

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANTONIO CARLO GARIBALDI

Su una proprietà di media caratteristica per l'equazione dell'elastostatica

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 27 (1957), p. 306-318

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1957__27__306_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1957__27__306_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1957, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SU UNA PROPRIETÀ DI MEDIA CARATTERISTICA PER L'EQUAZIONE DELL'ELASTOSTATICA

Nota () di ANTONIO CARLO GARIBALDI (a Genova)*

1. - Sia dato un solido elastico, in equilibrio, omogeneo ed isotropo, non soggetto a forze di massa, occupante un dominio T dello spazio in cui si introduca una terna di assi cartesiani ortogonali ξ, η, ζ , di origine O ; sia $\mathbf{s}(Q)$ il vettore che rappresenta lo spostamento elastico nel punto $Q(\xi, \eta, \zeta)$. In ogni punto del dominio T , $\mathbf{s}(Q)$ soddisfa notoriamente all'equazione:

$$(1.1) \quad \Delta^2 \mathbf{s}(Q) + q \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{s}(Q) = 0$$

con q costante.

Indicheremo con $S(P, R)$ la sfera di centro P e raggio R , mentre $\sigma(P, R)$ sarà la superficie della stessa sfera e diremo poi T_R la porzione di T tale che ogni sfera $S(P, R)$ con $P \in T_R$ sia contenuta in T . Osserviamo subito che ogni punto interno a T appartiene a qualche T_R con R opportuno. Perciò, quanto enunceremo per T_R vale per ogni punto interno a T . Detto ora $P(x, y, z)$ un punto di T e $Q(\xi, \eta, \zeta)$ un punto generico di $S(P, R)$, converrà introdurre un sistema di coordinate sferiche di polo P , per cui si avrà:

$$\xi = x + \rho \cos \vartheta \sin \tau \quad \eta = y + \rho \sin \vartheta \sin \tau \quad \zeta = z + \rho \cos \tau$$

essendo: $0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \vartheta < 2\pi, 0 \leq \tau < \pi$.

(*) Pervenuta in Redazione il 18 luglio 1957.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Genova.

Poniamo ora :

$$I(P, \rho) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \iint_{\sigma(P, \rho)} \mathbf{s}(Q) d\sigma \quad K(P, \rho) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \iint_{\sigma(P, \rho)} s_\rho(Q) \mathbf{n} d\sigma$$

essendo $\mathbf{n}(Q) = \frac{Q - P}{\rho}$ la normale esterna a $\sigma(P, \rho)$ in Q ed $s_\rho = \mathbf{s} \times \mathbf{n}$.

Il prof. Sbrana ha stabilito [1]¹⁾, nell'ipotesi della continuità in T_R del vettore $\mathbf{s}(Q)$ e delle sue derivate parziali prime, la formula :

$$(1.2) \quad \mathbf{s}(P) = 3 \frac{2-q}{6+2q} I(P, \rho) + \frac{15q}{6+2q} K(P, \rho)$$

valida per ogni ρ compreso tra 0 e R . Scriveremo più concisamente :

$$(1.3) \quad \mathbf{s}(P) = \lambda I(P, \rho) + \mu K(P, \rho)$$

avendo posto :

$$\lambda = 3 \frac{2-q}{6+2q} \quad \mu = \frac{15q}{6+2q}.$$

La (1.3) dà il valore di $\mathbf{s}(P)$ come combinazione lineare delle medie dei valori di $\mathbf{s}(Q)$ e di $s_\rho(Q)\mathbf{n}(Q)$ calcolate su sfere $\sigma(P, \rho)$ e rappresenta per le soluzioni di (1.1) una formula analoga a quella, ben nota, di Gauss :

$$(1.4) \quad u(P) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \iint_{\sigma(P, \rho)} u(Q) d\sigma$$

relativa alle funzioni armoniche, soluzioni dell'equazione :

$$(1.5) \quad \Delta^2 u(P) = 0.$$

Volendo rendere più esplicita questa analogia, che ci sarà di guida per il seguito, porremo :

$$(1.6) \quad u(P, Q) = \lambda \mathbf{s}(Q) + \mu s_\rho(Q) \mathbf{n}(Q) \quad Q \in \sigma(P, \rho)$$

¹⁾ Tutti i numeri in parentesi quadra si riferiscono alla bibliografia finale.

