RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

BRUNO PINI

Sul problema di Dirichlet per le equazioni a derivate parziali lineari ellittiche in due variabili

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 26 (1956), p. 177-200

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1956__26__177_0>

SUL PROBLEMA DI DIRICHLET PER LE EQUAZIONI A DERIVATE PARZIALI LINEARI ELLITTICHE IN DUE VARIABILI

Nota (*) *di* BRUNO PINI (*a Cagliari*)

Sia data l'equazione

$$\mathfrak{L}[u] = \sum_{0 \leq i+j \leq 2m} a_{ij}(x, y) \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} = f(x, y)$$

con $\sum_{i+j=2m} a_{ij}\lambda^i = 0$ a radici tutte complesse, e un dominio limitato $\mathfrak{D}$, che per semplicità supponiamo semplicemente connesso; la $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$ sia una curva semplice $\mathfrak{C}$ le cui equazioni parametriche riferite all'arco, una volta fissata l'origine, siano

$$x = x(s) \quad , \quad y = y(s) \quad , \quad 0 \leq s \leq l;$$

s'intende che al crescere di s da 0 ad l la $\mathfrak{C}$ sia percorsa positivamente e, ove occorra, che le $x(s)$, $y(s)$ siano prolungate in modo da costituire due funzioni periodiche di periodo l.

In tutto il seguito avremo occasione di considerare delle funzioni $f(s)$ dell'arco; s'intenderà sempre che queste siano periodiche di periodo l; la notazione $f(s) \in C^{(k)}[C^{(k,\lambda)}$, con $0 < \lambda \leq 1]$ significa che f è dotata di derivata k-sima continua [λ-hölderiana]; analogamente la notazione $f(x, y) \in C^{(k)}[C^{(k,\lambda)}]$ su $\mathfrak{D}$ significa che f coincide su $\mathfrak{D}$ con una funzione dotata di derivate parziali k-sime continue [λ-hölderiane] in tutto $\mathfrak{D}$; se $x(s)$, $y(s) \in C^{(k)}[C^{(k,\lambda)}]$ si dirà che $\mathfrak{D}$ è di classe $[k]$ $[[k, \lambda]]$.

(*) Pervenuta in Redazione il 18 settembre 1956.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Cagliari.

Assegnate m funzioni $f_k(s)$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, il problema ordinario di Dirichlet consiste nella determinazione di una funzione $u(x, y)$ tale che

$$\mathfrak{L}[u] = f(x, y) \quad \text{in} \quad \mathfrak{D} - \mathfrak{C}$$

$$\frac{d^k u}{d\nu^k} = f_k(s) \quad \text{su} \quad \mathfrak{C}, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

ove ν indica la normale a $\mathfrak{C}$ diretta per esempio verso l'interno di $\mathfrak{D}$.

Questo problema è stato trattato da Levi [1]) nelle seguenti ipotesi: $a_{ij}(x, y) \in C^{(i+j+1)}$ in $\mathfrak{D}$; le radici dell'equazione $\sum_{\substack{ij \\ i+j=2m}} a_{ij}\lambda^i = 0$, hanno molteplicità costante; $x(s), y(s) \in C^{(2m+1)}$; $f_k(s) \in C^{(2m-k)}$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$: $f(x, y) \in C^{(0)}$ in $\mathfrak{D}$ e $\in C^{(1)}$ in $\mathfrak{D} - \mathfrak{C}$.

Recentemente Browder ha dedotto da un problema generalizzato di Dirichlet alcuni risultati [2]) circa il problema ordinario nell'ipotesi che esso abbia al più una soluzione; la regolarità imposta ai dati è un po' più forte di quella imposta da Levi, la regolarità imposta ai coefficenti è notevolmente più forte; però non è richiesto che le caratteristiche abbiano molteplicità costante.

Nella presente Nota ci interessiamo alla questione della riduzione delle ipotesi sui dati, senza preoccuparci di ridurre le ipotesi sui coefficienti e su $\mathfrak{C}$.

È da aspettarsi infatti, nel caso dell'unicità della soluzione, che questa esista e sia di classe $C^{(m-1)}$ in $\mathfrak{D}$ se $f_k(s)$ è di classe $C^{(m-k-1)}$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$.

Una ulteriore riduzione delle ipotesi, quella cioè consistente nel supporre che $f_k(s)$ sia di classe $C^{(m-k-2)}$ con

---

1) E. E. LEVI, *I problemi dei valori al contorno per le equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali*, Memorie Soc. It. dei XL, 16 (1909).

2) F. E. BROWDER, *Assumption of boundary values and Green's function in the Dirichlet problem for the general linear elliptic equation*, Proc. of the Nat. Acad. Sci. U.S.A. 39 (1953); cfr. anche F. E. BROWDER, *Strongly elliptic system of differential equations*, Contributions to the Theory of partial differential equations, Princeton-New Jersey (1954).

$f_k^{(m-k-2)}(s)$ assolutamente continua per $k = 0, 1, \dots, m-2$, e $f_{m-1}(s)$ sommabile, dovrebbe essere sufficiente ad assicurare l'esistenza della soluzione (in ipotesi di unicità per la soluzione del problema ordinario) del seguente problema generalizzato, diverso da quello considerato da Browder: detta C_t la curva

$$x = x(s) - ty'(s) \quad , \quad y = y(s) + tx'(s) \quad , \quad 0 \leq s \leq l,$$

per t in un intorno positivo dello zero, la condizione al contorno è

$$\lim_{t \to 0+} \sum_{0}^{m-1}{}_k \int_0^l \left| \left(\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right)_{C_t} - f_k(s) \right| ds = 0.$$

Nel presente lavoro proveremo queste due presunzioni, relative ai problemi ordinario e generalizzato, nel caso più semplice, quello cioè che sia $m = 2$ e che l'equazione $\sum_{i+j=4} a_{ij}\lambda^i = 0$ abbia due radici doppie. In un successivo lavoro tratteremo il caso generale.

Se però facciamo sui dati delle ipotesi un pò più restrittive, precisamente se supponiamo che $f_k(s)$ sia di classe $C^{(m-k-1,\lambda)}$ anzichè di classe $C^{(m-k-1)}$, allora non è difficile provare che esiste la soluzione del problema ordinario di Dirichlet (sempre in ipotesi di unicità) per l'equazione generale d'ordine $2m$. Questa affermazione verrà provata nella seconda parte del presente lavoro.

I. - PROBLEMA DI DIRICHLET PER LE EQUAZIONI DEL QUARTO ORDINE A CARATTERISTICHE DOPPIE

1. Maggiorazioni puntuali e globali della soluzione e delle sue derivate prime.

Il problema

$$(1) \qquad \begin{cases} \Delta\Delta u = 0 \quad \text{in} \quad \mathfrak{D} - \mathfrak{C} \\ u = f_0(s) \quad , \quad \dfrac{du}{d\nu} = f_1(s) \quad \text{su} \quad \mathfrak{C} \end{cases}$$

nell'ipotesi che $\mathfrak{D}$ sia di classe [2], $f_0 \in C^{(1)}$, $f_1 \in C^{(0)}$, può essere ricondotto al problema

$$(1') \qquad \begin{cases} \Delta\Delta u = 0 \quad \text{in} \quad \mathfrak{D} - \mathfrak{C} \\ \dfrac{\partial u}{\partial s_t} = g_1(s) \quad , \quad \dfrac{\partial u}{\partial t} = g_2(s) \quad \text{su} \quad \mathfrak{C} \end{cases}$$

con g_1, $g_2 \in C^{(0)}$ (s_t indica l'arco di $\mathfrak{C}_t$). Seguendo Pleijel [3]) la soluzione di (1'), determinata a meno di una costante additiva, può esser posta nella forma

$$(2) \quad u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathfrak{C}} \left[\left(-\operatorname{arctg} \frac{Y}{X} + \frac{XY}{X^2 + Y^2} \right) m_1(s) + \frac{Y^2}{X^2 + Y^2} m_2(s) \right] ds$$

ove

$$(3) \qquad \begin{aligned} X &= [x - x(s)]x'(s) + [y - y(s)]y'(s) \\ Y &= -[x - x(s)]y'(s) + [y - y(s)]x'(s). \end{aligned}$$

