

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

LETIZIA DAL SOGLIO

Grado topologico e teoremi di esistenza di punti uniti per trasformazioni plurivalenti di n -celle

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 27 (1957), p. 103-121

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1957__27__103_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1957__27__103_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1957, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

GRADO TOPOLOGICO E TEOREMI DI ESISTENZA DI PUNTI UNITI PER TRASFOR- MAZIONI PLURIVALENTI DI n -CELLE

Memoria () di LETIZIA DAL SOGLIO (a Padova)*

In questa Memoria estendo al caso n -dimensionale i risultati conseguiti ed esposti in un mio precedente lavoro per il caso 3-dimensionale¹⁾. Precisamente introduco la nozione di grado topologico (n. 5) per trasformazioni plurivalenti di un sottoinsieme E dello spazio numerico euclideo $\mathcal{G}^{(n)}$, e deduco poi, dalle proprietà di tale grado, alcuni criteri di esistenza di punti uniti per trasformazioni plurivalenti di n -celle.

La nozione attuale di grado topologico si riesce ad introdurre, come avveniva del resto nel caso 3-dimensionale, solo per trasformazioni che soddisfino ad opportune ipotesi (n. 2); è da rilevare tuttavia che tali ipotesi si riducono, quando $n = 3$, a quelle già date nel caso 3-dimensionale.

1. - In questo numero intendo precisare il significato di notazioni e simboli usati nel presente lavoro e dare alcune definizioni utili per il seguito.

Lo spazio ambiente è lo spazio euclideo n -dimensionale $\mathcal{G}^{(n)}$ che suppongo orientato.

(*) Pervenuta in Redazione il 20 marzo 1957.

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

¹⁾ L. DAL SOGLIO, *Grado topologico e teoremi di esistenza di punti uniti per trasformazioni plurivalenti di 3-celle*. [Rendiconti del Seminario Matematico dell'Univ. di Padova (1956), pp. 386-405].

Inoltre mi riferisco sempre alla teoria dell'omologia singolare di Eilenberg; pertanto considero catene singolari in-tere del complesso singolare totale $S(\mathcal{G}^{(n)})^2$.

Col simbolo $|U|$ indico il supporto della catena U , vale a dire l'insieme dei punti dei semplici che compaiono in U con coefficiente non nullo.

Il simbolo $k(U)$ rappresenta invece il sostegno simpliciale (o semplicemente sostegno) di U , cioè il complesso chiuso³⁾ costituito dai semplici che compaiono in U con coefficiente non nullo e da tutte le loro faccie.

Con K indico generalmente un sottocomplesso chiuso di $S(\mathcal{G}^{(n)})$, mentre un semplice singolare j -dimensionale generico viene indicato con σ^j .

Farò uso inoltre dei coefficienti di incidenza $[\sigma^j : \sigma^{j-1}]$, rappresentando $[\sigma^j : \sigma^{j-1}]$, il coefficiente con cui σ^{j-1} compare nel contorno di σ^j .

DEF. I^a - Dato un complesso K ed un punto $x \in \mathcal{G}^{(n)}$, dicesi stella di centro x relativa a K , $St(x, K)$, l'insieme unione dei supporti dei semplici σ^j di K per cui $x \in |\sigma^j|$ ⁴⁾.

DEF. II^a - Un insieme A di $\mathcal{G}^{(n)}$ dicesi pluriconvesso quando è unione di un numero finito di insiemi chiusi, limitati e convessi, a due a due disgiunti.

Oss. I^a - L'intersezione di due insiemi pluriconvessi è ancora un insieme pluriconvesso.

Infatti se $A = \bigcup_i A_i$ e $B = \bigcup_k B_k$ (con A_i, B_k insiemi chiusi limitati e convessi ecc.) $A \cup B = \bigcup_{ik} A_i \cap B_k$ dove gli $A_i \cap B_k$ se non sono vuoti, sono insiemi chiusi limitati e convessi, in numero finito e a due a due disgiunti.

2) Cfr. S. EILENBERG, *Singular Homology Theory*. [Annals of Math. 1944, Princeton University].

3) Un complesso K dicesi chiuso se contiene tutte le faccie di ogni suo semplice.

4) Si noti che, se K è finito, vi è un numero finito di stelle distinte e che inoltre, per ogni punto $x \in \mathcal{G}^{(n)}$, $St(x, K)$ è un continuo.

Oss. II^a - Dal teorema di dualità di Alexander discende che il complementare di un insieme pluriconvesso è un insieme connesso ed aciclico nelle dimensioni 1, 2, ... $n-2$.

Se A è un insieme chiuso e limitato di $\mathcal{G}^{(n)}$ potremo considerare l'*inviluppo convesso* di A , cioè il più piccolo insieme chiuso e convesso contenente A . L'*inviluppo convesso* di A sarà indicato con $\text{inv}\{A\}$.

2. - Nel seguito sarà presa in considerazione una trasformazione $\mathcal{T}$, definita in un sottoinsieme $E \subset \mathcal{G}^{(n)}$ per cui siano soddisfatte le seguenti ipotesi:

I. - L'immagine $\mathcal{T}(P)$ di P sia per ogni $P \in E$ un sottoinsieme compatto di $\mathcal{G}^{(n)}$.

II. - $\mathcal{T}$ sia superiormente semicontinua in tutto E (vale a dire per ogni $P_0 \in E$, comunque si fissi $\varepsilon > 0$ sia possibile determinare un ρ -intorno di P_0 , $[P_0]_\rho$, per cui si abbia $\mathcal{T}(P) \subset [\mathcal{T}(P_0)]_\varepsilon$ per ogni $P \in [P_0]_\rho \cdot E^5$). Inoltre indicando con E_0 l'insieme dei punti $P \in E$ per cui $P \in \mathcal{T}(P)$ si abbia che:

III. - L'immagine $\mathcal{T}(P)$ di P sia, per ogni $P \in E - E_0$, rinchiudibile in un insieme pluriconvesso non contenente P .

Se $P \in E$ chiameremo *pezzo* di $\mathcal{T}(P)$ un sottoinsieme τ di $\mathcal{T}(P)$ che risulti contemporaneamente aperto e chiuso rispetto a $\mathcal{T}(P)$ potendo τ in particolare coincidere con l'insieme vuoto o con $\mathcal{T}(P)$. Si fa allora l'ulteriore ipotesi:

IV. - Per ogni $P \in E$ sia assegnata una funzione $F_P(\tau)$ dei pezzi τ di $\mathcal{T}(P)$, a valori in un gruppo additivo $\mathcal{G}$, additiva, tale cioè che se τ' e τ'' sono due pezzi disgiunti di $\mathcal{T}(P)$ risulti $F_P(\tau' + \tau'') = F_P(\tau') + F_P(\tau'')$.

