatta, la relazione binaria* (18), *definita nell'insieme delle coppie ordinate* (γ, u) $(\gamma \in M, u \in G)$, *è una relazione di equivalenza, e l'insieme* $\mathcal{G}'$ *delle relative classi di equivalenza* $[(\gamma, u)]$ *è un* $\mathcal{A}$*-modulo sinistro rispetto alle due leggi di*

composizione (19) *e* (20). *Questo* $\mathfrak{A}$*-modulo sinistro* $\mathfrak{G}'$ *è estensione di un* S*-modulo sinistro* G' (v. (21)) S*-isomorfo* (mediante la (22)) *a* G, *ed ogni elemento* ξ' *di* $\mathfrak{G}'$ *è rappresentabile nella forma*

$$\xi' = \gamma^{-1}\eta'$$

con $\gamma \in M$, $\eta' \in G'$.

Dimostrazione: Il sottinsieme $\mathfrak{D}$ di $\mathfrak{A}$ costituito dagli elementi della forma $a - b$ $(a, b \in S)$ è ([3], 3° capov. di p. 121) un anello delle differenze del semianello S. D'altra parte, rispetto alla seguente definizione di moltiplicazione di $a - b \in \mathfrak{D}$ $(a, b \in S)$ per $u \in G$:

$$(a - b)u = au - bu,$$

il modulo G diventa (come agevolmente si verifica — cfr. la fine del terzo capov. del n.° 4 —) un $\mathfrak{D}$-modulo sinistro, estensione del dato S-modulo sinistro G. Osservato allora che ogni elemento del sottinsieme (moltiplicativamente chiuso) M di $\mathfrak{D}$ è semplificabile in $\mathfrak{D}$, e che $\mathfrak{A}$ è un anello dei quozienti a sinistra di $\mathfrak{D}$ rispetto ad M, basta applicare a questo $\mathfrak{D}$-modulo sinistro G i risultati ottenuti nel n.° 10 di [2] per concludere appunto col teorema sopra enunciato.

La deduzione del corollario precedente da questo teorema è poi immediata, sulla base di considerazioni già fatte (cfr. il penult. capov. del n.° 3).

Se, in particolare, il semianello S *è commutativo, le definizioni* (18), (19), (20) *sono risp. equivalenti alle seguenti*:

$$(\overline{18}) \qquad [(\gamma, u)] = [(\gamma_1, u_1)] \quad \text{se e solo se} \quad \gamma_1 u = \gamma u_1,$$

$$(\overline{19}) \qquad [(\gamma, u)] + [(\gamma_1, u_1)] = [(\gamma\gamma_1, \gamma_1 u + \gamma u_1)],$$

$$(\overline{20}) \qquad \gamma^{-1}(a - b)\cdot[(\gamma_1, u_1)] = [(\gamma\gamma_1, au_1 - bu_1)].$$

6. - Dal coroll. del n.° 1 discende immediatamente anche la seguente, ben nota proposizione:

Corollario: Di ogni semigruppo additivo commutativo G esiste un *gruppo delle differenze,* cioè un modulo $\mathfrak{G}$, estensione di G e tale che ogni $\xi \in \mathfrak{G}$ sia rappresentabile nella forma

$$\xi = u - v \qquad (u, v \in G).$$

Questo modulo $\mathcal{G}$ è univocamente determinato da G a meno di isomorfismi.

Infatti, denotato con N il semianello dei numeri naturali, il semigruppo G può evidentemente considerarsi come un N-semigruppo (commutativo sinistro), il prodotto di $n \in N$ per $u \in G$ essendo definito come la somma di n addendi eguali ad u:

$$nu = u + \dots + u.$$

Basta allora applicare a questo N-semigruppo G il coroll. del n.° 1, con $S = N$, $M = \{1\}$, $\mathcal{A}$ = anello dei numeri interi, per ottenere appunto il corollario su enunciato.