ed è utile rilevare fin d'ora che il vettore $\mathbf{u}(P, Q)$ dipende dal punto P attraverso il vettore $\mathbf{n}(Q) = \frac{Q - P}{\rho}$ che interviene, esplicitamente ed implicitamente mediante s_ρ , nel secondo termine di (1.6). Riscriveremo pertanto la (1.3) nella forma definitiva:

$$(1.7) \quad \mathbf{s}(P) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \iint_{\sigma(P, \rho)} \mathbf{u}(P, Q) d\sigma.$$

È noto da tempo che ogni funzione $u(P)$ che verifica in T la (1.4) soddisfa necessariamente alla (1.5) posto che valgano certe ipotesi sulla $u(P)$ di cui ora diremo e che sono state successivamente allargate. Il risultato più generale, dopo le ricerche di Levi [3] e di Tonelli [4] è questo: *ogni funzione $u(P)$ sommabile in T e verificante la (1.4) in T_R a meno di un insieme di punti di misura nulla e per quasi tutti i valori di ρ compresi tra 0 e R , soddisfa a (1.5) quasi ovunque in T_R* . Più brevemente, si dice che la (1.4) è caratteristica per le soluzioni di (1.5).

Il prof. Sbrana ha dimostrato ancora [2] che la sua formula di media (1.7) è caratteristica per i vettori $\mathbf{s}(Q)$ soddisfacenti ad (1.1) nell'ipotesi che $\mathbf{s}(Q)$ sia continuo in T_R insieme alle sue derivate parziali prime.

Scopo di questo lavoro è di enunciare in ipotesi più larghe il risultato di [2] ripetendo il procedimento noto per le funzioni armoniche e dimostrando precisamente che: *ogni vettore $\mathbf{s}(Q)$ sommabile in T e soddisfacente ad (1.7) in quasi tutti i punti di T e per quasi tutti i valori di ρ compresi tra 0 e R , verifica (1.1) quasi ovunque in T_R* .

Avremo occasione nella dimostrazione, di stabilire formule di media, ancora del tipo (1.7), per le derivate parziali prime di $\mathbf{s}(Q)$; daremo inoltre un'applicazione di questi risultati alla convergenza di successioni che approssimano in media d'ordine 2 una soluzione di (1.1).

Un'altra proprietà di media, sempre nell'ipotesi della sommabilità del vettore $\mathbf{s}(Q)$, è stata data dal prof. Pini [6].

2. - Vogliamo anzitutto dedurre da (1.7) una formula di media volumetrica, cioè su sfere $S(P, \rho)$, per il vettore $\mathbf{s}(P)$.

L'ipotesi che $\mathbf{s}(Q)$ sia sommabile in T porta subito a ritenere ivi sommabile anche $\mathbf{u}(P, Q)$ che è una combinazione lineare a coefficienti variabili ma limitati delle componenti di $\mathbf{s}(Q)$. Calcoliamo perciò $\iiint_{S(P, R')} \mathbf{u}(P, Q) dS$ tenendo conto di (1.7); si ha:

$$\iiint_{S(P, R')} \mathbf{u}(P, Q) dS = \int_0^{R'} d\rho \iint_{\sigma(P, \rho)} \mathbf{u}(P, Q) dS = \int_0^{R'} 4\pi\rho^2 \mathbf{s}(P) d\rho = \frac{4\pi R'^3}{3} \mathbf{s}(P)$$

da cui la formula cercata:

$$(2.1) \quad \mathbf{s}(P) = \frac{3}{4\pi R'^3} \iiint_{S(P, R')} \mathbf{u}(P, Q) dS,$$

valida per ogni R' compreso tra O e R e, per le ipotesi fatte, in quasi tutti i punti P di T_R . Però il secondo membro di (2.1) ha senso in ogni punto di T_R per cui possiamo sostituire $\mathbf{s}(P)$ con il vettore definito da (2.1) in tutto T_R che coinciderà con il precedente a meno di un insieme di punti di misura nulla; per semplicità, indicheremo ancora con $\mathbf{s}(P)$ questo vettore su cui ragioniamo nei numeri seguenti.