Si osservi che, se A è un sottoinsieme di $\mathcal{G}^{(n)}$ la cui frontiera sia disgiunta da $\mathcal{T}(P_0)$ ($P_0 \in E$) l'insieme $A \cdot \mathcal{T}(P_0)$ è un pezzo τ di $\mathcal{T}(P_0)$. Inoltre, se ε è un numero positivo minore della distanza tra $\mathcal{T}(P_0)$ e la frontiera di A , esiste, per

⁵ Se A è un insieme di punti di $\mathcal{G}^{(n)}$, col simbolo $[A]_\varepsilon$ (ε essendo un numero positivo) si indica l' ε -intorno aperto di A , ossia l'insieme dei punti di $\mathcal{G}^{(n)}$ che distano da A per meno di ε .

l'ipotesi II, un ρ -intorno di P_0 , $[P_0]_\rho$, per cui se $P \in [P_0]_\rho \cdot E$ $\mathcal{C}(P) \subset [\mathcal{C}(P_0)]_\rho$.

Quindi, se $P \in [P_0]_\rho \cdot E$, $A \cdot \mathcal{C}(P)$ è un *pezzo* di $\mathcal{C}(P)$ ed ha senso considerare la funzione $F_P[A \cdot \mathcal{C}(P)]$.

Si supponrà allora che:

V. - Se $P_0 \in E$ ed A è un sottoinsieme di $\mathcal{G}^{(n)}$ la cui frontiera sia disgiunta da $\mathcal{C}(P_0)$, si possa determinare un ρ -intorno di P_0 , $[P_0]_\rho$, per cui se $P \in [P_0]_\rho \cdot E$ sia:

$$F_P[A \cdot \mathcal{C}(P)] = F_{P_0}[A \cdot \mathcal{C}(P_0)].$$

Oss. III^a - Una trasformazione plurivalente $\mathcal{C}$ di E che faccia corrispondere ad ogni punto $P \in E$ un numero finito di punti soddisfa alle ipotesi I e III.

3. - Consideriamo un punto $P \in E$ ed un ciclo n -1-dimensionale Γ il cui supporto appartenga ad $\mathcal{G}^{(n)} - \mathcal{C}(P)$.

L'insieme $\mathcal{G}^{(n)} - |\Gamma|$ è costituito da un numero finito od al più da una infinità numerabile di insiemi aperti connessi, a due a due disgiunti, A_k . Per ogni k l'insieme $\tau_k = A_k \cdot \mathcal{C}(P)$ è un *pezzo* di $\mathcal{C}(P)$. I *pezzi* τ_k non vuoti sono in numero finito: infatti gli insiemi τ_k costituiscono un ricoprimento aperto (relativamente a $\mathcal{C}(P)$) di $\mathcal{C}(P)$; poichè $\mathcal{C}(P)$ è un compatto tale ricoprimento ammette un sottoricoprimento finito $\{\tau_{k_1} \tau_{k_2} \dots \tau_{k_n}\}$; ma allora, essendo i *pezzi* τ_k a due a due disgiunti, debbono essere necessariamente vuoti tutti i rimanenti τ_k .

Inoltre l'ordine⁶⁾ di un punto $Q \in \tau_k$ rispetto al ciclo Γ non varia al variare di Q in τ_k , in quanto $\tau_k \subset A_k$ ed A_k è un componente connesso di $\mathcal{G}^{(n)} - |\Gamma|$. Indicando questo ordine con v_k si pone:

$$(1) \quad \omega(P, \Gamma) = \sum v_k F_P(\tau_k)$$

la somma essendo estesa a tutti i *pezzi* τ_k non vuoti.

⁶⁾ Cfr. P. ALEXANDROFF - H. HOPF, *Topologie*. Berlin, 1935, pp. 419-423, 458 e segg.

LEMMA I. - *Il numero $\omega(P, \Gamma)$ non varia al variare di P in un continuo $I \subset E$ la cui immagine $\mathcal{C}(I)$ non abbia punti comuni con $|\Gamma|$.*

Infatti se $P_0 \in I$ e se $\tau_k^0 = A_k \cdot \mathcal{C}(P_0)$, è possibile per la proprietà V del n. 2 determinare un numero $\rho > 0$, per cui risulti:

$$F_P[A_k \cdot \mathcal{C}(P)] = F_{P_0}[A_k \cdot \mathcal{C}(P_0)] \quad \text{se} \quad P \in [P_0]_\rho \cdot I.$$

Pertanto se $P \in [P_0]_\rho \cdot I$ si ha:

$$\omega(P, \Gamma) = \sum_k v_k F_P(\tau_k) = \sum_k v_k F_{P_0}(\tau_k^0)$$

dove v_k è l'ordine di un qualsiasi punto $Q \in A_k$ rispetto al ciclo Γ . Ad ogni punto $P_0 \in I$ è possibile quindi associare un ρ -intorno $[P_0]_\rho$ tale che, variando P in $[P_0]_\rho \cdot I$, il numero $\omega(P, \Gamma)$ rimane costante. Ma essendo I un continuo $\omega(P, \Gamma)$ risulterà costante in tutto I come risulta dal teorema di ricoprimento di Pincherle-Borel.

Oss. IV. - Nelle ipotesi del lemma precedente si può attribuire significato al simbolo $\omega(I, \Gamma)$ mediante la posizione:

$$\omega(I, \Gamma) = \omega(P, \Gamma) \quad \text{con} \quad P \in I.$$

Possiamo inoltre affermare, e la dimostrazione è identica a quella data per $n = 3$ ⁷⁾, che:

Se Γ, Γ' e Γ'' sono tre cicli n -1-dimensionali di $\mathcal{E}^{(n)} - \mathcal{C}(P_0)$ e se $\Gamma = \Gamma' + \Gamma''$ allora

$$(2) \quad \omega(P_0, \Gamma) = \omega(P_0, \Gamma') + \omega(P_0, \Gamma'').$$

Più in generale se $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r$ sono cicli n -1-dimensionali di $\mathcal{E}^{(n)} - \mathcal{C}(P_0)$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ interi relativi si ha:

$$(3) \quad \omega(P_0, \lambda_1 \Gamma_1 + \dots + \lambda_r \Gamma_r) = \lambda_1 \omega(P_0, \Gamma_1) + \dots + \lambda_r \omega(P_0, \Gamma_r).$$

⁷⁾ V. loc. cit. in (1) pag. 391.