Posto

$$(3') \qquad \begin{aligned} \bar{X} &= [x(\sigma) - ty'(\sigma) - x(s)]x'(\sigma) + [y(\sigma) + tx'(\sigma) - y(s)]y'(\sigma) = \\ &= \bar{X}(\sigma, t; s) \\ \bar{Y} &= -[x(\sigma) - ty'(\sigma) - x(s)]y'(\sigma) + [y(\sigma) + tx'(\sigma) - y(s)]x'(\sigma) = \\ &= \bar{Y}(\sigma, t; s), \end{aligned}$$

dalla (2) si deduce

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \sigma_t} = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int\limits_{\mathfrak{C}} \left[\frac{\bar{Y} Y^2}{(X^2 + Y^2)^2} m_1(s) - \frac{XY\bar{Y}}{(X^2 + Y^2)^2} m_2(s) \right] ds \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int\limits_{\mathfrak{C}} \left[-\frac{\bar{X} Y^2}{(X^2 + Y^2)^2} m_1(s) + \frac{X\bar{X}Y}{(X^2 + Y^2)^2} m^2(s) \right] ds. \end{cases}$$

In tutto il seguito indicheremo con la lettera H, eventualmente con soprasegno e con indici, una costante positiva, che

---

[3]) Å. PLEIJEL, *On Green's functions for elastic plates with clamped, supported and free edges*, Proc. of the Symposium on spectral theory and differential problems, Mat. Dep. Oklahoma Agric. and. Mech. College Stillwater, Oklahoma (1951).

per il nostro scopo non occorre precisare, la quale può avere valore diverso nell'una o nell'altra delle formole in cui figura.

Dalle (4) è facile dedurre la maggiorazione

$$\int_0^l \left(\left| \frac{\partial u}{\partial s_t} \right| + \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| \right)_{\mathfrak{C}_t} ds < H \int_0^l (|g_1| + |g_2|) ds \quad (5)$$

[4]

al variare di t in un intorno positivo dello zero, sia $0 \leq t \leq t_0$.

È anche facile dedurre una formola di maggiorazione puntuale del tipo

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| < \bar{H} \left(\max_{0 \leq s \leq l} |f_0'(s)| + \max_{0 \leq s \leq l} |f_1(s)| \right) \quad (5')$$

[5]

Infatti, assunti $s - \sigma$ e t come infinitesimi, se $X(\sigma, t; s)$ e $Y(\sigma, t; s)$ indicano le (3) quando al posto di x e y si pone $x(\sigma) - ty'(\sigma)$ e $y(\sigma) + tx'(\sigma)$, si ha

$$X(\sigma, t; s) = 0(\sigma - s) = \bar{X}(\sigma, t; s)$$

$$Y(\sigma, t; s) = 0(t) = \bar{Y}(\sigma, t; s)$$

e quindi, tenendo presente che

$$\int_{\sigma-\delta}^{\sigma+\delta} \frac{t ds}{(s-\sigma)^2 + t^2} < \pi,$$

dalle (4) si deduce

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| < H_1 \sum_1^2{}_i \max_{0 \leq s \leq l} |m_i(s)|.$$

D'altra parte per $t \to 0+$ dalle (4) si deduce[6])

$$g(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^l K(s', s) m(s') ds' + m(s)$$

---

[4]) B. PINI, *Una generalizzazione del problema biarmonico fondamentale*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, XXV (1956).

[5]) Cfr. anche C. MIRANDA, *Formole di maggiorazione e teorema di esistenza per le funzioni biarmoniche in due variabili*, Giorn. Mat. Battaglini, 78 (1948-49).

[6]) Cfr. l. c. in [4]).

ove $\boldsymbol{g} \equiv (g_1, g_2)$, $\boldsymbol{m} \equiv (m_1, m_2)$ e $\boldsymbol{K}$ è una matrice nucleare continua. Ne segue che

$$|m_1|, \ |m_2| < H_2 \sum_1^2 {}_i \max_{0 \leq s \leq l} |g_i|$$

da cui la (5').

A rigore il ragionamento fatto assicura la (5') solo se il punto (x, y) varia in una corona, di altezza convenientemente piccola, attorno a $\mathfrak{C}$ e appartenente a $\mathfrak{D}$. Però la validità della (5') si estende a tutto $\mathfrak{D}$ se si osserva che, detto $\mathfrak{D}_t$ il dominio appartenente a $\mathfrak{D}$ e limitato da $\mathfrak{C}_t$, detta $G_0(x, y; \xi, \eta)$ la funzione di Green relativa al problema biarmonico fondamentale, si ha per la formola di Green

$$u(x, y) = \int_{\mathfrak{C}} \sum_{0 \leq i+j \leq 1} {}_{ij} \ \alpha_{0,ij}(x, y; \xi, \eta) \frac{\partial^{i+j} u}{\partial \xi^i \partial \eta^j} ds$$

ove le $\alpha_{0,ij}(x, y; \xi, \eta)$ sono certe funzioni continue e dotate di derivate rispeto a x e y continue al variare di (x, y) in $\mathfrak{D}_t$ e di (ξ, η) su $\mathfrak{C}$.

Consideriamo ora l'equazione

$$\sum_{0 \leq i+j \leq 4} {}_{ij} \ a_{ij}(x, y) \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} = f(x, y) \tag{6}$$

e facciamo sui coefficienti sul termine noto e sulla $\mathfrak{C}$ le ipotesi di Levi. Supponiamo che l'equazione $\sum_{i+j=4} {}_{ij} \ a_{ij} \lambda^i = 0$ abbia caratteristiche doppie. Possiamo riferirci, anzichè alla (6), all'equazione normalizzata

$$\mathfrak{L}[u] = \Delta\Delta u + \sum_{0 \leq i+j \leq 3} {}_{ij} \ a_{ij}(x, y) \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} = f(x, y); \tag{7}$$

e supponiamo che il problema di Dirichlet relativo ad essa abbia una sola soluzione nell'ipotesi che anche i dati abbiano la regolarità richiesta da Levi, cioè che, posto

$$u = f_0(s) \quad , \quad \frac{du}{d\nu} = f_1(s), \tag{8}$$

sia $f_0 \in C^{(4)}$, $f_1 \in C^{(3)}$.

Sussistendo un teorema di alternativa [7]), dall'ipotesi che il problema di Dirichlet ammette una sola soluzione segue l'unicità della soluzione del problema di Dirichlet per l'equazione aggiunta della (7); in particolare segue l'esistenza della funzione di Green [8]).

È intanto immediato dedurre l'unicità della eventuale soluzione del problema generalizzato.

Sia $G(x, y; \xi, \eta; t)$ la funzione di Green relativa al dominio $\mathfrak{D}_t$ e alla (7). Per la formola di Green si ha

$$(9) \qquad u(x, y) = \int_{\mathfrak{C}_t} \sum_{0 \leq i+j \leq 1} \alpha_{ij}(x, y; \xi, \eta, t) \frac{\partial^{i+j} u}{\partial \xi^i \partial \eta^j} ds_t$$

dove le α_{ij} sono certe funzioni lineari nelle derivate seconde e terze di G. Tenendo fisso il punto (x, y) interno a $\mathfrak{D}$ e facendo tendere t a $0+$, poichè le α_{ij} e le loro derivate rispettano a x e y si mantengono limitate, dall'ipotesi che sia

$$\lim_{t \to 0+} \sum_{0}^{1} {}_k \int_0^l \left| \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \right|_{\mathfrak{C}_t} ds = 0$$

segue dalla (9) che $u(x, y) \equiv 0$.

