

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIO VOLPATO

**Sulla assoluta continuità e sulla validità della classica
formula di derivazione delle funzioni composte**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 27 (1957), p. 37-47

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1957__27__37_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1957, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SULLA ASSOLUTA CONTINUITÀ E SULLA VALIDITÀ DELLA CLASSICA FORMULA DI DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI COMPOSTE

Nota () di MARIO VOLPATO (a Ferrara)*

Le funzioni composte, dal punto di vista della derivazione, sono state considerate, in questi ultimi anni, da M. Cinquini Cibrario e S. Cinquini¹⁾, G. Scorza Dragoni²⁾, A. Scorza Toso³⁾, A. Sambo⁴⁾, C. Bonati Savorgnan⁵⁾.

In questa Nota darò un teorema di assoluta continuità per una funzione composta del tipo $f[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$ e dimostrerò la validità, quasi ovunque, della classica formula di derivazione.

(*) Pervenuta in Redazione il 20 marzo 1957.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Ferrara.

1) M. CINQUINI CIBRARIO e S. CINQUINI, *Sopra una forma più ampia del problema di Cauchy per l'equazione $p = f(x, y, z, q)$* , Ann. di Mat. pura e applicata, vol. XXXII, (1951), pp. 121-155, § 2, n. 5, e), p. 145. In questo passo è implicitamente contenuto un teorema di derivazione per un particolare tipo di funzioni composte.

2) G. SCORZA DRAGONI, *Un'osservazione sulla derivazione delle funzioni composte*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. XX, (1951), pp. 462-467.

3) A. SCORZA TOSO, *Sulla derivazione di una funzione composta*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. XXI, (1952), pp. 198-201.

4) A. SAMBO, *Sulla derivazione delle funzioni composte*, Rend. Accad. Sc. Fis. e Mat. della Soc. Naz. di Sc. Lett. ed Arti, Napoli, serie 4, vol. XIX, (1952), pp.

5) C. BONATI SAVORGNAN, *Sulla derivazione di funzioni composte*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. XXII, (1953), pp. 258-264; *Sulla differenziabilità secondo Stolz delle funzioni composte*, Ann. Univ. Ferrara (nuova serie) vol. III, (1953-54), pp. 17-24.

Il raffronto critico fra il risultato attuale e quelli precedenti posso lasciarlo al lettore: le differenze nelle ipotesi sono visibili anche ad un esame superficiale.

In un successivo lavoro darò applicazioni del mio teorema.

1. Enunciato del teorema. *Nell'intervallo $R = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$, $I_r = a_r \leq x_r \leq b_r$, dello spazio reale euclideo ad n dimensioni, consideriamo una funzione reale $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, che abbia le seguenti proprietà:*

I) $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ è assolutamente continua, separatamente, rispetto alle singole variabili;

II) la derivata parziale prima f'_{x_r} , che per la I) esiste quasi ovunque in R riuscendovi misurabile, è continua rispetto alla $(n-1)$ -upla $(x_1, \dots, x_{r-1}, x_{r+1}, \dots, x_n)$ per quasi tutti i valori x_r di I_r ⁶⁾ e soddisfa la disuguaglianza,

$$(1) \quad |f'_{x_r}(x_1, x_2, \dots, x_n)| \leq L_r(x_r),$$

ove $L_r(x_r)$ è una funzione non negativa, della sola variabile x_r , sommabile in I_r , r variando, naturalmente da 1 a n .

Inoltre

III) nell'intervallo $I_t = c \leq t \leq d$ siano date n funzioni: $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ assolutamente continue, soddisfacenti le limitazioni

$$a_r \leq x_r(t) \leq b_r \quad (r = 1, 2, \dots, n),$$

e tali che gli n prodotti $L_r[x_r(t)]x'_r(t)$, $r = 1, 2, \dots, n$, sicuramente misurabili in I_t ⁷⁾, siano sommabili in I_t .

⁶⁾ Naturalmente perchè tale frase possa aver senso, f'_{x_r} deve esistere in tutto R a prescindere eventualmente da una conveniente porzione di misura (n -dimensionale) nulla la cui proiezione, sull'asse x_r , è di misura (lineare) nulla. Ricordo che la misura e l'integrazione sono intese, in questa Nota, nel senso di Lebesgue, e che tutte le considerazioni si svolgono nell'ambito della teoria delle funzioni di variabile reale.