4. DEF. III. - Sia K un sottocomplesso del complesso singolare totale $S(E)$; una stella di K , $St(x, K)$, dicesi *normale* quando la sua immagine $\mathcal{C}(St(x, K))$ è rinchiudibile in un insieme pluriconvesso disgiunto da $St(x, K)$.

DEF. IV. - Un complesso $K \subset S(E)$ dicesi *normale* se è finito e se ogni sua stella è *normale*.

LEMMA II. - Se K è un sottocomplesso finito del complesso singolare totale $S(E - E_0)$, esiste una suddivisione baricentrica di K che è un complesso normale.

Siano $K = {}^0K, {}^1K, {}^2K, \dots, {}^rK, \dots$ i complessi che si ottengono mediante successive suddivisioni baricentriche di K . Indichiamo con $\mathcal{G}_r$ l'insieme somma delle stelle *non normali* di rK ; $\mathcal{G}_r$ è un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathcal{G}^{(n)}$ (cfr. (4) pag. 104).

Supponiamo che per ogni r sia $\mathcal{G}_r \neq 0$, possiamo allora considerare la successione di insiemi chiusi, limitati e non vuoti di $\mathcal{G}^{(n)}$:

$$\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots$$

Tale successione risulta monotona decrescente, vale a dire $\mathcal{G}_0 \supset \mathcal{G}_1 \supset \dots$, poichè se $St(x, {}^{r+1}K)$ non è *normale* non lo è neppure $St(x, {}^rK)$ essendo $St(x, {}^{r+1}K) \subset St(x, {}^rK)$. Pertanto, in base al teorema di Cantor, esiste almeno un punto P_0 comune a tutti gli insiemi $\mathcal{G}_r$. Per l'ipotesi III del n. 2 $\mathcal{C}(P_0)$ è rinchiudibile in un insieme pluriconvesso R non contenente P_0 . Sia ε un numero positivo minore della distanza di P_0 da R e della più piccola fra le mutue distanze degli insiemi convessi costituenti R . Per l'ipotesi II del n. 2 si può determinare un ρ -intorno di P_0 , $[P_0]_\rho$ ($\rho < \frac{\varepsilon}{3}$), tale che $\mathcal{C}([P_0]_\rho \cdot E)$ sia contenuto in $[\mathcal{C}(P_0)]_{\frac{\varepsilon}{3}}$ e quindi, a maggior ragione in $[R]_{\frac{\varepsilon}{3}}$.

La chiusura dell'insieme $[R]_{\frac{\varepsilon}{3}}$ risulta pertanto, in base alla particolare scelta di ε e di ρ , un insieme pluriconvesso che rinchiude $\mathcal{C}([P_0]_\rho \cdot E)$ e che non ha punti comuni con $[P_0]_\rho$. Si osservi ora che, se δ_r è il massimo dia-

metro delle stelle di rK si ha $\lim_{r \rightarrow \infty} \mathfrak{E}_r = 0$, quindi per r abbastanza grande le stelle di rK non *normali* contenenti P_0 sono interamente contenute in $[P_0]_0 \cdot E$. Ma allora tali stelle risulterebbero normali. Dovrà essere dunque $\mathfrak{E}_r = 0$ per r abbastanza grande, e per tali r , rK sarà *normale*.

5. - Consideriamo un n -1-ciclo Ξ *normale*, vale a dire un n -1-ciclo di un complesso normale K . Il ciclo Ξ ammette una rappresentazione del tipo:

$$\Xi = \sum_{\sigma^{n-1} \in K} \lambda(\sigma^{n-1}) \sigma^{n-1}$$

dove i numeri $\lambda(\sigma^{n-1})$, ($\sigma^{n-1} \in K$) sono interi relativi soddisfacenti alla:

$$(4) \quad \sum_{\sigma^{n-1} \in K} \lambda(\sigma^{n-1}) [\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}] = 0.$$

Sia x^0 un punto ($= 0$ — simpleso) appartenente al complementare di $\text{inv. } \{\mathcal{C}(|K|)\}$, ($\text{inv.} = \text{involucro convesso}$). Si fissi, per ogni stella di K del tipo $St(\sigma^0, K)$, un sottoinsieme pluriconvesso di $\text{inv. } \{\mathcal{C}(|K|), R(\sigma^0)$, che contenga $\mathcal{C}(St(\sigma^0, K))$ e che sia disgiunto da $St(\sigma^0, K)$.

L'oss. II del n. 1 ci assicura che, se σ^0 è un simpleso di K ed $R(\sigma^0)$ l'insieme pluriconvesso ad esso associato, esiste una 1-catena $C^1(\sigma^0)$ appartenente ad $\mathcal{E}^{(n)} - R(\sigma^0)$ e tale che:

$$(5) \quad \dot{C}^1(\sigma^0) = \sigma^0 - x^0.$$

Fissato un sistema di 1-catene siffatte, $\{C^1(\sigma^0)\}$, da associarsi agli 0-simplessi di K , si potrà associare ad ogni $\sigma^r \in K$ (per $r = 1, 2, \dots, n-2$) una $r+1$ -catena $C^{r+1}(\sigma^r)$, appartenente ad $\mathcal{E}^{(n)} - \bigcap_{\sigma^0 \in K(\sigma^r)} R(\sigma^0)$ e tale che soddisfi alla relazione ricorrente:

$$(5_1) \quad \dot{C}^{r+1}(\sigma^r) = \sigma^r - \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}] C^r(\sigma^{r-1})^s).$$

^{s)} Qui e nel seguito, ove non vi sia pericolo di ambiguità la somma $\sum_{\sigma^i} (i = 0, 1, \dots, n-1)$ si intende estesa a tutti i $\sigma^i \in K$.

Infatti, ammesso che $C^r(\sigma^{r-1})$ appartenga ad $\mathcal{E}^{(n)}$ —
— $\bigcap_{\sigma^0 \in K(\sigma^{r-1})} R(\sigma^0)$, si ha:

$$|\sigma^r - \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}] C^r(\sigma^{r-1})| \subset \mathcal{E}^{(n)} - \bigcap_{\sigma^0 \in K(\sigma^r)} R(\sigma^0).$$

Inoltre $\sigma^r - \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}] C^r(\sigma^{r-1})$ è, come discende facilmente dalle 5), 5₁)⁹⁾, un r — ciclo di $\mathcal{E}^{(n)} - \bigcap_{\sigma^0 \in K(\sigma^r)} R(\sigma^0)$, omologo quindi a zero in $\mathcal{E}^{(n)} - \bigcap_{\sigma^0 \in K(\sigma^r)} R(\sigma^0)$ per $r = 1, \dots, n-2$ (Cfr. Oss. I^a e II^a del n. 1).