3. - Proviamo ora che il vettore $\mathbf{s}(P)$, definito da (2.1), è continuo. Presi due punti qualunque P, P' di T_R avremo:

$$\mathbf{s}(P') - \mathbf{s}(P) = \frac{3}{4\pi R^3} \left\{ \iiint_{S(P', R)} \mathbf{u}(P', Q) dS - \iiint_{S(P, R)} \mathbf{u}(P, Q) dS \right\}.$$

Consideriamo le due sfere $S(P', R)$ e $S(P, R)$: presi P' e P abbastanza vicini, indicheremo con S_1 l'intersezione di esse e con S_2, S_3 rispettivamente le parti restanti di $S(P', R)$ e di $S(P, R)$. Allora si ha subito:

$$(3.1) \quad |\mathbf{s}(P') - \mathbf{s}(P)| \leq \frac{3}{4\pi R^3} \left[\left| \iiint_{S_2} \mathbf{u}(P', Q) dS \right| + \right. \\ \left. + \left| \iiint_{S_3} \mathbf{u}(P, Q) dS \right| + \mu \iiint_{S_1} |s'_\rho \mathbf{n}' - s_\rho \mathbf{n}| dS \right],$$

avendo posto: $\mathbf{n}' = \frac{Q - P'}{\rho'}$, $\mathbf{n} = \frac{Q - P}{\rho}$ e $\mathbf{s} \times \mathbf{n}' = \mathbf{s}'_\rho$,
 $\mathbf{s} \times \mathbf{n} = \mathbf{s}_\rho$.

Basterà dimostrare che quanto P' tende a P , cioè quando $|PP'| = h$ tende a zero, gli integrali scritti in (3.1) tendono a zero. Ciò segue facilmente per i primi due ricordando l'assoluta continuità dell'integrale di Lebesgue, in quanto per $h \rightarrow 0$ i volumi di S_2 , S_3 tendono a zero. Quanto all'ultimo integrale della (3.1) occorre spezzarlo in due parti perchè, per $h \rightarrow 0$, S_1 tende alla sfera $S(P, R)$; diremo allora $\bar{S}_1$ la regione ottenuta da S_1 prendendo in essa tutti i punti che distano più di $\sqrt{h}$ da qualche punto del segmento PP' . Il volume della regione $(S_1 - \bar{S}_1)$ tende a zero per $h \rightarrow 0$ e quindi, ragionando come in precedenza, si può concludere che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \iiint_{\bar{S}_1 - \bar{S}_1} |s'_\rho \mathbf{n}' - s_\rho \mathbf{n}| dS = 0.$$

Consideriamo ora l'integrale:

$$(3.2) \quad \iiint_{\bar{S}_1} |s'_\rho \mathbf{n}' - s_\rho \mathbf{n}| dS.$$

Preso un punto Q qualsiasi di $\bar{S}_1$, la differenza tra le due normali $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$ in Q risulta tale che:

$$(3.3) \quad |\mathbf{n}' - \mathbf{n}| = 2 |\mathbf{n}| |\mathbf{n}'| \sin \frac{\alpha}{2} \leq 2 \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

essendo α l'angolo PQP' . Applicando al triangolo $\widehat{PQP'}$ il teorema di Carnot:

$$h^2 = PQ^2 + P'Q^2 - 2P'Q \cdot PQ \cos \alpha$$

$$\frac{1 - \cos \alpha}{2} = \frac{h^2 - (PQ - P'Q)^2}{4PQ \cdot P'Q} \leq \frac{h^2}{4\sqrt{h} \cdot \sqrt{h}} = \frac{h}{4}$$

poichè in $\bar{S}_1$ PQ e $P'Q$ sono non inferiori a $\sqrt{h}$. Sostituendo in (3.3) si ha:

$$(3.4) \quad |\mathbf{n}'(Q) - \mathbf{n}(Q)| \leq \sqrt{h} \quad Q \in \bar{S}_1.$$

Mediante la (3.4) possiamo maggiorare l'integrale (3.2)

in questo modo:

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\bar{S}_1} |s'_p \mathbf{n}' - s_p \mathbf{n}| dS &\leq \iiint\limits_{\bar{S}_1} |s_p| |\mathbf{n}' - \mathbf{n}| dS + \\ + \iint\limits_{\bar{S}_1} |\varepsilon_p - s_p| |\mathbf{n}| dS &\leq \iiint\limits_{\bar{S}_1} |\mathbf{s}| |\mathbf{n}| |\mathbf{n}' - \mathbf{n}| dS + \\ + \iint\limits_{\bar{S}_1} |\mathbf{s}| |\mathbf{n}' - \mathbf{n}| |\mathbf{n}| dS &\leq 2\sqrt{h} \iint\limits_{S(P, R)} |\mathbf{s}| dS. \end{aligned}$$