Questo ragionamento si estende ovviamente al caso generale onde è lecito affermare che:

Se in certe ipotesi di regolarità sui dati il problema di Dirichlet ha una sola soluzione, allora il problema generalizzato ha al più una soluzione; quindi anche il problema ordinario nelle minime ipotesi di regolarità sui dati ha al più una soluzione.

Sia ora v la soluzione del problema

$$(1) \qquad \begin{cases} \Delta\Delta v = 0 & \text{in} \quad \mathfrak{D} - \mathfrak{C} \\ v = f_0(s), \ \dfrac{dv}{d\nu} = f_1(s) & \text{su} \quad \mathfrak{C}. \end{cases}$$

Se $f_0 \in C^{(4)}$, $f_1 \in C^{(3)}$, la v riesce almeno di classe $C^{(3)}$ in $\mathfrak{D}$ (ovviamente di classe $C^{(\infty)}$ in $\mathfrak{D} - \mathfrak{C}$). Sia infatti $\bar{v}$ una

[7]) Cfr. l. c. in [1]).

[8]) Cfr. anche l. c. in [2]).

funzione di classe $C^{(4)}$ in $\mathfrak{D}$ e $C^{(\infty)}$ in $\mathfrak{D}-\mathfrak{C}$ tale che

$$\bar{v}=f_0,\ \frac{d\bar{v}}{d\nu}=f_1 \quad \text{su} \quad \mathfrak{C}$$ [9]).

Posto $v=\bar{v}+v^*$ si ha

$$\Delta\Delta v^* = -\Delta\Delta\bar{v} \quad \text{in} \quad \mathfrak{D}-\mathfrak{C}$$

$$v^* = \frac{dv^*}{d\nu} = 0 \quad \text{su} \quad \mathfrak{C}$$

e quindi

$$v^*(x, y) = -\iint_{\mathfrak{D}} G_0(x, y;\ \xi, \eta)\Delta\Delta\bar{v}(\xi, \eta)d\xi d\eta.$$

Per l'ipotesi fatta su v, tenendo presente che ogni derivata terza di G_0 è in modulo maggiorabile con una espressione del tipo $H[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{-\frac{1}{2}}$, si ha che v, al pari di v^*, è almeno di classe $C^{(3)}$ in $\mathfrak{D}$. Ciò posto, essendo u la soluzione del problema (7) — (8), poniamo

$$u = v + w. \tag{10}$$

Di qui segue

$$\begin{cases} \mathfrak{L}[w] = f - \sum\limits_{0\le i+j\le 3} a_{ij}\dfrac{\partial^{i+j}v}{\partial x^i\partial y^j} \quad \text{in} \quad \mathfrak{D}-\mathfrak{C} \\ w = \dfrac{dw}{d\nu} = 0 \quad \text{su} \quad \mathfrak{C}; \end{cases} \tag{11}$$

il secondo membro dell'equazione è di classe $C^{(0)}$ in $\mathfrak{D}$ e di classe $C^{(1)}$ in $\mathfrak{D}-\mathfrak{C}$. Perciò la funzione w è fornita da

$$w(x, y) = \iint_{\mathfrak{D}} G(x, y;\ \xi, \eta)\left[f(\xi, \eta) - \sum_{0\le i+j\le 3} a_{ij}(\xi, \eta)\frac{\partial^{i+j}v}{\partial\xi^i\partial\eta^j}\right]d\xi d\eta. \tag{12}$$

---

[9]) Una funzione siffatta si può sempre costruire; cfr. per esempio C. MIRANDA, *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*, Springer, Berlin (1955), pp. 36-39.

Di qui è facile maggiorare i moduli di w, $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$ mediante $|f_0|$, $|f_0'|$, $|f_1|$, $|f|$, puntualmente o globalmente.

Intanto si ha

$$\text{(13)} \qquad \int_0^l \left(|v| + \left|\frac{\partial v}{\partial t}\right|\right)_{\mathfrak{C}_t} ds < H \int_0^l (|f_0| + |f_0'| + |f_1|) ds$$

$$\text{(13')} \qquad |v| + \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial v}{\partial y}\right| < \bar{H}(\max_{0\leq s\leq l}|f_0| + \max_{0\leq s\leq l}|f_0'| + \max_{0\leq s\leq l}|f_1|).$$

Poniamo ora

$$\text{(14)} \qquad w_0 = \iint_{\mathfrak{D}} G f d\xi d\eta \quad , \quad w_{ij} = \iint_{\mathfrak{D}} G a_{ij} \frac{\partial^{i+j} v}{\partial \xi^i \partial \eta^j} d\xi d\eta .$$

Poichè la G e le sue derivate prime sono limitate, si ha immediatamente

$$\text{(15)} \qquad \int_0^l \left(|w_0| + \left|\frac{\partial w_0}{\partial t}\right|\right)_{\mathfrak{C}_t} ds < H_0 \iint_{\mathfrak{D}} |f| d\xi d\eta$$

$$\text{(15')} \qquad |w_0| + \left|\frac{\partial w_0}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial w_0}{\partial y}\right| < \bar{H}_0 \max_{\mathfrak{D}} |f|.$$

Scriviamo ora

$$w_{ij} = \left(\iint_{\mathfrak{D}-\mathfrak{D}_{t_0}} + \iint_{\mathfrak{D}_{t_0}} \right) G a_{ij} \frac{\partial^{i+j} v}{\partial \xi^i \partial \eta^j} d\xi d\eta .$$

Dalla espressione di v fornita dalla formola di Green relativa a $\mathfrak{D}$, al variare di (ξ, η) in $\mathfrak{D}_{t_0}$ si ha

$$|v|, \left|\frac{\partial v}{\partial \xi}\right|, \left|\frac{\partial v}{\partial \eta}\right| < H \int_0^l \left(|v|_{\mathfrak{C}} + |v'(x(s), y(s))| + \left|\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{\mathfrak{C}}\right) ds ;$$

d'altra parte

$$\iint_{\mathfrak{D}-\mathfrak{D}_{t_0}} G a_{ij} \frac{\partial^{i+j} v}{\partial \xi^i \partial \eta^j} d\xi d\eta = \int_0^{t_0} d\tau \int_0^l \left(G a_{ij} \frac{\partial^{i+j} v}{\partial \xi^i \partial \eta^j}\right)_{\mathfrak{C}_\tau} ds_\tau$$

ove $ds_\tau = \{1 - [x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)]\tau\}ds$, onde per quanto è stato premesso sulle funzioni biarmoniche, per $i + j = 0$, 1 si ha

$$(16) \qquad \int_0^l \left(|w_{ij}| + \left| \frac{\partial w_{ij}}{\partial t} \right| \right)_{\mathfrak{C}_t} ds <$$

$$< H_{ij} \int_0^l \left(|v|_{\mathfrak{C}} + |v'(x(s), y(s))| + \left| \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{\mathfrak{C}} \right) ds$$

$$(16') \qquad |w_{ij}| + \left| \frac{\partial w_{ij}}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial w_{ij}}{\partial y} \right| <$$

$$< \overline{H}_{ij} \left(\max_{0 \leq s \leq l} |v(x(s), y(s))| + \max_{0 \leq s \leq l} \left| \frac{\partial}{\partial x} v(x(s), y(s)) \right| + \right.$$

$$\left. + \max_{0 \leq s \leq l} \left| \frac{\partial}{\partial y} v(x(s), y(s)) \right| \right).$$

Indichiamo ora con $D^{(k)}$ una derivazione k-pla rispetto alle variabili ξ ed η. Tenendo presente che G, $\partial G/\partial \xi$ e $\partial G/\partial \eta$ si annullano su $\mathfrak{C}$, si ha

$$(17) \qquad \iint_{\mathfrak{D}} GaD^{(2)}v\,d\xi d\eta = - \iint_{\mathfrak{D}} D^{(1)}(Ga)D^{(1)}v\,d\xi d\eta$$

ove indichiamo con a uno qualsiasi dei coefficienti a_{ij} con $i + j = 2$:

$$(18) \qquad \iint_{\mathfrak{D}} GaD^{(3)}v\,d\xi d\eta = \iint_{\mathfrak{D}} D^{(2)}(Ga)D^{(1)}v\,d\xi d\eta$$

ove a indica uno dei coefficienti a_{ij} con $i + j = 3$.