Si consideri ora per ogni $\sigma^{n-1} \in K$ l' n -1-ciclo:

$$\Gamma(\sigma^{n-1}) = \sigma^{n-1} - \sum_{\sigma^{n-2}} [\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}] C^{n-1}(\sigma^{n-2})^{10)}.$$

⁹⁾ Infatti la frontiera di $\sigma^r - \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}] C^r(\sigma^{r-1})$, per $r > 1$, è data da:

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}] \sigma^{r-1} - \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}] \sigma^{r-1} + \\ & + \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}] \sum_{\sigma^{r-2}} [\sigma^{r-1} : \sigma^{r-2}] C^{r-1}(\sigma^{r-2}) = \\ & = \sum_{\sigma^{r-2}} C^{r-1}(\sigma^{r-2}) \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}] [\sigma^{r-1} : \sigma^{r-2}] = 0 \end{aligned}$$

per note proprietà dei coefficienti di incidenza.

Per $r = 1$ si ha:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}^1 - \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] \dot{C}^1(\sigma^0) &= \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] \sigma^0 - \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] \sigma^0 + x^0 \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] = \\ &= x^0 \sum [\sigma^1 : \sigma^0] = 0. \end{aligned}$$

¹⁰⁾ $\Gamma(\sigma^{n-1})$ è un ciclo, si ha infatti:

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}(\sigma^{n-1}) &= \sum_{\sigma^{n-2}} [\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}] \sigma^{n-2} - \sum_{\sigma^{n-2}} [\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}] \sigma^{n-2} + \\ &+ \sum_{\sigma^{n-2}} [\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}] \sum_{\sigma^{n-3}} [\sigma^{n-2} : \sigma^{n-3}] C^{n-2}(\sigma^{n-3}) = \\ &= \sum_{\sigma^{n-3}} C^{n-2}(\sigma^{n-3}) \sum_{\sigma^{n-2}} [\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}] [\sigma^{n-2} : \sigma^{n-3}] = 0. \end{aligned}$$

Si osservi che $|\Gamma(\sigma^{n-1})| \subset \mathcal{E}^{(n)} - \bigcap_{\sigma^0 \in K(\sigma^{n-1})} R(\sigma^0)$ e che $\bigcap_{\sigma^0 \in K(\sigma^{n-1})} R(\sigma^0) \supset \mathcal{C}(|\sigma^{n-1}|)$; pertanto è lecito considerare per ogni $\sigma^{n-1} \in K$, $\omega(|\sigma^{n-1}|, \Gamma(\sigma^{n-1}))$.

Oss. V. - Se $[\sigma^{n-1} : \sigma'^{-2}] \neq 0$ allora

$$\omega(|\sigma^{n-1}|, \Gamma(\sigma^{n-1})) = \omega(|\sigma^{n-2}|, \Gamma(\sigma'^{-1}))$$

essendo

$$|\sigma^{n-2}| \subset |\sigma^{n-1}|.$$

Prendiamo ora in esame la seguente somma:

$$\begin{aligned} (6) \quad \Omega(\Xi, K, x^0, \{R(\sigma^0)\}, \{C^{r+1}(\sigma^r)\}) = \\ = \sum_{\sigma^{n-1} \in K} \lambda(\sigma'^{-1}) \omega(|\sigma^{n-1}|, \Gamma(\sigma^{n-1})). \end{aligned}$$

Si dimostra che $\Omega(\Xi, K, x^0, \{R(\sigma^0)\}, \{C^{r+1}(\sigma^r)\})$ dipende esclusivamente dal ciclo Ξ . Si potrà scrivere pertanto:

$$\Omega(\Xi) = \sum_{\sigma^{n-1} \in K} \lambda(\sigma^{n-1}) \omega(|\sigma^{n-1}|, \Gamma(\sigma^{n-1}))$$

e chiamare $\Omega(\Xi)$, *grado della trasformazione $\mathcal{C}$ relativo al ciclo normale Ξ* .

Per giungere alla conclusione voluta proviamo intanto che $\Omega(\Xi)$ non dipende dal punto x^0 , dal sistema di insiemi $\{R(\sigma^0)\}$, nè dai particolari sistemi di catene $\{C^{r+1}(\sigma^r)\}$ associate ai semplici $\sigma^r \in K$, ($r = 0, 1, \dots, n-2$).

Siano $\{R'(\sigma^0)\}$, $\{C'^1(\sigma^0)\}$, ..., $\{C'^{n-1}(\sigma^{n-2})\}$, degli altri sistemi di insiemi e di catene associati ai semplici di K e sia:

$$R'(\sigma^0) \subset \text{inv. } \{\mathcal{C}(|K|)\}$$

$$|C'^1(\sigma^0)| \subset \mathcal{E}^{(n)} - R'(\sigma^0)$$

$$C'^1(\sigma^0) = \sigma^0 - x^0 \quad (x^0 \in \mathcal{E}^{(n)} - \text{inv. } \{\mathcal{C}(|K|)\})$$

$$|C^{r+1}(\sigma^r)| \subset \mathcal{G}^{(n)} - \bigcap_{\sigma^0 \in K(\sigma^r)} R'(\sigma^0)$$

$$\dot{C}^{r+1}(\sigma^r) = \sigma^r - \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}] C^r(\sigma^{r-1}) \quad (r = 1, 2, \dots, n-2).$$

Poichè x^0 ed x'^0 appartengono entrambi ad $\mathcal{G}^{(n)} - inv.$ $\{\mathcal{T}(|K|)\}$, e questo insieme è connesso, (Oss. II, n. 1)), potremo trovare una 1-catena C^1 di $\mathcal{G}^{(n)} - inv.$ $\{\mathcal{T}(|K|)\}$ la cui frontiera sia:

$$\dot{C}^1 = x'^0 - x^0.$$

La catena $C^1(\sigma^0) - C^1(\sigma^0) + C^1$, ($\sigma^0 \in K$), è allora un 1-ciclo di $\mathcal{G}^{(n)} - R(\sigma^0) \cap R'(\sigma^0)$, quindi, sempre per l'Oss. II del n. 1, è possibile determinare, per ogni $\sigma^0 \in K$, una 2-catena di $\mathcal{G}^{(n)} - R(\sigma^0) \cap R'(\sigma^0)$, $U^2(\sigma^0)$, tale che:

$$(7) \quad \dot{U}^2(\sigma^0) = C^1(\sigma^0) - C^1(\sigma^0) + C^1.$$

Fissato un sistema di 2-catene siffatte, $\{U^2(\sigma^0)\}$, potremo trovare per ogni $\sigma^r \in K$, (e per $r = 1, 2, \dots, n-3$) una $r+2$ -catena $U^{r+2}(\sigma^r)$, appartenente ad $\mathcal{G}^{(n)} - \bigcap_{\sigma^0 \in K(\sigma^r)} R(\sigma^0) \cap R'(\sigma^0)$ e che soddisfi alla relazione ricorrente:

$$(7_1) \quad \dot{U}^{r+2}(\sigma^r) = C^{r+1}(\sigma^r) - C^{r+1}(\sigma^r) + \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}] U^{r+1}(\sigma^{r-1}).$$