Poichè $|\mathbf{s}|$ è sommabile in T per ipotesi si conclude che per $h \rightarrow 0$ anche l'integrale (3.2) tende a zero: con ciò tutti gli integrali di (3.1) tendono a zero e quindi la continuità di $\mathbf{s}(P)$ è dimostrata.

4. - Vogliamo ora dimostrare che il nostro vettore $\mathbf{s}(P)$ definito in (2.1) possiede anche derivate parziali prime continue.

Calcoliamo esplicitamente, ad esempio, $\frac{\partial \mathbf{s}(P)}{\partial z}$ servendoci di un cambiamento di variabili suggerito dal prof. Sbrana. Riprendiamo il vettore $\mathbf{u}(P, Q)$ per osservare che in virtù della continuità di $\mathbf{s}(P)$ dimostrata nel numero precedente, esso risulta continuo in ogni punto di $S(P, R)$ tranne che nel centro in cui non essendo definita la normale $\mathbf{u}(P, Q)$ è indeterminato per quanto in un intorno qualunque di P $\mathbf{u}(P, Q)$ con $P \neq Q$ è limitato. Introduciamo ora un nuovo vettore ponendo:

$$(4.1) \quad \mathbf{s}(P, \varepsilon) = \frac{3}{4\pi R^3} \iiint\limits_{S(P, R) - S(P, \varepsilon)} \mathbf{u}(P, Q) ds$$

L'integrale nel secondo membro è funzione continua; inoltre si ha:

$$(4.2) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{s}(P, \varepsilon) = \mathbf{s}(P).$$

Passiamo ora a coordinate cilindriche di asse z ponendo:

$$\xi - x = \sqrt{\psi} \cos \varphi, \quad \eta - y = \sqrt{\psi} \sin \varphi, \quad \zeta - z = \zeta - z.$$

Si ha allora:

$$(4.2) \quad \mathbf{s}(P, \varepsilon) = \frac{3}{4\pi R^3} \left\{ \int_{s-R}^{s-\varepsilon} d\zeta \int_0^{R^2-(\zeta-s)^2} d\psi \int_0^{2\pi} \mathbf{u}(P, Q) d\varphi + \right. \\ \left. + \int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} d\zeta \int_{\varepsilon^2-(\zeta-s)^2}^{R^2-(\zeta-s)^2} d\psi \int_0^{2\pi} \mathbf{u}(P, Q) d\varphi + \int_{s+\varepsilon}^{s+R} d\zeta \int_0^{R^2-(\zeta-s)^2} d\psi \int_0^{2\pi} \mathbf{u}(P, Q) d\varphi \right\}.$$

La variabile z figura in (4.2) come parametro nei limiti di integrazione ed anche in $\mathbf{u}(P, Q)$ ma soltanto attraverso la normale $\mathbf{n}(Q) = \frac{Q-P}{\rho}$ mentre $\mathbf{s}(Q)$ non dipende da z per cui si ha:

$$(4.3) \quad \frac{\partial \mathbf{u}(P, Q)}{\partial z} = \lambda \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{s}(Q) + \mu \frac{\partial}{\partial z} (s_\rho \mathbf{n}) = \mu \left(\mathbf{s} \times \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial z} \right) \mathbf{n} + \mu (\mathbf{s} \times \mathbf{n}) \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial z}.$$

Inoltre si vede facilmente che:

$$(4.4) \quad \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial z} = - \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \zeta}.$$