⁷⁾ Si veggia, per es., C. CARATHÉODORY, *Vorlesungen über Reelle Funktionen*. Chelsea Publ. Comp., New York, (1948), Kap. X, nn. 496-499, pp. 556-563.

In tali ipotesi, la funzione composta $f[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$ è assolutamente continua; in I_t vale quasi ovunque la solita formula di derivazione

$$(2) \quad \frac{d}{dt} f[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] = \sum_1^n f'_{x_r}[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] x'_r(t);$$

gli n prodotti $f'_{x_r}[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] x'_r(t)$ sono misurabili, anzi sommabili in I_t , ed allora risulta anche

$$(3) \quad f[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] - f[x_1(c), x_2(c), \dots, x_n(c)] = \\ = \sum_1^n \int_c^t f'_{x_r}[x_1(\xi), x_2(\xi), \dots, x_n(\xi)] x'_r(\xi) d\xi,$$

nell'intervallo I_t .

Se si interpreta il secondo membro della (3) come un integrale curvilineo della forma differenziale

$$(4) \quad f'_{x_1} dx_1 + f'_{x_2} dx_2 + \dots + f'_{x_n} dx_n,$$

esteso alla curva rettificabile

$$(5) \quad \Gamma: \begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ x_2 = x_2(t) \\ \dots \dots \dots \\ x_n = x_n(t) \end{cases}, \quad c \leq t \leq d,$$

questo mio risultato, per lo meno nel caso di campi rettangolari, è una estensione di un noto teorema di De La Vallée Poussin ⁸⁾, perfezionato successivamente da L. Tonelli ⁹⁾, e, sempre per i campi rettangolari, restituisce questo teorema nel caso che le derivate prime di f siano continue in R .

La continuità di f'_{x_r} rispetto alle $(n-1)$ variabili $(x_1, \dots, x_{r-1}, x_{r+1}, \dots, x_n)$ per quasi tutti i valori x_r di I_r , assunta in II), può essere sostituita con la seguente condizione: per

⁸⁾ Cfr. J. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Cours d'Analyse*. T. II, 2^e éd., (1912), p. 92.

⁹⁾ Cfr. L. TONELLI, *Fondamenti di calcolo delle variazioni*. Zanichelli, Bologna, (1921), cap. IV, § 7, n. 71, pp. 195.

quasi tutti gli x_r di I_r , la funzione

$$(6) \quad \varphi_r(x_r, t, h) = f'_{x_r}[x_1(t), \dots, x_{r-1}(t), x_r, x_{r+1}(t+h), \dots, x_n(t+h)]$$

sia continua rispetto a (t, h) nell'intervallo bidimensionale

$$c + \rho \leq t \leq d - \rho \quad , \quad -\rho \leq h \leq \rho$$

almeno se il numero ρ , positivo e indipendente da x_r , è abbastanza piccolo. Naturalmente le (6) si potrebbero sostituire, volendo, colle

$$(7) \quad \psi_r(x_r, t, h) = f'_{x_r}[x_1(t+h), \dots, x_{r-1}(t+h), x_r, x_{r+1}(t), \dots, x_n(t)].$$

La dimostrazione del teorema si basa essenzialmente su due lemmi: il primo si dimostra ricorrendo a ragionamenti usati da G. Scorza Dragoni¹⁰), il secondo affinando alcune considerazioni svolte da me in un mio recente lavoro¹¹).

2. - LEMMA 1. *La funzione reale $\varphi(x, t, h)$, definita nell'intervallo $D = J_x \times J_t \times J_h$, ($J_x = a \leq x \leq b$; $J_t = \gamma \leq t \leq \delta$; $J_h = -h_0 \leq h \leq h_0$, $h_0 > 0$) dello spazio reale euclideo tridimensionale sia misurabile rispetto ad x , continua rispetto alla coppia (t, h) per quasi tutti i valori di x in J_x e maggiorata, in modulo, da una funzione $M(x)$, della sola variabile x , sommabile in J_x . Inoltre, la funzione $\sigma(h)$ sia continua nell'intervallo $\bar{J}_h = -\bar{h}_0 \leq h \leq \bar{h}_0$, $0 < \bar{h}_0 \leq h_0$, sia nulla per $h = 0$ e per $h \neq 0$ abbia o sempre lo stesso segno di h , o sempre segno contrario a quello di h .*