Infatti se $|U^{r+1}(\sigma^{r-1})| \subset \mathcal{G}^{(n)} - \bigcap_{\sigma^0 \in K(\sigma^{r-1})} R(\sigma^0) \cap R'(\sigma^0)$ allora è anche:

$$\begin{aligned} & |C^{r+1}(\sigma^r) - C^{r+1}(\sigma^r) + \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}] U^{r+1}(\sigma^{r-1})| \subset \\ & \subset \mathcal{G}^{(n)} - \bigcap_{\sigma^0 \in K(\sigma^r)} R(\sigma^0) \cap R'(\sigma^0). \end{aligned}$$

Inoltre si riconosce facilmente in base alle (7), (7₁) che:

$$C^{r+1}(\sigma^r) - C^{r+1}(\sigma^r) + \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}] U^{r+1}(\sigma^{r-1})$$

è un $r+1$ -ciclo ¹¹⁾ di $\mathcal{G}^{(n)} = \bigcap_{\sigma^0 \in K(\sigma^r)} R(\sigma^0) \cap R'(\sigma^0)$, omologo quindi a zero in $\mathcal{G}^{(n)} = \bigcap_{\sigma^0 \in K(\sigma^r)} R(\sigma^0) \cap R'(\sigma^0)$ per $r = 1, 2, \dots, n-3$ (cfr. Oss. II del n. 1).

Ora se $\Gamma'(\sigma^{n-1})$ è l' $n-1$ -ciclo associato al simpleso $\sigma^{n-1} \in K$, in relazione ai sistemi di catene $\{C^{r+1}(\sigma^r)\}$ ($r = 0, \dots, n-2$) si ha:

$$(8) \quad \begin{aligned} \Gamma'(\sigma^{n-1}) &= \Gamma(\sigma^{n-1}) - \\ &- \sum_{\sigma^{n-2}} [\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}] (C'^{n-1}(\sigma^{n-2}) - C^{n-1}(\sigma^{n-2})). \end{aligned}$$

Osservando che, per note proprietà dei coefficienti di incidenza,

$$\sum_{\sigma^{n-2}} [\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}] \sum_{\sigma^{n-3}} [\sigma^{n-2} : \sigma^{n-3}] U^{n-1}(\sigma^{n-3})$$

è la $n-1$ -catena nulla dalla (8) si ottiene la:

$$(9) \quad \Gamma'(\sigma^{n-1}) = \Gamma(\sigma^{n-1}) -$$

¹¹⁾ Infatti per $r > 1$ si ha:

$$\begin{aligned} \dot{C}'^{r+1}(\sigma^r) - \dot{C}^{r+1}(\sigma^r) + \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}] \dot{U}^{r+1}(\sigma^{r-1}) &= \\ = \sigma^r - \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}] C'^r(\sigma^{r-1}) - \sigma^r + \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}] C^r(\sigma^{r-1}) + \\ + \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}] (C'^r(\sigma^{r-1}) - C^r(\sigma^{r-1})) + \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}] \sum_{\sigma^{r-2}} [\sigma^{r-1} : \sigma^{r-2}] U^r(\sigma^{r-2}) &= \\ = \sum_{\sigma^{r-2}} U^r(\sigma^{r-2}) \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}] [\sigma^{r-1} : \sigma^{r-2}] &= 0. \end{aligned}$$

Per $r = 1$ si ha:

$$\begin{aligned} \dot{C}'^2(\sigma^1) - \dot{C}^2(\sigma^1) + \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] \dot{U}^2(\sigma^0) &= \\ = \sigma^1 - \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] C'^1(\sigma^0) - \sigma^1 + \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] C^1(\sigma^0) + \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] (C'^1(\sigma^0) - C^1(\sigma^0)) + \\ + \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] C^1 &= C^1 \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\sigma^{n-2}} [\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}] (C'^{n-1}(\sigma^{n-2}) - C^{n-1}(\sigma^{n-2}) + \\
& + \sum_{\sigma^{n-3}} [\sigma^{n-2} : \sigma^{n-3}] U^{n-1}(\sigma^{n-3})).
\end{aligned}$$

Di qui per la (3) del n. 4 si ha:

$$\begin{aligned}
& \omega(|\sigma^{n-1}|, \Gamma'(\sigma^{n-1})) = \omega(|\sigma^{n-1}|, \Gamma(\sigma^{n-1})) - \\
& - \omega(|\sigma^{n-1}|, \sum_{\sigma^{n-2}} [\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}] (C'^{n-1}(\sigma^{n-2}) - C^{n-1}(\sigma^{n-2}) + \\
& + \sum_{\sigma^{n-3}} [\sigma^{n-2} : \sigma^{n-3}] U^{n-1}(\sigma^{n-3}))).
\end{aligned}$$

e quindi:

$$\begin{aligned}
(10) \quad & \Omega(\mathbb{E}, K, x^0, \{R'(\sigma^0)\}, \{C'^{r+1}(\sigma^r)\}) = \\
& = \Omega(\mathbb{E}, K, x^0, \{R(\sigma^0)\}, \{C^{r+1}(\sigma^r)\}) - \\
& - \sum_{\sigma^{n-1}} \lambda(\sigma^{n-1}) \omega(|\sigma^{n-1}|, \sum_{\sigma^{n-2}} [\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}] (C'^{n-1}(\sigma^{n-2}) - \\
& - C^{n-1}(\sigma^{n-2}) + \sum_{\sigma^{n-3}} [\sigma^{n-2} : \sigma^{n-3}] U^{n-1}(\sigma^{n-3}))).
\end{aligned}$$

