

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

JEAN MIRGUET

Sur une distinction entre les paratingentes secondes d'une surface

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 27 (1957), p. 245-252

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1957__27__245_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1957__27__245_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1957, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UNE DISTINCTION ENTRE LES PARATINGENTES SECONDES D'UNE SURFACE

Nota () di JEAN MIRGUET (a Gueret)*

Les problèmes, exposés ici, ont pour but de distinguer les modes de production, en un même point d'un ensemble, des paratingentes de rang deux et d'examiner les conséquences, pour les éléments de contact du premier ordre, de restrictions diverses imposées aux sous-ensembles du paratingent second, provoqués par ces distinctions causales.

Le champ de travail de cet article de *Géométrie Infinitésimale Directe* se limite aux nappes univoques de surfaces, dont la notion intuitive est, dans le lexique ensembliste, exprimée adéquatement grâce au Lemme d'univocité du fondateur de cette théorie¹⁾; mon texte suppose connues les données et les propriétés de ses principaux outils (contingent, paratingent, paratingent second)²⁾; il désigne ces nappes par *orthosurfaces*³⁾, et se borne, pour commencer, à rappeler et introduire les définitions immédiatement nécessaires à sa lecture.

(*) Pervenuta in Redazione il 25 giugno 1957.

Indirizzo dell'A.: 9, Route de Pomeil-Gueret (Creux) - Francia.

1) GEORGES BOULIGAND, *Introduction à la Géométrie Infinitésimale Directe*. Paris, 1932.

2) JEAN FAVARD, *Cours de Géométrie Différentielle Locale*. Paris, 1957, page 128.

3) JEAN MIRGUET, *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*. LI, fasc. 3, page 224, 1934.

1. - Les orthosurfaces sont les ensembles ponctuels de l'espace euclidien à trois dimensions, qui satisfont, en chaque point M , aux conditions suivantes :

1°) Il existe, en chaque point M de l'ensemble, une droite $\Delta'M\Delta$ qui est exclue du paratingent de l'ensemble au point M .

2°) Quel que soit le mode selon lequel une parallèle à $\Delta'M\Delta$ se rapproche constamment et continument de M , il existe une distance non-nulle de M , à partir de laquelle cette parallèle contient un point tendant vers M sur la surface (et bien entendu, un seul).

Outre cette droite $\Delta'M\Delta$, il existe une infinité d'autres droites, passant par M , et exclues, elles aussi du paratingent de l'ensemble en M (ce qui résulte de la définition, puisque le paratingent est fermé); toutes ces droites exclues constituent *l'intérieur d'un cône* $C(M)$ ouvert, lequel $C(M)$ est convexe au sens large ⁴⁾, c'est-à-dire que sa frontière est un plan, un dièdre, ou un cône strictement convexe; quand cette frontière est réduite à un plan double P , le paratingent en M , ensemble fermé qui remplit l'extérieur fermé du $C(M)$, devient l'ensemble de toutes les droites de P qui passent par M , le contingent est l'ensemble des demi-droites issues de M dans P , la nappe possède nécessairement un plan tangent en M . On choisit cette $\Delta'M\Delta$, de préférence à toutes les droites exclues du paratingent en M , et on fixe sur $\Delta'M\Delta$ un sens de circulation, qui permette de dire, à propos de deux points distincts, situés sur $\Delta'M\Delta$ (ou bien situés l'un et l'autre sur une même parallèle à $\Delta'M\Delta$) lequel est *au-dessus* ou *en dessous* de l'autre; cette $\Delta'M\Delta$, ainsi préférée et orientée, sera dite la *verticale en* M ; il est évident qu'il existe un voisinage V de M sur la surface, suffisamment restreint pour qu'en chaque point de V la parallèle à $\Delta'M\Delta$ soit encore exclue du paratingent de la surface en ce nouveau point, et puisse, de ce fait, y être choisie comme verticale, avec une orientation équipollente de celle de la verticale en M ; ainsi la verticale en M , induit une verticale sur V .

⁴⁾ ANDRÉ MARCHAUD, C. R. de l'Acad. des Sc., 204, 1937, p. 86.