¹⁰) G. SCORZA DRAGONI, *Una applicazione della quasi continuità semiregolare delle funzioni misurabili rispetto ad una e continue rispetto ad un'altra variabile*. Rend. Accad. Naz. Lincei, serie VIII, vol. XII, (1952), pp. 55-61; *Sulla derivazione degli integrali indefiniti*, ibidem, vol. XX, (1956), pp. 711-714.

¹¹) M. VOLPATO, *Sulla formula di Green nell'ambito delle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile*. Rend. Accad. Naz. Lincei, serie VIII, vol. XX, (1956), Nota I, pp. 30-37, Nota II, pp. 161-167, Nota III, pp. 299-306. Ricordo che nella Nota II, a p. 167, ho indicato delle condizioni sufficienti, diverse dalle attuali, per l'assoluta continuità di una funzione composta del tipo $F[\varphi(y), y]$. La relativa formula di derivazione non è del tipo classico.

In tali ipotesi sussistono le relazioni

$$(8) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma(h)} \int_x^{x+\sigma(h)} \varphi(\xi, t, h) d\xi = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma(h)} \int_x^{x+\sigma(h)} \varphi(\xi, t, 0) d\xi = \varphi(x, t, 0)$$

per ogni t di J_t e per tutti gli x di $J_x - E_x$, dove E_x è una conveniente porzione di J_x dotata di misura nulla e indipendente da t .

Osserviamo intanto che a norma di un teorema enunciato da G. Scorza Dragoni a conclusione del primo dei lavori citati in ¹⁰⁾, la seconda uguaglianza sussiste in tutto J_x a prescindere da una conveniente porzione di misura nulla indipendente da t .

Non ci resta allora che provare la validità della relazione

$$(9) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma(h)} \int_x^{x+\sigma(h)} \{ \varphi(\xi, t, h) - \varphi(\xi, t, 0) \} d\xi = 0,$$

sempre a prescindere in J_x da una conveniente porzione di misura nulla e indipendente da t ¹²⁾.

Come abbiamo detto, un ragionamento analogo a quello svolto da G. Scorza Dragoni ci servirà allo scopo. Eccolo nei dettagli.

La misurabilità rispetto ad x della funzione $\varphi(x, t, h)$ e la sua continuità rispetto alla coppia (t, h) , a norma di un altro teorema di G. Scorza Dragoni ¹³⁾, dimostrato per le funzioni di più variabili da G. Stampacchia ¹⁴⁾, implicano che ad ogni intero e positivo n si può associare una porzione chiusa D_n di D , avente una proiezione, $D_n(x)$, sull'asse x di misura

¹²⁾ Nel caso in cui φ sia limitata e del tipo $f(x, t + h)$, la validità della (9) è stata provata da me in loc. cit. ¹¹⁾, Nota I, n. 4, p. 34.

¹³⁾ G. SCORZA DRAGONI, *Un teorema sulle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. XVII, (1948), pp. 102-106.

¹⁴⁾ G. STAMPACCHIA, *Sopra una classe di funzioni di n variabili*. Ricerche di Matematica, vol. I, (1952), pp. 27-54, p. 30.

maggiore di $b - a - \frac{1}{n}$ e tale che la $\varphi(x, t, h)$ sia uniformemente continua in D_n . Indichiamo con $D_n^*(x)$ l'insieme dei punti di $D_n(x)$ che sono di densità (lineare) uno per $D_n(x)$ e poniamo

$$(10) \quad D^*(x) = \bigcup_1^{+\infty} D_n^*(x),$$

di guisa che $D^*(x)$ è misurabile, ha la stessa misura di J_x ed appartiene all'interno di J_x . Sia poi $\overline{M}(x)$ la funzione che in J_x si identifica con $M(x)$ e che è nulla fuori di J_x . Detta E una qualsiasi porzione limitata e misurabile dell'asse x , indichiamo con $D_0(x)$ la porzione di $D^*(x)$ nella quale la funzione d'insieme

$$(11) \quad \int_E \overline{M}(\xi) d\xi$$

ha derivata in senso generale finita ed uguale ad $M(x)$.