Ora la funzione G ha le derivate seconde in modulo maggiorabili con una quantità del tipo $H \log 2\delta/\rho$ essendo δ il diametro di $\mathfrak{D}$ e $\rho = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{1/2}$ e ha le derivate terze in modulo maggiorabili con una quantità del tipo H/ρ.

Dalle (17) e (18), tenendo presente quanto si è detto sulle funzioni biarmoniche, si ha perciò subito che le (16) e (16') sono valide anche per $i + j = 2$, 3.

Concludendo:

Nelle ipotesi di Levi sui coefficienti e termine noto di (7), *sui dati al contorno e su* $\mathfrak{C}$, *se il problema di Dirichlet ha una sola soluzione, per questa valgono le maggiorazioni*

$$\text{(19)} \qquad \int_0^l \left(|u| + \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|\right)_{\mathfrak{C}_t} ds < H\left[\int_0^l (|f_0| + |f_0'| + |f_1|)ds + \iint_{\mathfrak{D}} |f|\,dxdy\right]$$

$$\text{(19')} \qquad |u| + \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| <$$

$$< H(\max_{0\le s\le l}|f_0| + \max_{0\le s\le l}|f_0'| + \max_{0\le s\le l}|f_1| + \max_{\mathfrak{D}}|f|).$$

2. Problema ordinario di Dirichlet.

Proviamo che:

Nelle ipotesi di Levi sui coefficienti e termine noto di (7) *e su* $\mathfrak{C}$, *il problema di Dirichlet ha una soluzione (supposta unica) di classe* $C^{(1)}$ *in* $\mathfrak{D}$ *nell'ipotesi che sia* $f_0 \in C^{(1)}$, $f_1 \in C^{(0)}$.

È intanto lecito limitarsi all'equazione omogenea poichè

$$\iint_{\mathfrak{D}} G(x, y;\ \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

è una soluzione di (7) almeno di classe $C^{(3)}$ in $\mathfrak{D}$ nulla insieme alla sua derivata normale su $\mathfrak{C}$.

Supponiamo per comodità che sia $f_0(0) = 0$; questa ipotesi non costituisce alcuna restrizione: basta trasformare il problema (7) — (8) in quello che si ottiene ponendo $u = v - u_0$ ove u_0 è il valore assegnato ad u nel punto $(x(0), y(0))$.

Sia $\{f_{0n}(s)\}$ una successione di funzioni di classe $C^{(4)}$ nulle per $s = 0$, ed $\{f_{1n}(s)\}$ una successione di funzioni di classe $C^{(3)}$ tali che

$$\text{(20)} \qquad \lim_{n\to\infty} (\max_{0\le s\le l}|f_{0n}' - f_0'| + \max_{0\le s\le l}|f_{1n} - f_1|) = 0.$$

Sia u_n la soluzione del problema

$$\mathfrak{L}[u_n] = 0 \quad \text{in} \quad \mathfrak{D} - \mathfrak{C}$$

$$u_n = f_{0n} \quad , \quad \frac{du_n}{d\nu} = f_{1n} \quad \text{su} \quad \mathfrak{C}$$

e sia v_n la funzione biarmonica in $\mathfrak{D} - \mathfrak{C}$ tale che $v_n = f_{0n}$, $dv_n/d\nu = f_{1n}$ su $\mathfrak{C}$.

Allora, posto $u_n = v_n + w_n$, si ha

$$(21) \quad w_n(x, y) = -\iint_{\mathfrak{D}} G(x, y\,;\, \xi, \eta) \sum_{\substack{ij \\ 0 \leq i+j \leq 3}} a_{ij}(\xi, \eta) \frac{\partial^{i+j} v_n}{\partial \xi^i \partial \eta^j} d\xi d\eta =$$

$$= -\sum_{\substack{ij \\ 0 \leq i+j \leq 1}} \iint_{\mathfrak{D}} G a_{ij} \frac{\partial^{i+j} v_n}{\partial \xi^i \partial \eta^j} d\xi d\eta + \Sigma \iint_{\mathfrak{D}} D^{(1)}(Ga) D^{(1)} v_n d\xi d\eta -$$

$$- \Sigma \iint_{\mathfrak{D}} D^{(2)}(Ga) D^{(1)} v_n d\xi d\eta$$

ove le due ultime somme sono ciò che diventano rispettivamente con una e con due integrazioni per parti i termini

$$-\iint_{\mathfrak{D}} G \,\Sigma_{ij}\, a_{ij} \frac{\partial^{i+j} v_n}{\partial \xi^i \partial \eta^j} d\xi d\eta$$

per $i + j = 2$ e $i + j = 3$. Ora $\{v_n\}$ converge uniformemente in $\mathfrak{D}$ a una funzione $v \in C^{(1)}$ in $\mathfrak{D}$, la quale in $\mathfrak{D} - \mathfrak{C}$ è biarmonica e soddisfa le condizioni $v = f_0$, $dv/d\nu = f_1$ su $\mathfrak{C}$.

Dalla (21) in base alla (20) e alla formola di maggiorazione (19′) si deduce che $\{w_n\}$ converge uniformemente a una funzione $w \in C^{(1)}$ in $\mathfrak{D}$ data da

$$w(x, y) = -\sum_{\substack{ij \\ 0 \leq i+j \leq 1}} \iint_{\mathfrak{D}} G a_{ij} \frac{\partial^{i+j} v}{\partial \xi^i \partial \eta^j} d\xi d\eta + \Sigma \iint_{\mathfrak{D}} D^{(1)}(Ga) D^{(1)} v d\xi d\eta -$$

$$- \Sigma \iint_{\mathfrak{D}} D^{(2)}(Ga) D^{(1)} v d\xi d\eta\,.$$

D'altra parte per la formola di Green

$$(22) \qquad u_n(x, y) = \int_{\mathcal{C}} [\alpha(x, y; \xi, \eta) f_{0n}(s) + \beta(x, y; \xi, \eta) f'_{0n}(s) + \\ + \gamma(x, y; \xi, \eta) f_{1n}(s)] ds$$

si ha che in ogni insieme chiuso appartenente a $\mathfrak{D} - \mathcal{C}$ la $\{ u_n \}$ converge a

$$u(x, y) = \int_{\mathcal{C}} (\alpha f_0 + \beta f_0' + \gamma f_1) ds$$

soluzione di $\mathfrak{L}[u] = 0$. Inoltre w è nulla insieme alla sua derivata normale su $\mathcal{C}$, al pari di ogni w_n. Resta così provato l'asserto.

Dal ragionamento ora fatto segue anche che:

La formola di maggiorazione (19′) *sussiste per la soluzione del problema di Dirichlet relativo ai valori al contorno* $f_0(s)$ *ed* $f_1(s)$ *nella sola ipotesi che sia* $f_0 \in C^{(1)}$, $f_1 \in C^{(0)}$.