2. - Un demi-plan issu de la verticale de M est dit *demi-plan vertical en M* ; un plan passant par la verticale de M est dit *plan vertical en M* . Tout demi-plan vertical en M coupe le contingent en M suivant une seule demi-tangente ou suivant une infinité de demi-tangentes; aucun support de ces demi-tangentes n'est intérieur à $C(M)$; s'il y a une infinité de demi-tangentes sur ce demi-plan vertical, elles forment le continu de toutes les demi-droites issues de M , qui remplissent l'intérieur fermé d'un demi-angle de sommet M . Dans tout plan vertical Q , dont Q_1 et Q_2 sont les deux demi-plans verticaux opposés, toute paratingente en M qui sépare une demi-tangente situé dans Q_1 , d'une demitangente située dans Q_2 , est une paratingente de rang supérieur au premier⁵).

Un plan, passant par M , tel que toute droite, passant par M dans ce plan, soit paratingente, sera dit plan *totalement paratingent*. Pour abréger, on écrit *ctg* au lieu de contingent, $1/2$ *tg* au lieu de demi-tangente, *ptg* au lieu de paratingent, *ptg 2* au lieu de paratingent de rang supérieur au premier; une paratingente de rang supérieur au premier sera dite une paratingente supérieure.

Soit γ l'intersection de l'orthosurface et d'un demi-plan vertical Q_1 en M , et MD une demi-droite, non parallèle à la verticale, issue de M dans Q_1 ; si, sur chaque parallèle à la verticale, le point de MD est (sauf en M) en dessous du point de γ , dans un voisinage non-nul de M , la demi droite MD sera dite *positive* en M , par rapport à la surface; si MD contient une infinité de points de γ , admettant M comme point d'accumulation, MD est dite *indifférente*; dans les autres cas, MD est dite *négative*. Du signe, ainsi défini, des demi-droites MD , se déduit le signe des droites $D'MD$, passant par M , et non parallèle à la verticale: on considère les deux demi-droites MD' et MD , opposées sur $D'MD$; si MD' et MD ont l'une et l'autre un signe, et toutes les deux le même signe, $D'MD$ a le même signe qu'elles; si MD' et MD ont chacune un signe, mais si ces deux signes sont différents, $D'MD$ est *indifférente* du pre-

⁵) JEAN MIEGNET, La Revue Scientifique 85, 1947, page 68, para. 2, N. 3.

mier genre; si, de MD' et MD , l'une, au moins, est une demi-droite indifférente, $D'MD$ est *indifférente du deuxième genre*.

D'après ces conventions, toute droite exclue du ptg de la surface en M est indifférente du premier genre. Quant aux paratingentes, elles peuvent ou non avoir un signe chacune; si une paratingente n'a pas de signe, elle est nécessairement de rang supérieur au premier; une paratingente qui a un signe peut être strictement de rang un (Exemple: la tangente à la sphère), ou supérieure (Exemple: rapportées au triedre tri-rectangle $Oxyz$, les droites $z=0$, $y=\lambda x$ sont toutes, en O , de signe défini par rapport au demi-cône de sommet O , dont la base est, dans le plan $z=1$, un cycle borné non-convexe, mais certaines au moins d'entre elles sont de rang supérieur au premier).

3. - Ainsi, l'absence de signe est une *première cause*, pour une droite passant par M , du caractère de paratingente supérieure. Une *deuxième cause* provient de la relation d'une paratingente en M , avec les autres paratingentes en M , qui, par pivotement à deux dimensions autour de M , tendent vers elle: en effet, une paratingente de signe défini en M sera encore supérieure, si elle est limite soit de paratingentes indifférentes en M (dont chacune est, pour la première cause, supérieure), soit de paratingentes en M ayant un signe contraire au sien (ce dont la possibilité se voit pour la droite $z=y=0$, en O , par rapport à la surface $z=(X^2+Y^2)^2-y^2$, car les autres droites, passant par O , dans le plan $z=0$, et qui tendent vers elle, ont toutes un même signe, mais contraire au sien); quand une paratingente positive tend, en restant positive, vers une paratingente négative, l'examen de l'intersection de la surface par le plan vertical de chacune, prouve aussitôt que la paratingente fixe est limite du support de triplets alignés, dont les trois éléments tendent simultanément vers M^6). Une paratingente, pour laquelle sont éliminées ces deux premières causes du caractère de paratingente supérieure, sera dite *libre*; une paratingente non-libre est supérieure: une paratin-

⁶⁾ Loc. cit., p. 70, N. S.

gente libre peut être de rang strictement un, mais peut aussi, pour une *troisième cause*, être supérieure, comme le montre l'exemple des droites $z = 0$, $y = \lambda x$, cité ci-dessus, à la fin du § 2.