Notoriamente risulta $\text{mis}[D_0(x)] = \text{mis}[D^*(x)]$. Ebbene: in ogni punto di $D_0(x)$ sussiste la (9).

Sia infatti x_0 un punto di $D_0(x)$, e precisamente un punto di $D_m^*(x)$. E sia $h_1, h_2, \dots$ una successione monotona e infinitesima di numeri non nulli appartenenti a J_h .

Allora la successione $\sigma(h_1), \sigma(h_2), \dots$ è pure infinitesima e i suoi termini sono tutti positivi o tutti negativi. Tanto per fissar le idee, supponiamo che questi termini siano tutti positivi e tali inoltre che i punti $x_0 + \sigma(h_1), x_0 + \sigma(h_2), \dots$ appartengono a J_x . Allora, posto

$$(12) \quad j_n = x_0 \leq x \leq x_0 + \sigma(h_n), \quad \eta_n = D_m(x) \cap j_n,$$

le successioni $j_1, j_2, \dots$, ed $\eta_1, \eta_2, \dots$ sono regolari nel senso della derivazione delle funzioni di insieme¹⁵); e quindi, attesa la chiusura di η_n ed il fatto che x_0 appartiene tanto a $D_m^*(x)$

¹⁵) Cfr. S. SAKS, *Theory of integrale*. Monografie Matematyczne, Varsavia, (1937), seconda edizione, p. 106.

quanto a $D_0(x)$, sussistono le

$$(13) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\text{mi}(\eta_n)}{\text{mis}(j_n)} = 1,$$

$$(14) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\text{mis}(\eta_n)} \int_{\eta_n} \overline{M}(\xi) d\xi = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\text{mis}(j_n)} \int_{j_n} \overline{M}(\xi) d\xi = \overline{M}(x_0);$$

e di conseguenza risulta anche

$$(15) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\text{mis}(j_n)} \int_{j_n - \eta_n} \overline{M}(\xi) d\xi = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\text{mis}(j_n)} \int_{j_n} \overline{M}(\xi) d\xi - \\ - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\text{mis}(\eta_n)}{\text{mis}(j_n)} \cdot \frac{1}{\text{mis}(\eta_n)} \int_{\eta_n} \overline{M}(\xi) d\xi = \overline{M}(x_0) - \overline{M}(x_0) = 0.$$

Inoltre, attesa l'uniforme continuità di $\varphi(x, t, h)$ in D_m , e il fatto che $\eta_n \subset D_m(x)$, sussiste anche la

$$(16) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\text{mis}(\eta_n)} \int_{\eta_n} \{ \varphi(\xi, t, h_n) - \varphi(\xi, t, 0) \} d\xi = 0.$$

Da queste circostanze, dalla disuguaglianza

$$(17) \quad \left| \frac{1}{\sigma(h_n)} \int_{x_0}^{x_0 + \sigma(h_n)} \{ \varphi(\xi, t, h_n) - \varphi(\xi, t, 0) \} d\xi \right| \leq \\ \leq \frac{\text{mis}(\eta_n)}{\text{mis}(j_n)} \cdot \frac{1}{\text{mis}(\eta_n)} \int_{\eta_n} | \varphi(\xi, t, h_n) - \varphi(\xi, t, 0) | d\xi + \\ + \frac{2}{\text{mis}(j_n)} \int_{j_n - \eta_n} \overline{M}(\xi) d\xi,$$

e dall'arbitrarietà della successione $h_1, h_2, \dots$, segue, appunto come volevamo, che la (9) è soddisfatta per $x = x_0$.

3. - LEMMA 2. *La funzione $\varphi(x, t, h)$ soddisfi le ipotesi del lemma 1. Inoltre, sia $\alpha(t)$ una funzione assolutamente continua in J_t , soddisfacente la: $a \leq \alpha(t) \leq b$, e tale che il prodotto*

$$(18) \quad M[\alpha(t)] \alpha'(t)$$

sicuramente misurabile in J_t ¹⁶⁾, sia sommabile in J_t . Allora, per quasi tutti i valori di t in J_t , sussistono le relazioni

$$(19) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\alpha(t)}^{\alpha(t+h)} \varphi(\xi, t, h) d\xi = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\alpha(t)}^{\alpha(t+h)} \varphi(\xi, t, 0) d\xi = \varphi[\alpha(t), t, 0] \alpha'(t),$$

e il prodotto

$$\varphi[\alpha(t), t, 0] \alpha'(t)$$

risulta sommabile in J_t .