Deriviamo ora la (4.2) rispetto al parametro z con la regola solita:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{s}(P, \varepsilon)}{\partial z} &= \frac{3}{4\pi R^3} \left\{ \int_{s-R}^{s-\varepsilon} d\zeta \int_0^{R^2-\varepsilon^2} d\psi \int_0^{2\pi} [\mathbf{u}(P, Q)]_{\zeta=s-\varepsilon} d\varphi + \right. \\ &\quad + 2 \int_{s-R}^{s-\varepsilon} d\zeta \int_0^{2\pi} [\mathbf{u}(P, Q)]_{\psi=R^2-(\zeta-s)^2} (\zeta-s) d\varphi + \\ &\quad + \int_{s-R}^{s-\varepsilon} d\zeta \int_0^{R^2-(\zeta-s)^2} d\psi \int_0^{2\pi} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} d\varphi + \int_{s+\varepsilon}^{s+R} d\zeta \int_0^{R^2-\varepsilon^2} d\psi \int_0^{2\pi} [\mathbf{u}(P, Q)]_{\zeta=s+\varepsilon} d\varphi - \\ &\quad - \int_0^{R^2-\varepsilon^2} d\psi \int_0^{2\pi} [\mathbf{u}(P, Q)]_{\zeta=s-\varepsilon} d\varphi + 2 \int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} d\zeta \int_0^{2\pi} [\mathbf{u}(P, Q)]_{\psi=R^2-(\zeta-s)^2} (\zeta-s) d\varphi - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2 \int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} d\zeta \int_0^{2\pi} [\mathbf{u}(P, Q)]_{\psi=\varepsilon^2-(\zeta-s)^2} (\zeta-z) d\varphi + \\
& + \int_{z-\varepsilon}^{z+\varepsilon} d\zeta \int_{\varepsilon^2-(\zeta-s)^2}^{R^2-(\zeta-s)^2} d\psi \int_0^{2\pi} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} d\varphi - \int_0^{R^2-\varepsilon^2} d\psi \int_0^{2\pi} [\mathbf{u}(P, Q)]_{\zeta=s+\varepsilon} d\varphi + \\
& + 2 \int_{s+\varepsilon}^{s+R} d\zeta \int_0^{2\pi} [\mathbf{u}(P, Q)]_{\psi=R^2-(\zeta-s)^2} (\zeta-z) d\varphi + \\
& + \int_{s+\varepsilon}^{z+R} d\zeta \int_0^{R^2-(\zeta-s)^2} d\psi \int_0^{2\pi} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} d\varphi \Big\}.
\end{aligned}$$

Raggruppando opportunamente i termini e semplificando si ha:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{s}(P, \varepsilon)}{\partial z} &= \frac{3}{4\pi R^3} \Big\{ 2 \int_{s-R}^{s+R} d\zeta \int_0^{2\pi} [\mathbf{u}(P, Q)]_{\psi=R^2-(\zeta-s)^2} (\zeta-z) d\varphi - \\
& - 2 \int_{z-\varepsilon}^{s+\varepsilon} d\zeta \int_0^{2\pi} [\mathbf{u}(P, Q)]_{\psi=\varepsilon^2-(\zeta-s)^2} (\zeta-z) d\varphi + \\
& + \int_{z-R}^{s+R} d\zeta \int_0^{R^2-(\zeta-s)^2} d\psi \int_0^{2\pi} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} d\varphi - \int_{z-\varepsilon}^{s+\varepsilon} d\zeta \int_0^{\varepsilon^2-(\zeta-s)^2} d\psi \int_0^{2\pi} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} d\varphi.
\end{aligned}$$

Tornando alla notazione solita si ottiene:

$$\begin{aligned}
(4.5) \quad \frac{\partial \mathbf{s}(P, \varepsilon)}{\partial z} &= \frac{3}{4\pi R^3} \Big\{ \iint_{\sigma(P, R)} \mathbf{u}(P, Q) \frac{(\zeta-z)}{R} d\sigma - \\
& - \iint_{\sigma(P, \varepsilon)} \mathbf{u}(P, Q) \frac{(\zeta-z)}{R} d\sigma + \iiint_{S(P, R)} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} dS - \iiint_{S(P, \varepsilon)} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} dS.
\end{aligned}$$

Per giustificare completamente gli ultimi due passaggi occorre ancora dimostrare che il vettore $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}$ è sommabile in

$S(P, R)$. Ricordando (4.3) e (4.4):

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = -\mu \left(\mathbf{s} \times \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \zeta} \right) \mathbf{n} - \mu (\mathbf{s} \times \mathbf{n}) \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \zeta}.$$