A sua volta, il teor. del n.° 3 è una facile conseguenza del proprio corollario del n.° 1. Infatti, nelle ipotesi del teor. del n.° 3, esiste, per il coroll. del n.° 1, un $\mathcal{A}$-m.s. $\mathcal{G}$ di G rispetto ad M. È agevole verificare (come si è già osservato nel n.° 3) che in $\mathcal{G}$ valgono le regole di calcolo (14), (15) e (16); (basta a tal fine ricordare, in base alla definizione di $\mathcal{A}$ — cfr. [1], 1° capov. di p. 478 —, che, dati comunque $a, b \in S$, $\gamma_1 \in M$, esistono $\beta \in M$, $r_1, s_1 \in S$ tali che $\beta(a - b) = (r_1 - s_1)\gamma_1$; donde, in particolare, se $a = 2\gamma$, $b = \gamma$, con $\gamma \in M$: $(r - s)\gamma = (r_1 - s_1)\gamma_1 = \alpha \in M$, avendo posto $r = 2\beta$, $s = \beta$, $\alpha = \beta\gamma$). Definita allora nell'insieme delle terne ordinate (γ, u, v) $(\gamma \in M, u, v \in G)$ la relazione binaria (5), si osservi che la (5) vale se e solo se vale, in $\mathcal{G}$, l'eguaglianza (14); ciè evidentemente sufficiente per concludere che la (5) è una relazione di equivalenza. Ne segue che è biunivoca la corrispondenza:

$$\gamma^{-1}(u - v) \rightarrow [(\gamma, u, v)],$$

fra $\mathcal{G}$ e l'insieme $\mathcal{G}'$ i cui elementi sono le relative classi di equivalenza $[(\gamma, u, v)]$. Detta Ψ questa corrispondenza, per raggiungere la dimostrazione del teor. del n.° 3, basta semplicemente definire in $\mathcal{G}'$ un'addizione e fra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{G}'$ una moltiplicazione in modo che Ψ sia un $\mathcal{A}$-isomorfismo (cioè — in base alle regole (15) e (16) — dare le definizioni (7) e (8)): $\mathcal{G}'$ diventa automaticamente un $\mathcal{A}$-modulo sinistro avente le proprietà dichiarate.

Il coroll. del n.° 1 e quindi anche (v. il preced. capov.) *il teor. del n. 3 è, a sua volta, una facile conseguenza dei due*

suoi corollari di questo e del preced. numero. Infatti (sufficienza della C)), sia G' un gruppo delle differenze del semigruppo G (coroll. di questo n.°). Rispetto alla seguente definizione di moltiplicazione di $a \in S$ per $u - v \in G'$ $(u, v \in G)$:

$$a(u - v) = au - av,$$

questo modulo G' diventa (come subito si verifica) un S-modulo sinistro, estensione del dato S-semigruppo (commutativo) sinistro G e soddisfacente alla condiz. C) (ove si legga $u - v$, $u_1 - v_1 \in G'$ invece di u, $u_1 \in G$). Basta allora applicare a G' il coroll. del n.° 5 (sufficienza della C)).

Il teor. del n.° 5 è un facile corollario del teor. del n.° 3. Basta infatti osservare che il teor. del n.° 5 (del quale avevamo indicato la dimostrazione diretta) è, a sua volta, una semplice conseguenza del proprio corollario del n.° 5 stesso; ciò si riconosce con considerazioni su cui non insistiamo, perchè perfettamente analoghe a quelle svolte nel penult. capoverso.

BIBLIOGRAFIA

[1] Boccioni, D.: *Semianelli complementarizzabili,* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 24 (1955), pp. 474-509.

[2] Boccioni, D.: *$\mathfrak{S}$-gruppoide dei quozienti di un gruppoide con operatori,* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 25 (1956), pp. 176-195.

[3] Boccioni, D.: *Q-pseudogruppi complementarizzabili,* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 26 (1956), pp. 85-123.