Siano:

e_t la porzione di J_t , misurabile e di misura uguale a quella di J_t , ove esiste finita $\alpha'(t)$;

e'_t la porzione di e_t ove $\alpha'(t) \neq 0$;

E_t l'insieme dei valori t di J_t per i quali $\alpha(t)$ appartiene ad E_x (E_x , ricordiamolo, essendo la porzione di J_x , dotata di misura nulla e indipendente da t , nella quale può non sussistere la (8)).

Osserviamo che l'assoluta continuità di $\alpha(t)$ e la misura nulla di E_x , implicano, per cose note¹⁷⁾, $\alpha'(t) = 0$ in quasi tutto E_t , di guisa che è di misura nulla l'intersezione $e'_t \cap E_t$.

Ebbene, dimostriamo intanto che *nell'insieme $e'_t = e'_t \cap E_t$, cioè in quasi tutto e'_t , sussiste la (19).*

Infatti, se t_0 è un punto di $e'_t = e'_t \cap E_t$,

- 1) *esiste finita $\alpha'(t_0)$,*
- 2) *vale la disuguaglianza $\alpha'(t_0) \neq 0$,*
- 3) $\alpha(t_0)$ appartiene a $J_x - E_x$.

Supponiamo inoltre che t_0 sia interno a J_t , e, posto

$$T(h) = \alpha(t_0 + h) - \alpha(t_0),$$

osserviamo che la funzione $T(h)$ è nulla per $h = 0$, mentre per h diverso da zero, e contenuto in un opportuno intervallo chiuso $J_h(t_0) = -h(t_0) \leq h \leq h(t_0)$, $0 < h(t_0) \leq h_0$, essa, in virtù del-

¹⁶⁾ Cfr. loc. cit. nota 7).

¹⁷⁾ Cfr. loc. cit. nota 9), p. 176, oppure E. J. MC SHANE, *Integration*, Princeton, (1947), p. 213.

la 2), o ha sempre lo stesso segno di h o ha sempre quello opposto, risultando, ovviamente, continua in $J_h(t_0)$. Pertanto, a norma del lemma 1,

4) nel punto $t = t_0$ risulta

$$(20) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{T(h)} \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t_0)+T(h)} \varphi(\xi, t_0, h) d\xi = \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{T(h)} \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t_0)+T(h)} \varphi(\xi, t, 0) d\xi = \varphi[\alpha(t_0), t_0, 0].$$

Dopo di ciò la conclusione desiderata è ovvia, per $t = t_0$, perchè per ogni h di $J_h(t_0)$ risulta

$$(21) \quad \frac{1}{h} \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t_0)+h} \varphi(\xi, t_0, h) d\xi = \frac{\alpha(t_0+h) - \alpha(t_0)}{h} \cdot \frac{1}{T(h)} \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t_0)+T(h)} \varphi(\xi, t_0, h) d\xi,$$

ed

$$(22) \quad \frac{1}{h} \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t_0)+h} \varphi(\xi, t_0, 0) d\xi = \frac{\alpha(t_0+h) - \alpha(t_0)}{h} \cdot \frac{1}{T(h)} \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t_0)+T(h)} \varphi(\xi, t_0, 0) d\xi;$$

e così la validità della (19) è garantita intanto per quasi tutti i punti di e'_t .