Si noti che

$$C'^{n-1}(\sigma^{n-2}) - C^{n-1}(\sigma^{n-2}) + \sum_{\sigma^{n-3}} [\sigma^{n-2} : \sigma^{n-3}] U^{n-1}(\sigma^{n-3})$$

è un ciclo ¹²⁾, pertanto, sempre per la (3) del n. 4 e per l'Oss. V

¹²⁾ La frontiera di questa $n-1$ -catena è data da:

$$\begin{aligned}
& \dot{C}^{n-1}(\sigma^{n-2}) - \dot{C}^{n-1}(\sigma^{n-2}) + \sum_{\sigma^{n-3}} [\sigma^{n-2} : \sigma^{n-3}] \dot{U}^{n-1}(\sigma^{n-3}) = \\
& = \sigma^{n-2} - \sum_{\sigma^{n-3}} [\sigma^{n-2} : \sigma^{n-3}] C'^{n-2}(\sigma^{n-3}) - \sigma^{n-2} + \sum_{\sigma^{n-3}} [\sigma^{n-2} : \sigma^{n-3}] C^{n-2}(\sigma^{n-3}) + \\
& + \sum_{\sigma^{n-3}} [\sigma^{n-2} : \sigma^{n-3}] (C'^{n-2}(\sigma^{n-3}) - C^{n-2}(\sigma^{n-3})) + \sum_{\sigma^{n-4}} [\sigma^{n-3} : \sigma^{n-4}] U^{n-2}(\sigma^{n-4}) = \\
& = \sum_{\sigma^{n-3}} [\sigma^{n-2} : \sigma^{n-3}] \sum_{\sigma^{n-4}} [\sigma^{n-3} : \sigma^{n-4}] U^{n-2}(\sigma^{n-4}) = \\
& = \sum_{\sigma^{n-4}} U^{n-2}(\sigma^{n-4}) \sum_{\sigma^{n-3}} [\sigma^{n-2} : \sigma^{n-3}] [\sigma^{n-3} : \sigma^{n-4}] = 0.
\end{aligned}$$

di questo numero potremo scrivere

$$\begin{aligned}
 (11) \quad & \sum_{\sigma^{n-1}} \lambda(\sigma^{n-1}) \omega(|\sigma^{n-1}|, \sum_{\sigma^{n-2}} [\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}] (C'^{n-1}(\sigma^{n-2}) - \\
 & - C^{n-1}(\sigma^{n-2}) + \sum_{\sigma^{n-3}} [\sigma^{n-2} : \sigma^{n-3}] U^{n-1}(\sigma^{n-3}))) = \\
 & = \sum_{\sigma^{n-1}} \lambda(\sigma^{n-1}) \sum_{\sigma^{n-2}} [\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}] \omega(|\sigma^{n-2}|, C'^{n-1}(\sigma^{n-2}) - \\
 & - C^{n-1}(\sigma^{n-2}) + \sum_{\sigma^{n-3}} [\sigma^{n-2} : \sigma^{n-3}] U^{n-1}(\sigma^{n-3})) = \\
 & = \sum_{\sigma^{n-2}} \omega(|\sigma^{n-2}|, C'^{n-1}(\sigma^{n-2}) - C^{n-1}(\sigma^{n-2}) + \\
 & + \sum_{\sigma^{n-3}} [\sigma^{n-2} : \sigma^{n-3}] U^{n-1}(\sigma^{n-3})) \sum_{\sigma^{n-1}} \lambda(\sigma^{n-1}) [\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}].
 \end{aligned}$$

Dalla (10) e dalla (11), tenendo conto della (4) si deduce

$$\begin{aligned}
 (12) \quad & \Omega(\Xi, K, x^0, \{R'(\sigma^0)\}, \{C'^{r+1}(\sigma^r)\}) = \\
 & = \Omega(\Xi, K, x^0, \{R(\sigma^0)\}, \{C^{r+1}(\sigma^r)\}).
 \end{aligned}$$

Resta ora da provare che $\Omega(\Xi, K, x^0, \{R(\sigma^0)\}, \{C^{r+1}(\sigma^r)\})$ non dipende da K . Si osservi che se $\mathbf{k}(\Xi)$ è il sostegno di Ξ , noi possiamo associare ad ogni $\sigma^0 \in \mathbf{k}(\Xi)$ l'insieme $R(\sigma^0) \cap \mathcal{C}(|\mathbf{k}(\Xi)|)$, e ad ogni $\sigma^r \in |\mathbf{k}(\Xi)|$, ($r = 0, 1, \dots, n-2$), la $r+1$ -catena $C^{r+1}(\sigma^r)$ già associata allo stesso semplice in quanto appartenente a K . Indicando con $\{R(\sigma^0)\}^*$ e $\{C^{r+1}(\sigma^r)\}^*$, i sistemi di insiemi e di catene associati ai semplici $\mathbf{k}(\Xi)$, così ottenuti, si ha evidentemente

$$\begin{aligned}
 (13) \quad & \Omega(\Xi, K, x^0, \{R(\sigma^0)\}, \{C^{r+1}(\sigma^r)\}) = \\
 & = \Omega(\Xi, \mathbf{k}(\Xi), x^0, \{R(\sigma^0)\}^*, \{C^{r+1}(\sigma^r)\}^*).
 \end{aligned}$$

Ora se Ξ è ciclo di un altro complesso normale K' ed $\{R'(\sigma^0)\}, \{C'^{r+1}(\sigma^r)\}$, sono i sistemi associati ai semplici di K' , potremo scrivere anche

$$\begin{aligned}
 (14) \quad & \Omega(\Xi, K', x^0, \{R'(\sigma^0)\}, \{C'^{r+1}(\sigma^r)\}) = \\
 & = \Omega(\Xi, \mathbf{k}(\Xi), x^0, \{R'(\sigma^0)\}^*, \{C'^{r+1}(\sigma^r)\}^*).
 \end{aligned}$$

Confrontando la (13) e la (14) con la (12) si ottiene

$$\begin{aligned}\Omega(\Xi, K', x'^0, \{R'(\sigma^0)\}, \{C'^{r+1}(\sigma^r)\}) = \\ = \Omega(\Xi, K, x^0, \{R(\sigma^0)\}, \{C'^{r+1}(\sigma^r)\})\end{aligned}$$

che è appunto ciò che si voleva provare.