3. Problema generalizzato di Dirichlet.

Proviamo che:

Nelle ipotesi di Levi sui coefficienti e termine noto di (7) *e su* $\mathcal{C}$, *se il problema ordinario ha una sola soluzione allora anche il problema generalizzato corrispondente alla condizione al contorno*

$$(23) \qquad \lim_{t \to 0+} \int_0^l \left(| (u)_{\mathcal{C}_t} - f_0(s) | + \left| \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{\mathcal{C}_t} - f_1(s) \right| \right) ds = 0,$$

ove f_0 *è assolutamente continua e nulla per* $s = 0$ *ed* f_1 *è sommabile, ha una sola soluzione.*

Siano $\{f_{0n}(s)\}$ ed $\{f_{1n}(s)\}$ due successioni di funzioni rispettivamente di classe $C^{(4)}$ e $C^{(3)}$, con $f_{0n}(0) = 0$, tali che

$$(24) \qquad \lim_{n \to \infty} \int_0^l (| f'_{0n}(s) - f_0'(s) | + | f_{1n}(s) - f_1(s) |) ds = 0.$$

Se u_n è la soluzione del problema

$$\mathfrak{L}[u_n] = 0 \quad \text{in} \quad \mathfrak{D} - \mathfrak{C}$$

$$u_n = f_{0n} \quad , \quad \frac{du_n}{d\nu} = f_{1n} \quad \text{su} \quad \mathfrak{C}$$

per le (22) e (24) si ha che $\{u_n\}$ converge uniformemente a una soluzione u di $\mathfrak{L}[u] = 0$ in ogni insieme chiuso contenuto in $\mathfrak{D} - \mathfrak{C}$. La u verifica la condizione (23). Infatti si ha

$$\int_0^l \left(|(u)_{\mathfrak{C}_t} - f_0| + \left| \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{\mathfrak{C}_t} - f_1 \right| \right) ds \leq \tag{25}$$

$$\leq \int_0^l \left(|u - u_n|_{\mathfrak{C}_t} + \left| \frac{\partial(u - u_n)}{\partial t} \right|_{\mathfrak{C}_t} \right) ds +$$

$$+ \int_0^l \left(|(u_n)_{\mathfrak{C}_t} - f_{0n}| + \left| \left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)_{\mathfrak{C}_t} - f_{1n} \right| \right) ds +$$

$$+ \int_0^l (|f_{0n} - f_0| + |f_{1n} - f_1|) ds.$$

Il terzo integrale a secondo membro tende a zero per $n \to \infty$; per ogni fissato n il secondo integrale tende a zero per $t \to 0+$; per la formula di maggiorazione (19) si ha

$$\int_0^l \left(|u_m - u_n|_{\mathfrak{C}_t} + \left| \frac{\partial(u_m - u_n)}{\partial t} \right|_{\mathfrak{C}_t} \right) ds < H \int_0^l (|f'_{0m} - f'_{0n}| + |f_{1m} - f_{1n}|) ds$$

onde, passando al limite per $m \to \infty$, si ha che il primo integrale a secondo membro di (25) tende a zero per $n \to \infty$ uniformemente rispetto a t. Di qui l'asserto [10].

---

[10]) Il ragionamento fatto è del tutto analogo a quello corrispondente svolto nel lavoro citato in [4]). Vogliamo però esplicitamente rilevare che in tale lavoro i ragionamenti sono alquanto più complessi perchè la dimostrazione dell'esistenza della soluzione del problema generalizzato

Si ha inoltre che:

La formola di maggiorazione (19) *sussiste anche se* $f_0(s)$ *ed* $f_1(s)$, *anzichè soddisfare le ipotesi di Levi, sono rispettivamente assolutamente continua e sommabile.*

II. - PROBLEMA ORDINARIO DI DIRICHLET PER L'EQUAZIONE D'ORDINE $2m$.

I ragionamenti fatti al n. **2** si lasciano estendere al caso generale semprechè le maggiorazioni indicate nel n. **1** si siano preventivamente estese alla soluzione del problema di Dirichlet relativo all'equazione che si ottiene dalla data prendendo solo i termini contenenti le derivate d'ordine più elevato e considerando i coefficienti come costanti. Di tali maggiorazioni ci occuperemo in altro luogo.

È invece facile stabilire l'esistenza della soluzione del problema di Dirichlet se i dati si suppongono un po' più regolari di quanto non sia stato supposto nel n. **2.**

Consideriamo l'equazione

$$\mathfrak{L}[u] = \sum_{0 \leq i+j \leq 2m} a_{ij}(x, y) \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} = f(x, y). \tag{26}$$

Come si è detto nell'introduzione, Browder ha considerato un problema generalizzato di Dirichlet e ne ha dedotto alcuni risultati per il problema ordinario. Sia $\mathfrak{D}$ un dominio limitato, $f \in C^{(1)}$ in $\mathfrak{D} - \mathfrak{F}\mathfrak{D}$, $f \in L^{(2)}$ su $\mathfrak{D}$, $a_{ij} \in C^{(2m+i+j+4)}$ in un dominio $\mathfrak{D}_1 \supset \mathfrak{D}$.

Assegnata una funzione $g \in C^{(m)}$ su $\mathfrak{D} - \mathfrak{F}\mathfrak{D}$ dotata di derivate d'ordine m di classe $L^{(2)}$ su $\mathfrak{D}$, il problema di Dirichlet considerato da Browder consiste nel determinare una

---

è fatta in modo che, una volta stabilite comunque le opportune maggiorazioni globali della soluzione e della sua derivata normale, si può prescindere, con qualche ritocco, dalla conoscenza dalla soluzione del problema ordinario. Qui invece ci si serve costantemente della soluzione del problema ordinario e quindi non v'è bisogno di stabilire un teorema di completezza analogo di quello contenuto nella Nota citata in [4]) e si può semplificare il teorema di convergenza.

funzione u tale che sia $u \in C^{(2m)}$ in $\mathfrak{D} - \mathfrak{F}\mathfrak{D}$, $\mathfrak{L}[u] = f$ in $\mathfrak{D} - \mathfrak{F}\mathfrak{D}$, mentre $u - g$ si annulli con tutte le sue derivate d'ordine $< m$ su $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$ in senso variazionale. Se per $g \equiv 0$ il problema ha la sola soluzione nulla, allora v'è una ben determinata soluzione per ogni funzione g avente la regolarità specificata. Se poi la $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$ è localmente connessa e priva di punti isolati ed f è limitata in $\mathfrak{D}$ (di classe $C^{(1)}$ in $\mathfrak{D} - \mathfrak{F}\mathfrak{D}$) e $g \in C^{(2m+1)}$ su $\mathfrak{D}$, allora la soluzione u del problema generalizzato (supposta unica) è tale che $u - g$ e le sue derivate d'ordine $< m$ tendono a zero, quando il punto argomento tende alla $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$, in senso ordinario.

Questo risultato è conseguito indipendentemente dall'ipotesi che le radici dell'equazione $\sum_{\substack{ij \\ i+j=2m}} a_{ij}\lambda^i = 0$ abbiano molteplicità costante.

Noi ci riferiamo all'equazione omogenea, il che non è restrittivo; faremo sui coefficienti a_{ij} le ipotesi di Browder e supporremo che $\mathfrak{D}$ sia un dominio come quello considerato nella prima parte della presente Nota, ma di classe $[2m+2]$ anzichè $[2m+1]$. Ammetteremo che il problema di Dirichlet abbia una sola soluzione quando i dati hanno la regolarità richiesta da Browder e mostreremo che ciò avviene anche nella sola ipotesi che sia $g \in C^{(m-1,\lambda)}$.