Per dimostrare che la (19) sussiste anche in quasi tutto $e_t - e'_t$, indichiamo ora con t_0 un punto di $e_t - e'_t$ nel quale sussista la

$$(23) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} M[\alpha(t)] \alpha'(t) dt = M[\alpha(t_0)] \alpha'(t_0) = 0,$$

di guisa che a t_0 son consentite quasi tutte le posizioni in $e_t - e'_t$. Allora risulta senz'altro

$$(24) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t_0)+h} \varphi(\xi, t_0, h) d\xi = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t_0)+h} \varphi(\xi, t, 0) d\xi = 0,$$

appunto per la (23), la

$$(25) \quad |\varphi(\xi, t, h)| \leq M(x)$$

e la

$$(26) \quad \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t_0+h)} M(\xi) d\xi = \int_{t_0}^{t_0+h} M[\alpha(t)] \alpha'(t) dt;$$

e la (24) porge di nuovo la (19), perchè stavolta $\alpha'(t_0)$ è nulla.

E la (19) vale così in quasi tutto J_t . Questa circostanza porge, ovviamente, la misurabilità del prodotto $\varphi[\alpha(t), t, 0] \alpha'(t)$ e quindi la sua sommabilità in tutto J_t , attesa la disuguaglianza

$$|\varphi[\alpha(t), t, 0] \alpha'(t)| \leq M[\alpha(t)] |\alpha'(t)|$$

e la sommabilità di questo secondo membro.

4. - Passiamo ora alla dimostrazione del nostro teorema.

Se t e $t+h$ sono due punti di I_t , la assoluta continuità della funzione f , separatamente rispetto alle singole variabili x_r ($r = 1, 2, \dots, n$), porge la

$$(27) \quad \frac{f[x_1(t+h), x_2(t+h), \dots, x_n(t+h)] - f[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]}{h} = \\ = \sum_1^n \frac{1}{h} \int_{x_r(t)}^{x_r(t+h)} f'_{x_r}[x_1(t), \dots, x_{r-1}(t), \xi_r, x_{r+1}(t+h), \dots, x_n(t+h)] d\xi_r;$$

e quindi, attese le II) e III), la

$$(28) \quad |f[x_1(t+h), x_2(t+h), \dots, x_n(t+h)] - f[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]| \leq \\ \leq \sum_1^n \left| \int_{x_r(t)}^{x_r(t+h)} L_r(\xi_r) d\xi_r \right| \leq \sum_1^n \left| \int_t^{t+h} L_r[x_r(\xi)] x'_r(\xi) d\xi \right|.$$

Di qui, in maniera ovvia, l'assoluta continuità della funzione composta $f[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$.

Questa è allora quasi ovunque derivabile; quindi per dimostrare quasi ovunque la (2), attesa la (27), basta provare che

risulta

$$(29) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{x_r(t)}^{x_r(t+h)} f'_{x_r}[x_1(t), \dots, x_{r-1}(t), \xi_r, x_{r+1}(t+h), \dots, x_n(t+h)] d\xi_r = \\ = f'_{x_r}[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] x'_r(t),$$

in quasi tutto I_t .

Nel fatto, posto

$$(30) \quad \varphi_r(\xi_r, t, h) = f'_{x_r}[x_1(t), \dots, x_{r-1}(t), \xi_r, x_{r+1}(t+h), \dots, x_n(t+h)],$$

si riconosce che il lemma 2 dato nel n. 3 per le funzioni φ ed $\alpha(t)$ e gli intervalli J_x , J_t , J_h , si può applicare alle funzioni φ_r ed $x_r(t)$, relativamente agli intervalli: $a_r \leq x_r \leq b_r$, $c + \rho \leq t \leq d - \rho$, $-\rho \leq h \leq \rho$, ρ essendo un qualsiasi numero positivo e minore di $\frac{d-c}{2}$.

A norma di quel lemma e dell'arbitrarietà di ρ , in quasi tutto I_t sussiste l'uguaglianza

$$(31) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{x_r(t)}^{x_r(t+h)} \varphi_r(\xi_r, t, h) d\xi_r = \varphi_r[x_r(t), t, 0] x'_r(t),$$

ove

$$(32) \quad \varphi_r[x_r(t), t, 0] x'_r(t) = \\ = f'_{x_r}[x_1(t), \dots, x_{r-1}(t), x_r(t), x_{r+1}(t), \dots, x_n(t)] x'_r(t)$$

è sommabile in I_t .

Di qui la (29) e quindi la (2). Per ottenere la (3) basta integrare la (2) sull'intervallo (c, t) , ricordare che $f[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$ è assolutamente continua e che le funzioni (32) sono sommabili nell'intervallo I_t . Il teorema è provato.