6. - a) Se $\Xi_1, \dots, \Xi_r$, sono $n-1$ -cicli di un complesso normale K e se è:

$$\Xi = \sum_1^r \mu_i \Xi_i \quad (\mu_i \text{ interi relativi})$$

allora è anche:

$$\Omega(\Xi) = \sum_1^n \mu_i \Omega(\Xi_i).$$

Nelle nostre ipotesi sarà:

$$\Xi_i = \sum_{\sigma^{n-1} \in K} \lambda_i(\sigma^{n-1}) \sigma^{n-1} \quad (\lambda_i(\sigma^{n-1}) \text{ interi relativi, } i = 1, \dots, r).$$

$$\Xi = \sum_{\sigma^{n-1} \in K} \lambda(\sigma^{n-1}) \sigma^{n-1} \quad \text{dove} \quad \lambda(\sigma^{n-1}) = \sum_1^r \mu_i \lambda_i(\sigma^{n-1}).$$

Se ad ogni $\sigma^{n-1} \in K$ associamo un ciclo $n-1$ -dimensionale $\Gamma(\sigma^{n-1})$ nel modo indicato nel n. precedente, avremo:

$$\begin{aligned}\Omega(\Xi) &= \sum_{\sigma^{n-1} \in K} \lambda(\sigma^{n-1}) \omega(|\sigma^{n-1}|, \Gamma(\sigma^{n-1})) = \\ &= \sum_{\sigma^{n-1} \in K} \sum_1^r \mu_i \lambda_i(\sigma^{n-1}) \omega(|\sigma^{n-1}|, \Gamma(\sigma^{n-1})) = \\ &= \sum_1^r \mu_i \sum_{\sigma^{n-1} \in K} \lambda_i(\sigma^{n-1}) \omega(|\sigma^{n-1}|, \Gamma(\sigma^{n-1})) = \\ &= \sum_1^r \mu_i \Omega(\Xi_i).\end{aligned}$$

b) Se Ξ è un $n-1$ -ciclo normale il cui supporto $|\Xi|$ sia un continuo e se $\mathcal{G}(|\Xi|)$ è rinchiudibile in un insieme pluriconvesso R disgiunto da Ξ , allora:

$$\Omega(\Xi) = \omega(|\Xi|, \Xi).$$

In tal caso infatti si può prendere come sistema di in siemi pluriconvessi, $\{R(\sigma^0)\}$, associati agli 0-simplessi di $\mathbf{k}(\Xi)$ e soddisfacenti alle condizioni specificate nel n. 5, quello costituito dall'unico insieme R . Di conseguenza, per le catene $C^{r+1}(\sigma^r)$ associate ai simplessi σ^r di $\mathbf{k}(\Xi)$, ($r=0, \dots, n-2$), si avrà:

$$|C^{r+1}(\sigma^r)| \subset \mathcal{G}^{(n)} - R \quad (r=0, \dots, n-2).$$

Pertanto, essendo

$$\Gamma(\sigma^{n-1}) = \sigma^{n-1} - \sum_{\sigma^{n-2}} [\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}] C^{n-1}(\sigma^{n-2}),$$

risulta anche:

$$|\Gamma(\sigma^{n-1})| \subset \mathcal{G}^{(n)} - R.$$

Poichè $R \supset \mathcal{G}(|\Xi|)$ e $|\Xi|$ è un continuo, $\omega(P, \Gamma(\sigma^{n-1}))$, (per ogni $\sigma^{n-1} \in \mathbf{k}(\Xi)$) non varia al variare di P in $|\Xi|$ e si può scrivere pertanto:

$$\begin{aligned} \Omega(\Xi) &= \sum_{\sigma^{n-1}} \lambda(\sigma^{n-1}) \omega(|\Xi|, \sigma^{n-1} - \sum_{\sigma^{n-2}} [\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}] C^{n-1}(\sigma^{n-2})) = \\ &= \sum \omega(|\Xi|, \sum_{\sigma^{n-1}} \lambda(\sigma^{n-1}) \sigma^{n-1} - \\ &\quad - \sum_{\sigma^{n-1}} \lambda(\sigma^{n-1}) \sum_{\sigma^{n-2}} [\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}] C^{n-1}(\sigma^{n-2})) = \\ &= \omega(|\Xi|, \Xi - \sum_{\sigma^{n-2}} C^{n-1}(\sigma^{n-2}) \sum_{\sigma^{n-1}} \lambda(\sigma^{n-1}) [\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}]) = \\ &= \omega(|\Xi|, \Xi). \end{aligned}$$

b₁) Se per l' $n-1$ -ciclo Ξ è soddisfatta l'ipotesi b) e se inoltre Ξ è omologo a zero ($\Xi \sim 0$) in $\mathcal{G}^{(n)} - \mathcal{G}(|\Xi|)$ allora:

$$\Omega(\Xi) = 0.$$

Infatti l'aver supposto $\Xi \sim 0$ in $\mathcal{G}^{(n)} - \mathcal{G}(|\Xi|)$, porta come conseguenza che nella sommatoria esprimente $\omega(P, \Xi)$, ($P \in |\Xi|$), tutti i v_k siano nulli.

Oss. VI^a - Se $\dot{\sigma}^n$ è il ciclo frontiera di un simpleso *normale* σ^n , allora per σ^n è verificata l'ipotesi b_1) e si ha: $\Omega(\sigma^n) = 0$.

c) Se Ξ è un $n-1$ -ciclo di un complesso normale K , omologo a zero in K , allora: $\Omega(\Xi) = 0$.

In tal caso infatti si ha:

$$\Xi = \dot{V} \quad \text{dove} \quad V = \sum_{\sigma^n \in K} \lambda(\sigma^n) \sigma^n \quad \text{cioè}$$

$$\Xi = \sum_{\sigma^n \in K} \lambda(\sigma^n) \dot{\sigma}^n.$$

Ora i cicli $\dot{\sigma}^n$ appartengono tutti al complesso normale K , quindi per la a) risulta:

$$\Omega(\Xi) = \sum_{\sigma^n \in K} \lambda(\sigma^n) \Omega(\dot{\sigma}^n).$$

Da qui, per l'Oss. VI si trae la conclusione voluta.

d) Se Ξ è un $n-1$ -ciclo di un complesso normale K , ${}^p\Xi$ è un ciclo del complesso pK , che risulta pure normale in quanto, per ogni x , $St(x, {}^pK) \subset St(x, K)$, quindi ha senso considerare $\Omega({}^p\Xi)$. Si dimostra che:

$$\Omega(\Xi) = \Omega({}^p\Xi).$$

Basterà dimostrare la d) per $p=1$. Si indichi con $\mathfrak{D}K$ il complesso di deformazione per la prima suddivisione bari-centrica di K ; $\mathfrak{D}K$ è un complesso normale poichè $St(x, \mathfrak{D}K) = St(x, K)$, inoltre si ha:

$$K \subset \mathfrak{D}K, \quad {}^1K \subset \mathfrak{D}K, \quad \Xi - {}^1\Xi \sim 0 \quad \text{in} \quad \mathfrak{D}K \quad {}^{13}.$$

In base alla a) ed alla c) abbiamo allora:

$$\Omega(\Xi) - \Omega({}^1\Xi) = \Omega(\Xi - {}^1\Xi) = 0,$$

cioè

$$\Omega(\Xi) = \Omega({}^1\Xi)$$

¹³⁾ V. loc. cit. in 2) pag. 428-429.