È facile vedere che $\left| \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \zeta} \right| \leq \frac{1}{\rho}$, $\rho = |PQ|$ e quindi:

$$(4.6) \quad \left| \iiint_{\dot{S}(P, R)} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} dS \right| \leq 2\mu \iiint_{\dot{S}(P, R)} |\mathbf{s}| \frac{1}{\rho} dS \leq 4\pi M R^2,$$

essendo M il massimo della funzione continua $\mathbf{s}(Q)$ in T_R . Da (1.6) segue ora:

$$(4.7) \quad |\mathbf{u}(P, Q)| \leq (\lambda + \mu) |\mathbf{s}(Q)| \leq (\lambda + \mu) M.$$

Nella (4.5) si può passare al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ e le (4.6), (4.7) ci assicurano che i due integrali relativi a $S(P, \varepsilon)$ e a $\sigma(P, \varepsilon)$ tendono a zero uniformemente rispetto a P . Ricordando la (4.2), per un noto teorema di analisi si può affermare che:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \mathbf{s}(P, \varepsilon)}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{s}(P)}{\partial z}$$

e sostituendo al limite il valore trovato si ha in definitiva:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{s}(P)}{\partial z} = \frac{3}{4\pi R^3} \left\{ \iint_{\sigma(P, R)} \mathbf{u}(P, Q) \cos(\mathbf{n}, z) d\sigma - \right. \\ \left. - \mu \iiint_{\dot{S}(P, R)} \left[\left(\mathbf{s} \times \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \zeta} \right) \mathbf{n} + (\mathbf{s} \times \mathbf{n}) \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \zeta} \right] dS \right\}. \end{aligned}$$

Così è calcolata la derivata di $\mathbf{s}(P)$ rispetto a z ; in modo analogo si calcolano le derivate rispetto alle altre variabili.

sicchè valgono le formule:

$$(4.8) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{s}(P)}{\partial x} &= \frac{3}{4\pi R^3} \left\{ \iint_{\sigma(P, R)} \mathbf{u}(P, Q) \cos(\mathbf{n}, x) d\sigma - \right. \\ &\quad \left. - \mu \iiint_{\tilde{S}(P, R)} \left[\left(\mathbf{s} \times \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi} \right) \mathbf{n} + (\mathbf{s} \times \mathbf{n}) \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi} \right] dS \right\} \\ \frac{\partial \mathbf{s}(P)}{\partial y} &= \frac{3}{4\pi R^3} \left\{ \iint_{\sigma(P, R)} \mathbf{u}(P, Q) \cos(\mathbf{n}, y) d\sigma - \right. \\ &\quad \left. - \mu \iiint_{\tilde{S}(P, R)} \left[\left(\mathbf{s} \times \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \eta} \right) \mathbf{n} + (\mathbf{s} \times \mathbf{n}) \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \eta} \right] dS \right\} \\ \frac{\partial \mathbf{s}(P)}{\partial z} &= \frac{3}{4\pi R^3} \left\{ \iint_{\sigma(P, R)} \mathbf{u}(P, Q) \cos(\mathbf{n}, z) d\sigma - \right. \\ &\quad \left. - \mu \iiint_{\tilde{S}(P, R)} \left[\left(\mathbf{s} \times \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \zeta} \right) \mathbf{n} + (\mathbf{s} \times \mathbf{n}) \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \zeta} \right] dS \right\}. \end{aligned} \right.$$

Eseguito una trasformazione sui primi integrali mediante le formule di Gauss-Green e semplificando si hanno le altre formule:

$$(4.9) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{s}(P)}{\partial x} &= \frac{3}{4\pi R^2} \iiint_{\tilde{S}(P, R)} \left[\lambda \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \xi} + \mu \left(\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \xi} \times \mathbf{n} \right) \mathbf{n} \right] dS \\ \frac{\partial \mathbf{s}(P)}{\partial y} &= \frac{3}{4\pi R^2} \iiint_{\tilde{S}(P, R)} \left[\lambda \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \eta} + \mu \left(\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \eta} \times \mathbf{n} \right) \mathbf{n} \right] dS \\ \frac{\partial \mathbf{s}(P)}{\partial z} &= \frac{3}{4\pi R^2} \iiint_{\tilde{S}(P, R)} \left[\lambda \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \zeta} + \mu \left(\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \zeta} \times \mathbf{n} \right) \mathbf{n} \right] dS. \end{aligned} \right.$$

Poichè le (4.9) sono del tipo (2.1) ed esprimono le derivate parziali del vettore $\mathbf{s}(P)$ come medie sulla sfera $S(P, R)$ di un vettore composto con esse nello stesso modo in cui $\mathbf{u}(P, Q)$ è composto con $\mathbf{s}(Q)$ è chiaro che, ripetendo il procedimento del numero 3 si dimostra la continuità delle $\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial y}$, $\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z}$.