THÉORÈME : *Une paratingente non-libre, qui a un signe, porte nécessairement une demi-tangente, frontière du contingent.*

En effet, soit D_1MD_2 une paratingente qui a un signe et dont ni MD_1 , ni MD_2 , ne sont demi-tg frontières du ctg. Si, de MD_1 et MD_2 , l'une, au moins, était demi-tg non frontière, D_1MD_2 n'aurait pas de signe. Donc, ni MD_1 , ni MD_2 ne sont demi-tg et D_1MD_2 , est, dans son plan vertical, et puisqu'elle a un signe, strictement d'appui pour l'intersection du ctg. De ce fait, vu la continuité du ctg, toutes les droites $D_1'MD_2'$, suffisamment peu inclinées sur D_1MD_2 , ont le même signe qu'elle: donc, D_1MD_2 est libre.

4. - Les paratingentes supérieures, en un point d'une orthosurface, peuvent donc se répartir en trois espèces: celles qui n'ont pas de signe; celles qui ont un signe, mais ne sont pas libres; celles qui sont libres. D'où un instrument pour prospecter le comportement local d'une surface, suivant qu'en chacun des points l'une ou l'autre de ces espèces est plus ou moins restreinte: ce que j'entreprends maintenant sous forme d'une considération sur les plans totalement paratingents.

THÉORÈME : *L'orthosurface dont, en chaque point, un plan totalement paratingent ne porte que des paratingentes libres, est équivalente à la surface strictement convexe.*

En effet, sur une surface strictement convexe, le ptg_2 est partout vide. Par suite, si, en un point M , le $C(M)$ est strictement convexe, le ctg ne peut présenter d'élément intérieur (sans quoi, les supports des 1/2 tg intérieures seraient des droites indifférentes du 2ème genre, donc paratingentes supérieures) et toute 1/2 tg doit être supportée par une droite frontière du $C(M)$ (sans quoi, certaines droites, passant par M , sépareraient les deux 1/2 tg de leurs plans verticaux et seraient indifférentes du 1er genre, donc paratingentes supérieures). Donc, vu la continuité du ctg, ce ctg est une des

nappes de la frontière du $C(M)$. Donc, toutes les paratingentes d'un plan P , strictement d'appui pour ce ctg, ont un signe et toutes le même signe; cette propriété et ce signe demeurent pour tous les plans, strictement d'appui pour le ctg, et qui tendent vers P par pivotement autour de M ; donc, toutes les paratingentes de P sont libres.

Si $C(M)$ est un dièdre, on voit, par le même raisonnement, que ctg est dièdre et, dans tout plan P qui est d'appui pour ce ctg dièdre, mais ne contient pas une de ses faces, toutes les paratingentes, sauf peut être l'arête, ont un signe et toutes le même, et que cette propriété et ce signe demeurent pour tous les plans d'appui suffisamment peu inclinés sur P . Donc, toutes les paratingentes de P sont libres, sauf peut être l'arête; quant à l'arête, si elle n'était pas libre, c'est qu'elle serait indifférente ou de signe contraire aux autres paratingentes, mais alors elle serait supérieure, ce qui n'est pas; donc, l'arête est de même signe que les autres paratingentes; donc, elle est libre; donc, tout plan strictement d'appui pour le ctg ne contient que des paratingentes libres. Enfin, si le $C(M)$ est un plan, toutes les paratingentes sont dans ce plan; elles ont toutes un signe, sans quoi celles sans signe seraient supérieures; elles ont toutes le même signe, sans quoi l'une au moins serait limite de paratingentes de signe contraire au sien et, par suite, supérieure. Donc, elles sont toutes libres.

Inversement, soit une surface admettant en chacun de ses points M , un plan $P(M)$ qui ne porte aucune paratingente non libre. Toutes les paratingentes situées dans ce $P(M)$ ont un signe et toutes le même signe; donc, chacune de ces paratingentes est d'appui au sens strict pour l'intersection de son plan vertical et de la surface, et ces différentes intersections verticales sont toutes du même côté de $P(M)$, sans quoi l'une au moins des paratingentes de $P(M)$ ne serait pas libre. Donc, $P(M)$ est un plan d'appui strict pour la surface au point M . Donc, la surface admet un plan d'appui strict en chacun de ses points; donc, elle est strictement convexe.