Quest'ultima proprietà ci permette di estendere la definizione di *grado di $\mathcal{G}$ rispetto ad un $n-1$ -ciclo non normale Ξ di $E-E_0$ ponendo:*

$$\Omega(\Xi) = \Omega({}^p\Xi)$$

dove ${}^p\Xi$ è una suddivisione baricentrica di rango p tale che ${}^p\Xi$ sia normale. E la definizione è legittima in quanto $\Omega({}^p\Xi)$ non dipende da p .

7. - Abbiamo definito il grado della trasformazione $\mathcal{G}$ per un qualunque $n-1$ -ciclo Ξ del complesso singolare totale $S(E-E_0)$. Il grado così definito resta invariato per le successive suddivisioni baricentriche di Ξ , ed è evidente che se $\Xi_1, \dots, \Xi_n$ sono $n-1$ -cicli di $E-E_0$ e $\Xi = \sum_1^n \mu_i \Xi_i$ allora $\Omega(\Xi) = \sum_1^n \mu_i \Omega(\Xi_i)$.

Infatti basta considerare $\Xi_1, \dots, \Xi_n$, come cicli di un sottocomplesso finito K di $S(E-E_0)$. Allora se p è abbastanza grande pK è normale e per la *a*) del n. 6

$$\Omega({}^p\Xi) = \sum_1^n \mu_i \Omega({}^p\Xi_i),$$

cioè:

$$\Omega(\Xi) = \sum_1^n \mu_i \Omega(\Xi_i).$$

In modo analogo si verifica che:

Se Ξ è un $n-1$ -ciclo di $E-E_0$ omologo a zero in $E-E_0$, $\Omega(\Xi) = 0$.

Da qui segue:

Se Ξ_1 e Ξ_2 sono due cicli di $E-E_0$ e $\Xi_1 \sim \Xi_2$ in $E-E_0$ $\Omega(\Xi_1) = \Omega(\Xi_2)$.

8. - Siamo ora in grado di dare un criterio di esistenza di punti uniti per una trasformazione plurivalente $\mathcal{G}$ dei punti di una n -cella E , per cui siano soddisfatte le condizioni I, II, III, IV e V del n. 2.

In tal caso E è supporto di un simplelso topologico X . Se sulla frontiera di E non ci sono punti uniti $\dot{X}$ è un $n-1$ -ciclo di $E-E_0$ e possiamo pertanto valutare $\Omega(X)$. Ora se $\Omega(\dot{X}) \neq 0$ esiste almeno un punto $P \in E$ tale che $P \in \mathcal{G}(P)$.

Infatti se l'insieme E_0 fosse vuoto $\dot{X}$ sarebbe omologo a zero in $E-E_0$ e pertanto sarebbe $\Omega(\dot{X}) = 0$ contro l'ipotesi.

Mediante una semplice applicazione della teoria svolta nei numeri precedenti è possibile valutare il grado topologico $\Omega(\dot{X})$ nel caso che X sia un n -simplelso lineare di $\mathcal{G}^{(n)}$ e che $\mathcal{G}(|\dot{X}|) \subset |X|$.

Precisamente si trova (e per la dimostrazione si veda il lavoro citato in (1) pag. 401):

$$\Omega(\dot{X}) = \pm F_P(\mathcal{G}(P)) \quad P \in E.$$

Quest'ultimo risultato ci consente di stabilire il teorema:

Sia E una n -cella, sostegno di un simplelso topologico X di $\mathcal{G}^{(n)}$, per cui sia possibile porre un omeomorfismo Φ tra lo spazio euclideo n -dimensionale $\Sigma^{(n)}$ ed $\mathcal{G}^{(n)}$, tale che X risulti il trasformato mediante Φ di un simplelso lineare H di $\Sigma^{(n)}$.

Se $\mathcal{G}$ è una trasformazione plurivalente di E , che faccia corrispondere ad ogni punto $P \in E$ un numero finito di punti e che soddisfi alle ipotesi II, IV, e V del n. 2, e se inoltre:

$$\alpha) P. r P \in |\dot{X}| \quad \mathcal{G}(P) \subset E$$

$$\beta) F_P[\mathcal{G}(P)] \neq 0$$

allora esiste in E almeno un punto $P \in \mathcal{G}(P)$ ¹⁴.

Oss. - Se il dominio della trasformazione $\mathcal{G}$ è una n -cella E , supporto di un simplelso topologico X di $\mathcal{G}^{(n)}$, per cui non esista un omeomorfismo Φ tra $\Sigma^{(n)}$ ed $\mathcal{G}^{(n)}$, che muti un simplelso lineare H di $\Sigma^{(n)}$ in X , il teorema sussiste ancora se si sostituisce alla α l'ipotesi che $\mathcal{G}(E) \subset E$

¹⁴) Per la dimostrazione si veda loc. cit. in ¹), pag. 402.

Il precedente teorema ci permette infine di pervenire al seguente risultato:

Se $\mathcal{C}$ è una trasformazione di una n -cella in sè per cui siano soddisfatte le condizioni:

α_1) Per ogni $P \in E$, $\mathcal{C}(P)$ sia costituito da al più due punti.

α_2) Se P_0 è un punto qualunque di E e se τ_0 è un pezzo di $\mathcal{C}(P_0)$, l'insieme $\mathcal{C}(P) \cdot [\tau_0]_\varepsilon$, per $\varepsilon > 0$, sia definitivamente non vuoto al tendere di P a P_0 in E ¹⁵⁾, allora esiste almeno un punto $P \in \mathcal{C}(P)$ ¹⁶⁾.

¹⁵⁾ Cioè per ogni $\varepsilon > 0$ esista un intorno di P_0 $[P_0]_\varepsilon$, tale che, per $P \in [P_0]_\varepsilon \cdot E$, sia $\mathcal{C}(P)[\tau_0]_\varepsilon \neq \emptyset$.

¹⁶⁾ Per la dimostrazione cfr. loc. cit. in ¹⁾ n. 9.