Ci siamo così ricondotti alle ipotesi del prof. Sbrana [4] sul vettore $\mathbf{s}(P)$ soddisfacente alla (2.1): ripetendo a questo punto il suo ragionamento, si conclude che $\mathbf{s}(P)$ verifica (1.1). Per lo spostamento definito ovunque in T_R da (2.1) la (1.1) è verificata in tutti i punti $P \in T_R$: supposto quindi di avere un vettore $\mathbf{s}(P)$ sommabile e verificante (2.1) solo quasi ovunque in T_R anche la (1.1) sarà valida quasi ovunque perchè, come s'è già rilevato, i due vettori coincidono quasi ovunque.

5. - Per fare un'applicazione delle formule di media trovate, tenendo presente [5] prendiamo una successione $\{\mathbf{s}_k\}$ di vettori, sommabili col quadrato del modulo e verificanti quasi ovunque in T_R la (1.1) o, ciò che è ormai lo stesso, la (2.1).

Supponiamo che la successione $\{\mathbf{s}_k\}$ converga in media d'ordine 2 ad un vettore $\mathbf{s}$; avremo per ipotesi:

$$(5.1) \quad \iiint_D |\mathbf{s}_k - \mathbf{s}|^2 dS = \epsilon_k^2, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon_k^2 = 0,$$

essendo D un dominio qualsiasi contenuto in T_R . Giova rilevare anzitutto che la successione $\{\mathbf{u}_k\}$ definita da:

$$(5.2) \quad \mathbf{u}_k = \lambda \mathbf{s}_k + \mu(\mathbf{s}_k \times \mathbf{n})\mathbf{n}$$

converge in media al vettore $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{s} + \mu(\mathbf{s} \times \mathbf{n})\mathbf{n}$; si ha infatti:

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \iiint_D |\mathbf{u}_k - \mathbf{u}|^2 dS &\leq \iiint_D [\lambda |\mathbf{s}_k - \mathbf{s}| + \mu |(\mathbf{s}_k - \mathbf{s}) \times \mathbf{n}|] dS \leq \\ &\leq 2 \iiint_D |\mathbf{s}_k - \mathbf{s}|^2 dS \cdot (\lambda^2 + \mu^2) = 2(\lambda^2 + \mu^2) \epsilon_k^2. \end{aligned}$$

Vogliamo ora dimostrare che:

$$\text{I) la successione delle medie } \frac{3}{4\pi R^3} \iiint_{\tilde{S}(\tilde{P}, R)} \mathbf{u}_k(Q) dS = \mathbf{s}_k(P)^2)$$

²⁾ I vettori $\mathbf{s}_k(P)$ così definiti coincidono quasi ovunque con gli $\mathbf{s}_k(P)$ della successione convergente in media (vedi numero 2) e lo stesso avviene per i limiti delle due successioni, $\mathbf{s}_k$ e $\frac{3}{4\pi R^3} \iiint_{\tilde{S}(\tilde{P}, R)} \mathbf{u}_k dS$.

converge uniformemente e quindi in media in T_R al vettore

$$\frac{3}{4\pi R^3} \iiint_{\tilde{S}(\tilde{P}, R)} \mathbf{u}(Q) dS = \mathbf{s}(P).$$

II) le successioni analoghe per le derivate prime, ad esempio $\frac{3}{4\pi R^3} \iiint_{\tilde{S}(\tilde{P}, R)} \left[\lambda \frac{\partial \mathbf{s}_k}{\partial \xi} + \mu \left(\frac{\partial \mathbf{s}_k}{\partial \xi} \times \mathbf{n} \right) \mathbf{n} \right] dS = \frac{\partial \mathbf{s}_k(P)}{\partial x}$, convergono alle derivate prime del limite $\mathbf{s}(P)$.

III) $\mathbf{s}(P)$ verifica quasi ovunque la (1.1).