4. Maggiorazioni della soluzione e delle sue derivate d'ordine $< m$.

Assegnato un dominio T, che per semplicità supponiamo semplicemente connesso, consideriamo la funzione

$$(27) \qquad I_\mu(x, y;\, v) = \frac{d^\mu}{c_\mu} \int_{\mathfrak{F}T} \frac{v(s)ds}{\rho^{\mu+1}}$$

ove μ è un numero > 0, $c_\mu = \sqrt{\pi}\,\Gamma(\mu/2)[\Gamma((\mu+1)/2)]^{-1}$, ρ indica la distanza del punto (x, y) dal punto corrente su $\mathfrak{F}T$, e d la distanza di (x, y) da $\mathfrak{F}T$.

Se T è di classe $[1+h][[1+h, \lambda]]$, se $v \in C^{(h)}[C^{(h,\lambda)}]$ ed è $\mu > h \geq 0[\mu - \lambda > h \geq 0]$ allora la funzione eguale a

I_μ in $T - \mathfrak{F}T$ e a v su $\mathfrak{F}T$ è di classe $C^{(h)}[C^{(h,\lambda)}]$ in un intorno di $\mathfrak{F}T$ [11]).

Siano $x = x(s)$, $y = y(s)$, $0 \leq s \leq 1$, le equazioni parametriche di $\mathfrak{F}T$ riferite all'arco con origine fissata una volta tanto. Riferiamoci all'insieme

$$x = x(\sigma) - ty'(\sigma)\ , \quad y = y(\sigma) + tx'(\sigma)\ , \quad 0 \leq \sigma \leq l\ , \quad 0 \leq t \leq t_0,$$

con t_0 abbastanza piccolo, che indicheremo con $T - T_0$.

La (27) si scrive

$$I_\mu(\sigma, t;\ v) = \frac{t^\mu}{c_\mu} \int_0^l \frac{v(s)ds}{[\rho(\sigma, t;\ s)]^{\mu+1}} \tag{28}$$

ove

$$\rho^2(\sigma, t;\ s) = [x(\sigma) - ty'(\sigma) - x(s)]^2 + [y(\sigma) + tx'(\sigma) - y(s)]^2.$$

Posto $\omega = \sigma - s$, esistono due costanti positive m ed M tali che

$$m(\omega^2 + t^2) < \rho^2(\sigma, t;\ s) < M(\omega^2 + t^2)\ , \quad 0 \leq s,\ \sigma \leq l,\ 0 \leq t \leq t_0. \tag{29}$$

Fissato poi un $\delta > 0$, intendendo che $x(s)$ e $y(s)$ siano prolungate per periodicità, si ha

$$\int_{\sigma-\delta}^{\sigma+\delta} \frac{ds}{[\rho(\sigma, t\ \ s)]^{\mu+1}} \backsim \int_{-\delta}^{\delta} \frac{d\omega}{(\omega^2 + t^2)^{\frac{\mu+1}{2}}} \backsim \frac{1}{t^\mu}. \tag{30}$$

Segue subito dalla (28) che se $v \in C^{(0)}$ è

$$|\, I_\mu \,| < H \max_{0 \leq s \leq l} |\, v \,|. \tag{31}$$

Supponiamo ora $v \in C^{(0,\lambda)}$, $\mu - \lambda > 0$, T di classe $[2]$; si ha

$$\frac{\partial I_\mu(\sigma, t;\ v)}{\partial t} = \mu \frac{t^{\mu-1}}{c_\mu} \int_0^l \frac{v(s) - v(\sigma)}{[\rho(\sigma, t;\ s)]^{\mu+1}} ds - \tag{32}$$

$$- \frac{\mu + 1}{2} \frac{t^\mu}{c_\mu} \int_0^l \frac{v(s) - v(\sigma)}{[\rho(\sigma, t;\ s)]^{\mu+3}} \frac{\partial \rho^2}{\partial t} ds + v(\sigma) \frac{\partial I_\mu(\sigma, t;\ 1)}{\partial t}$$

11) Cfr. l. c. in 9).

$$(33)\qquad \frac{\partial I_\mu(\sigma, t; v)}{\partial \sigma} = -\frac{\mu+1}{2}\frac{t^\mu}{c_\mu}\int_0^l \frac{v(s)-v(\sigma)}{[\rho(\sigma, t; s)]^{\mu+3}}\frac{\partial \rho^2}{\partial \sigma}ds + v(\sigma)\frac{\partial I_\mu(\sigma, t; 1)}{\partial \sigma}.$$

Intanto $I_\mu(\sigma, t; 1)$ è di classe $C^{(1)}$ in $T - T_0$. Sia

$$|v(s) - v(\sigma)| \leq |v|_\lambda |s - \sigma|^\lambda \qquad (0 < \lambda \leq 1)$$

ove $|v|_\lambda$ è il coefficiente di Hölder della $v(s)$. Da ciò, e tenendo presente che

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \rho^2}{\partial \sigma} = 0(\omega) \quad , \quad \frac{1}{2}\frac{\partial \rho^2}{\partial t} = 0(t),$$

si ha subito che il primo e secondo termine a secondo membro di (32) e il primo termine a secondo membro di (33) si possono in modulo maggiorare con

$$H|v|_\lambda \int_{-\delta}^{\delta} \frac{|\omega|^\lambda t^{\mu-1}}{(\omega^2+t^2)^{\frac{\mu+1}{2}}}d\omega < \frac{2H|v|_\lambda}{t^{1-\lambda}}\int_0^{+\infty}\frac{x^\lambda dx}{(1+x^2)^{\frac{\mu+1}{2}}}$$

ove l'ultimo integrale è convergente perchè $\mu > \lambda$. Pertanto in $T - T_0$ si ha

$$(34)\qquad \left|\frac{\partial I_\mu}{\partial \sigma}\right| \quad , \quad \left|\frac{\partial I_\mu}{\partial t}\right| < H_1 \frac{1}{t^{1-\lambda}}|v|_\lambda + H_2 \max_{0\leq s\leq l}|v|.$$

In generale sia T di classe $[1+h]$, $v \in C^{(h)}$, $v(0) = v'(0) = \ldots = v^{(h-1)}(0) = 0$, $\mu > h \geq 0$. Si ha

$$(35)\qquad \frac{\partial^{i+j} I_\mu(\sigma, t; v)}{\partial \sigma^i \partial t^j} = \sum_{0}^{j}{}_k \binom{j}{k}\mu(\mu-1)\ldots$$

$$\ldots(\mu-k+1)\frac{t^{\mu-k}}{c_\mu}\int_{\mathfrak{F}T}\left[v(s) - \sum_0^{h-1}{}_r \frac{(s-\sigma)^r}{r!}v^{(r)}(\sigma)\right]\frac{\partial^{i+j-k}}{\partial \sigma^i \partial t^{j-k}}\left(\frac{1}{\rho^{\mu+1}}\right)ds +$$

$$+\sum_0^{h-1}{}_r \frac{1}{r!}v^{(r)}(\sigma)\sum_0^{r}{}_q \binom{r}{q}(-\sigma)^{r-q}\frac{\partial^{i+j}}{\partial \sigma^i \partial t^j}I_\mu(\sigma, t; s^q).$$

$I_\mu(\sigma, t; s^q)$ è di classe $C^{(h)}$ in $T - T_0$; $v(s) - \sum_0^{h-1}{}_r v^{(r)}(\sigma) \cdot (s - \sigma)^r/r! = v^{(h)}(\bar{s})(s-\sigma)^h/h!$ essendo $\bar{s}$ un opportuno numero compreso tra s e σ, e

$$\frac{\partial^{i+j-k}}{\partial\sigma^i\partial t^{j-k}}\left(\frac{1}{\rho^{\mu+1}}\right)\infty\frac{1}{\rho^{\mu+1+i+j-k}};$$

quindi, tenendo presente la (30) e osservando che $|v^{(r)}|\leq$ $\leq\max\limits_{0\leq s\leq l}|v^{(h)}|$ per $r\leq h$, si ha

$$\left|\frac{\partial^{i+j}I_\mu(\sigma,t;v)}{\partial\sigma^i\partial t^j}\right|<H\max_{0\leq s\leq l}|v^{(h)}(s)|\quad\text{per}\quad i+j\leq h. \tag{36}$$