5. - Comme corollaire du théorème du § 4, si un point M n'est pas point intérieur d'une rondelle de surface strictement

convexe, il est limite de points de la surface où tout plan totalement paratingent contient au moins une paratingente contient au moins une paratingente non libre. A ce point de vue, la généralisation la plus naturelle du cas strictement convexe, étudiée par ce théorème, est la classe Σ ainsi définie : *Est Σ , une orthosurface sur laquelle, en chaque point, l'intersection de chaque plan totalement paratingent et du ptg non libre ne contient jamais de sous ensemble infini continu.* Considérons un point M d'une Σ . Si le $C(M)$ est strictement convexe, un élément intérieur dans le ctg introduirait sur les plans totalement paratingents porteurs de cet élément, un continu infini de supports indifférents du 2ème genre, donc un continu infini de paratingentes non libres; de même, une $1/2$ tg non située sur la frontière du $C(M)$ introduirait sur certains plans totalement paratingents, un continu infini de supports indifférents du 1er genre, donc un continu infini de paratingentes non libres; donc, vu la continuité du ctg, ce ctg est une des nappes de la frontière du $C(M)$ et il est strictement convexe. On prouverait de même que, si le $C(M)$ est un dièdre, le ctg n'a pas d'intérieur et il est dièdre. Donc, en tout point d'une Σ , le ctg n'a jamais d'élément intérieur et c'est un demicône strictement convexe, un dièdre ou un plan.

Les exemples suivants soulignent la puissance des effets de réduction du paratingent libre: soit M un point d'une Σ , où tout plan totalement paratingent porte *une et une seule paratingente non libre*. Il n'est pas possible qu'en M le ctg soit strictement convexe, car dans les plans strictement d'appui pour ce ctg ne figureraient que des paratingentes ayant toujours un signe et toujours le même signe; donc, dans n'importe lequel de ces plans, il n'y aurait que des paratingentes libres, sans possibilité de l'exception unique exigée par hypothèse. Si le ctg est un dièdre, dans tout le plan totalement paratingent, lequel est nécessairement d'appui pour le ctg et contient l'arête, mais qui ne contient pas une des faces du ctg, il n'y a que l'arête qui puisse n'être pas libre; donc, elle est non libre, d'après la loi exigée par hypothèse; et, alors dans les deux plans totalement paratingents, qui portent les faces du ctg, il n'y a, toujours d'après la même exigence de l'énoncé,

aucune autre paratingente non libre que l'arête; donc, il n'y a, dans le cas où le ctg en M est dièdre, qu'une seule paratingente non libre en M . Si le ctg est un plan, ce plan est l'unique plan totalement paratingent en M et l'unique paratingente non libre qu'il contient est l'unique paratingente non libre en M . Donc, l'exigence de l'énoncé réduit le paratingent non libre en M à une seule droite.

De même, si on exige, qu'en un point d'une Σ , chaque plan totalement paratingent porte deux paratingentes non libres et deux seulement, on voit en procédant de la même manière que le ctg ne peut être ni un demi-cône strictement convexe, ni un dièdre et qu'il est plan: ce plan du ctg est alors l'unique plan totalement paratingent, il contient toutes les paratingentes, et les deux paratingentes non libres qu'il est obligé de contenir, sont les deux seules paratingentes non libres qui existent en ce point.

6. - On observera, d'ailleurs, que les deux cas particuliers présentés à la fin du § 5 deviennent des théorèmes de continuité, sur la classe spéciale Σ_1 , des Σ , définie par une clause additive, vérifiée par de multiples exemples de surfaces bien connues: est Σ_1 , toute Σ en chaque point de laquelle nulle paratingente libre n'est supérieure. Alors, si, en chaque point d'une Σ_1 , chaque plan totalement paratingent contient une et une seule paratingente non libre, il n'y a, en chaque point M_i de cette Σ_1 qu'une seule paratingente non libre $D(M_i)$, qui est, en même temps, la seule paratingente supérieure en M_i ; et pour $M_i \rightarrow M_0$, $D(M_i)$ ne peut tendre que vers $D(M_0)$, sans quoi elle tendrait vers une paratingente libre en M_0 et la rendrait supérieure.