Infatti dalla definizione di $\mathbf{s}_k(P)$ e $\mathbf{s}(P)$ applicando la disuguaglianza di Schwartz e ricordando (5.1) e (5.3) segue:

$$(5.4) \quad |\mathbf{s}_k(P) - \mathbf{s}(P)| \leq \frac{3}{4\pi R^3} \iiint_{\tilde{S}(\tilde{P}, R)} |\mathbf{u}_k - \mathbf{u}| dS \leq \sqrt{\frac{3(\lambda^2 + \mu^2)}{2\pi R^3}} \epsilon_k.$$

Per le derivate prime occorre tener presenti le (4.8) da cui si ha:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial \mathbf{s}_k(P)}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{s}(P)}{\partial x} \right| \leq \\ & \leq \frac{3}{4\pi R^3} \left\{ \iint_{\sigma(P, \rho)} |\mathbf{u}_k - \mathbf{u}| d\sigma + 2\mu \iiint_{\tilde{S}(\tilde{P}, \rho)} |\mathbf{s}_k - \mathbf{s}| \left| \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi} \right| dS \right\}. \end{aligned}$$

Integrando ambo i membri della precedente rispetto a ρ tra 0 e R si ha:

$$\begin{aligned} & \frac{4\pi}{3} \int_0^R \rho^3 \left| \frac{\partial \mathbf{s}_k(P)}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{s}(P)}{\partial x} \right| d\rho \leq \iiint_{\tilde{S}(\tilde{P}, R)} |\mathbf{u}_k - \mathbf{u}| dS + \\ & + 2\mu \int_0^R d\rho \iiint_{\tilde{S}(\tilde{P}, \rho)} |\mathbf{s}_k - \mathbf{s}| \left| \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi} \right| dS; \\ & \left| \frac{\partial \mathbf{s}_k(P)}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{s}(P)}{\partial x} \right| \leq \\ & \leq \frac{3}{\pi R^4} \left\{ \iiint_{\tilde{S}(\tilde{P}, R)} |\mathbf{u}_k - \mathbf{u}| dS + 2\mu R \iiint_{\tilde{S}(\tilde{P}, R)} |\mathbf{s}_k - \mathbf{s}| \left| \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi} \right| dS \right\}. \end{aligned}$$

Ancora applicando la disuguaglianza di Schwartz, ricordando (5.1) e (5.3), ed osservando che $\left| \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi} \right|$ è di quadrato sommabile in $S(P, R)$, posto $C^2 = \iiint_{\dot{S}(P, R)} \left| \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi} \right| dS$ segue:

$$(5.5) \quad \left| \frac{\partial s_k(P)}{\partial x} - \frac{\partial s(P)}{\partial x} \right| \leq \frac{3}{\pi R^4} \left\{ \sqrt{2(\lambda^2 + \mu^2)} \sqrt{\frac{4\pi R^3}{3}} + 2\mu RC \right\} \varepsilon_k^3.$$

Le (5.4), (5.5) dimostrano quanto abbiamo asserito in I) e II) e i secondi membri danno la maggiorazione dell'errore commesso prendendo s_k al posto di s . La III) è ormai ovvia.

BIBLIOGRAFIA

- [1] F. SBRANA: *Il teorema della media per le equazioni dell'elasticità*. Quaderno scientifico del Convegno matematico di Modena, 1952.
- [2] F. SBRANA: *Una proprietà caratteristica delle equazioni dell'elasticità*. Atti dell'Accademia Ligure di Scienze e Lettere, vol. IX, 1952.
- [3] E. LEVI: *Sopra una proprietà caratteristica delle funzioni armoniche*. Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, serie V, vol. XVIII, 1909.
- [4] L. TONELLI: *Sopra una proprietà caratteristica delle funzioni armoniche*. Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, serie V, vol. XVIII, 1909.
- [5] F. SBRANA: *Sul calcolo approssimato di una funzione armonica in tre variabili, e delle sue successive derivate*. Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, serie VI, vol. VI, 1927.
- [6] B. PINI: *Sul primo problema di valori al contorno della teoria dell'elasticità*. Rendiconti del Seminario matematico dell'Università di Padova, vol. XXI, 1952.

* Naturalmente, la (5.5) vale anche per $\frac{\partial s}{\partial y}$, $\frac{\partial s}{\partial z}$, come si verifica subito.