Sia infine T di classe $[2+h]$ e $v\in C^{(h,\lambda)}$ con $v(0)=$ $=v'(0)=...=v^{(h-1)}=0$ e $\mu-\lambda>h\geq 0$. Scriviamo la (35) ponendo h al posto di $h-1$. È

$$v(s)-\sum_{0}^{h}{}_r\frac{(s-\sigma)^r}{r!}v^{(r)}(\sigma)=\frac{(s-\sigma)^h}{h!}[v^{(h)}(\bar{s})-v^{(h)}(\sigma)]$$

essendo $\bar{s}$ un opportuno valore compreso tra s e σ; quindi

$$\left|v(s)-\sum_{0}^{h}{}_r\frac{(s-\sigma)^r}{r!}v^{(r)}(\sigma)\right|\leq\frac{|s-\sigma|^{h+\lambda}}{h!}|v^{(h)}|_\lambda.$$

D'altra parte $I_\mu(\sigma,t;s^q)$ è attualmente di classe $C^{(h+1)}$; quindi per $i+j=h+1$ si ha

$$\left|\frac{\partial^{i+j}I_\mu(\sigma,t;v)}{\partial\sigma^i\partial t^j}\right|<H_1\frac{1}{t^{1-\lambda}}|v^{(h)}|_\lambda+H_2\max|v^{(h)}|. \tag{37}$$

Riassumendo:

Se T è di classe $[1+h]$, $v\in C^{(h)}$, $v(0)=v'(0)=...=$ $=v^{(h-1)}=0$, $\mu>h\geq 0$, e I^μ è la funzione (28), allora in $T-T_0$ vale la (36); se T è di classe $[2+h]$, $v\in C^{(h,\lambda)}$, $v(0)=v'(0)=...=v^{(h-1)}(0)=0$, $\mu-\lambda>h\geq 0$, allora in $T-T_0$ valgono la (36) e la (37).

Ricordiamo ora che se T è di classe $[1+h][[1+h,\lambda]]$, se $u_\nu(s)\in C^{(h)}[C^{(h,\lambda)}]$ ed è $\mu>h\geq 0$ $[\mu-\lambda>h\geq 0]$, la funzione

$$u(x,y)=\frac{(-d)^p}{p!}\frac{I_\mu(x,y;u_p)}{I_{\mu+p}(x,y;1)} \tag{38}$$

è tale che: $u \in C^{(\infty)}$ in $T - \mathfrak{F} T$, $u \in C^{(p+h)}[C^{(p+h,\lambda)}]$ in T; $u = du/d\nu = \ldots = d^{p-1}u/d\nu^{p-1} = 0$, $d^p u/d\nu^p = u_p$ su $\mathfrak{F}T$ [12]).

Da ciò e dal precedente risultato si ha che:

Se T è di classe $[2+p+h]$, $u_p \in C^{(h,\lambda)}$, $u_p(0) = u'_p(0) = = \ldots = u_p^{(h-1)}(0) = 0$, $\mu - \lambda > h+1$ $(h \geq 0)$, si ha in T

$$\left| \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} \right| < H \max | u_p^{(h)} | \quad , \quad i + j \leq p + h \tag{39}$$

$$\left| \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} \right| < \bar{H} \left[\frac{1}{t^{1-\lambda}} | u_p^{(h)} |_\lambda + \max_{0 \leq s \leq l} | u_p^{(h)} | \right], \; i+j = p+h+1. \tag{40}$$

È evidente che basta stabilire queste maggiorazioni per (x, y) variabile nella corona $T - T_0$ poichè è banale che esse sussistono in T_0. Ora in $T - T_0$ si può scrivere

$$I_{\mu+p}(\sigma, t;\, 1) u = \frac{(-1)^p}{p\,!} t^p I_\mu(\sigma, t;\, u_p);$$

poichè $\mu + p > p + h + 1$ la $I_{\mu+p}(\sigma, t;\, 1)$ è di classe $C^{(p+h+1)}$ in $T - T_0$; allora, per il risultato precedente, ammessa la (39) per $i + j < p + h$ essa segue anche per $i + j = p + h$.

La (40) segue poi con ragionamenti analoghi a quelli fatti prima.

Infine sia T di classe $[m, \lambda]$ e siano assegnate m funzioni $f_k(s)$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, $f_k \in C^{(m-k-1,\, \lambda)}$. Esiste allora una funzione $u(x, y)$ di classe $C^{(\infty)}$ in $T - \mathfrak{F}T$, di classe $C^{(m-1,\, \lambda)}$ in T, tale che $d^k u/d\nu^k = f_k$ su $\mathfrak{F}T$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$. Tale funzione è data da

$$u = \sum_{i=0}^{m-1} U_i \tag{41}$$

ove U_i è la funzione analoga alla (38) tale che

$$U_i = \frac{dU_i}{d\nu} = \ldots = \frac{d^{i-1}U_i}{d\nu^{i-1}} = 0 \,, \quad \frac{d^i U_i}{d\nu^i} = f_i - \sum_{h=0}^{i-1} \frac{d^i U_h}{d\nu^i} \text{ [13])}.$$

---

12) Cfr. l. c. in 9).

13) Cfr. l. c. in 9).

In base a ciò e ai precedenti risultati possiamo affermare che:

Dato un dominio $\mathfrak{D}$ *di classe* $[2m+2]$ *ed* m *funzioni* $f_k(s)$, $k=0,1,\ldots,m-1$, *tali che* $f_k \in C^{(m-k-1,\lambda)}$ *e* $f_k(0)=f'_k(0)=\ldots=f_k^{(m-k-2)}(0)=0$ *per* $0\leq k\leq m-2$, *esiste una funzione* u^* *tale che* $u^*\in C^{(\infty)}$ *in* $\mathfrak{D}-\mathfrak{F}\mathfrak{D}$, $u^*\in C^{(m-1,\lambda)}$ *in* $\mathfrak{D}$, $d^ku^*/d\nu^k=f_k$ *su* $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$, $k=0,1,\ldots,m-1$, *e per la quale sussistono in* $\mathfrak{D}$ *le maggiorazioni*

$$\left|\frac{\partial^{i+j}u^*}{\partial x^i\partial y^j}\right| < H\sum_{0}^{m-1}{}_k \max_{0\leq s\leq l}\left|f_k^{(m-k-1)}\right| \quad , \quad i+j\leq m-1 \tag{42}$$

$$\left|\frac{\partial^{i+j}u^*}{\partial x^i\partial y^j}\right| < \bar{H}\sum_{0}^{m-1}{}_k\left[\frac{1}{t^{1-\lambda}}\left|f_k^{(m-k-1)}\right|_\lambda+\max_{0\leq s\leq l}\left|f_k^{(m-k-1)}\right|\right], \quad i+j=m. \tag{43}$$

L'ipotesi su $\mathfrak{D}$ è palesemente restrittiva ma permette di affermare che se $f_k\in C^{(2m+1-k)}$ allora $u^*\in C^{(2m+1)}$ in $\mathfrak{D}$.

Torniamo ora all'equazione (26); facciamo sui coefficienti e termine noto le ipotesi di regolarità richieste da Browder e ammettiamo che il problema di Dirichlet abbia una sola soluzione se anche i dati hanno la regolarità indicata da Browder. Poichè in tali ipotesi esiste la funzione di Green, possiamo riferirci all'equazione omogenea poichè disponiamo della soluzione

$$\iint_{\mathfrak{D}} G(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

nulla al contorno insieme alle sue derivate d'ordine $< m$.

Supposto $\mathfrak{D}$ di classe $[2m+2]$ e assegnate le funzioni $f_k(s)$, $k=0,1,\ldots,m-1$, se $f_k\in C^{(2m+1-k)}$ allora la funzione u^* riesce di classe $C^{(2m+1)}$ in $\mathfrak{D}$ e quindi ha la regolarità della funzione g di Browder. Poniamo

$$v=u^*+w \tag{44}$$

onde

$$w(x,y)=-\iint_{\mathfrak{D}} G(x,y;\xi,\eta)\mathfrak{L}[u^*(\xi,\eta)]d\xi d\eta.$$

Poniamo

$$w_{ij}(x, y) = \iint\limits_{\mathfrak{D}} G(x, y\,;\, \xi, \eta) a_{ij}(\xi, \eta) \frac{\partial^{i+j} u^*}{\partial \xi^i \partial \eta^j} d\xi d\eta.$$

Per la (42) si ha subito

$$(45) \qquad \left| \frac{\partial^{a+b} w_{ij}}{\partial x^a \partial y^b} \right| < H \sum_{0}^{m-1}{}_k \max_{0 \leq s \leq l} | f_k^{(m-k-1)} | \qquad \text{per } a+b<m, \ i+j<m.$$

Indicando, come si è fatto più indietro, con $D^{(k)}$ una derivazione k-pla rispetto a ξ, η, tenendo presente che G e le sue derivate rispetto a ξ, η d'ordine $< m$ si annullano su $\mathfrak{C}$, si ha

$$w_{ij} = (-1)^h \iint\limits_{\mathfrak{D}} D^{(h)}(Ga) D^{(m-1)} u^* d\xi d\eta \qquad \text{per} \quad i+j = m-1+h.$$

Quindi, tenendo presente che le derivate d'ordine $2m-1$ di G si maggiorano in modulo con una quantità del tipo $H[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{-1/2}$, in forza della (42) si ha che la (45) è ancora valida per $a+b < m$, $i+j < 2m$.

Infine se $i+j = 2m$, si ha

$$w_{ij} = (-1)^m \iint\limits_{\mathfrak{D}} D^{(m)}(Ga) D^{(m)} u^* d\xi d\eta.$$

Sia ora $\mathfrak{D}_{t_0}$ il dominio, già considerato, contenuto in $\mathfrak{D}$ e avente per frontiera $\mathfrak{C}_{t_0}$, con $t_0 (> 0)$ abbastanza piccolo. Poichè in $\mathfrak{D}_{t_0}$ la u^* e una qualunque sua derivata sono in modulo maggiorabili con una espressione del tipo di quella che figura nel secondo membro della (43), basta considerare

$$\iint\limits_{\mathfrak{D}-\mathfrak{D}_{t_0}} D^{(m)}(Ga) D^{(m)} u^* d\xi d\eta = \int_0^{t_0} dt \int_0^l D^{(m)}(Ga) D^{(m)} u^* \cdot (1-\gamma t) ds,$$

ove $\gamma = x'(s) y''(s) - x''(s) y'(s)$. Quest'ultimo integrale e una sua qualunque derivata d'ordine $< m$ sono in modulo maggiorabili con una espressione del tipo

$$H \sum_{0}^{m-1}{}_k \left(| f_k^{(m-k-1)} |_\lambda + \max_{0 \le s \le l} | f_k^{(m-k-1)} | \right) \int_0^{t_0} \int_0^{l} \frac{dt\, ds}{t^{1-\lambda} \sqrt{(\sigma - s)^2 + (\tau - t)^2}}$$

essendo $x = x(\sigma) - \tau y'(\sigma)$, $y = y(\sigma) + \tau x'(\sigma)$; ma l'integrale che qui figura si mantiene limitato al variare di τ tra 0 e t_0 e di σ tra 0 ed l poichè è convergente e limitato al variare di τ l'integrale

$$\int_0^{t_0} \frac{\lg | t - \tau |}{t^{1-\lambda}} dt.$$

Pertanto:

Se $\mathfrak{D}$ *è di classe* $[2m + 2]$, *assegnate* m *funzioni* $f_k(s)$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, *tali che* $f_k \in C^{(2m+1-k)}$, $f_k(0) = f'_k(0) = = \ldots = f_k^{(m-k-2)}(0) = 0$ *per* $0 \le k \le m - 2$, *la soluzione* v (*supposta unica*) *del problema*

$$(46) \qquad \begin{cases} \mathfrak{L}[v] = 0 & \text{in } \mathfrak{D} - \mathfrak{C} \\ \dfrac{d^k v}{d\nu^k} = f_k & \text{su } \mathfrak{C}, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \end{cases}$$

è tale che

$$(47) \quad \left| \frac{\partial^{i+j} v}{\partial x^i \partial y^j} \right| < H \sum_{0}^{m-1}{}_k \left(| f_k^{(m-k-1)} |_\lambda + \max_{0 \le s \le l} | f_k^{(m-k-1)} | \right), \quad i + j \le m - 1.$$

5. Problema di Dirichlet.

Mostriamo che:

Nelle ipotesi di Browder sui coefficienti di $\mathfrak{L}$, *e supposto* $\mathfrak{D}$ *di classe* $[2m + 2]$, *se il problema di Dirichlet ha una sola soluzione quando i dati hanno la regolarità richiesta da Browder, allora il problema* (46) *ha un sola soluzione se* $f_k(s) \in C^{(m-k-1,\, \lambda)}$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$.

Intanto si può supporre che sia $f_k^{(h)}(0) = 0$ per $h = 0, 1, \ldots, m - k - 2$, $k = 0, 1, \ldots, m - 2$.

Questa ipotesi non è restrittiva. Infatti la soluzione di (46) si può porre nella forma $u = v + w$ essendo w un opportuno polinomio che si può scegliere in modo da ricondurci alle condizioni desiderate.

Consideriamo m successioni $\{f_{kn}\}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, con $f_{kn} \in C^{(2m+1-k)}$ e tale che $f_{kn}^{(h)}(0) = 0$ per $h = 0, 1, \dots, m-k-2$, in modo che riesca

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{0}^{m-1}{}_k \left(|f_k^{(m-k-1)} - f_{kn}^{(m-k-1)}|_\lambda + \max_{0 \le s \le l} |f_k^{(m-k-1)} - f_{kn}^{(m-k-1)}| \right) = 0.$$

Sia u_n la soluzione del problema

$$\mathfrak{L}[u_n] = 0 \quad \text{in} \quad \mathfrak{D} - \mathfrak{C}$$

$$\frac{d^k u_n}{d\nu^k} = f_{kn} \quad \text{su} \quad \mathfrak{C}.$$

Allora in base alla formola di maggiorazione (47) con ragionamenti simili a quelli del n. **2** si ha che $\{u_n\}$ converge uniformemente in $\mathfrak{D}$ a una funzione soluzione di (46).

Inoltre:

La formola di maggiorazione (47) *sussiste anche se le* $f_k(s)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, *anzichè essere la traccia su* $\mathfrak{C}$ *di una funzione di classe* $C^{(2m+1)}$ *nulla per* $x = x(0)$, $y = y(0)$ *insieme alle sue derivate d'ordine* $< m-1$, *soddisfano solo la condizione* $f_k \in C^{(m-k-1,\lambda)}$ $f_k^{(h)}(0) = 0$, $h = 0, 1, \dots, m-k-2$, $k = 0, 1, \dots, m-2$.