Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Carmelo Longo

Sui fasci di complessi lineari di piani in S_5

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 24 (1955), p. 300-311

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1955__24__300_0>

SUI FASCI DI COMPLESSI LINEARI DI PIANI IN S_5.

Nota (*) *di* CARMELO LONGO (*a Roma*)

1. - Scopo della nota.

Scopo della presente Nota è lo studio dei fasci di complessi lineari di piani in S_5 in relazione ai suoi invarianti proiettivi.

In generale un tale fascio ammette quattro complessi speciali e tre rette singolari incidenti i piani singolari totali dei relativi complessi speciali [1]). Le quattro quaterne di punti di appoggio danno i tre invarianti del fascio. Questa interpretazione viene a mancare nel caso che due complessi speciali coincidano: per questo do un'altra interpretazione di due dei tre invarianti in relazione all'esistenza di almeno due complessi speciali distinti.

Dopo aver caratterizzato i fasci con quattro complessi speciali distinti e con due od un solo invariante, caratterizzo i fasci con due complessi speciali coincidenti ed i fasci con un complesso singolare. Rappresentati i fasci con una retta dello S_{19}, ambiente della grassmanniana $G^{(5,2)}$ dei piani di S_5, le ultime caratterizzazioni equivalgono rispettivamente alla caratterizzazione delle rette tangenti alla V^4_{18} rappresen-

---

(*) Pervenuta in Redazione il 30 Aprile 1955.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Roma.

1) Si veda: C. SEGRE. *Sui complessi lineari di piani nello spazio a cinque dimensioni*, Annali di Mat., s. III, vol. 27, ove l'autore studia, in relazione alla grassmanniana dei piani di S_5, i fasci di tipo generale, con lo scopo principale di determinare l'ordine della varietà luogo dei piani cardini dei complessi del fascio.

tante i complessi speciali ed a quelle delle rette incidenti la $G^{(5,2)}$ luogo dei punti doppi per la V_{18}. È chiaro pertanto che i casi esaminati sono alla base della classificazione completa di tutti i tipi possibili di fasci.

2. - Richiami sui complessi lineari di piani in S_5.

Indichiamo con x^i $(i = 0, 1, ..., 5)$ le coordinate omogenee di punto in un S_5 proiettivo complesso e con p^{ikj} le coordinate grassmanniane di piano.

Complesso lineare di piani (c. l. — S_2) è la totalità di piani che soddisfano un'equazione lineare

$$c_{ikj}p^{ikj} = 0 \qquad (i, k, j = 0, 1, ..., 5) \tag{2.1}$$

ove, secondo la nota convenzione, si deve sommare rispetto agli indici ripetuti; le c_{ikj} sono inoltre componenti di un tensore alternante.

Ad una retta r, di coordinate r^{ik}, è associato l'*iperpiano polare*, passante per la retta stessa,

$$c_{ikj}r^{ik}x^j = 0, \tag{2.2}$$

luogo dei punti x che congiunti con la retta r danno tutti e soli i piani del complesso passanti per la retta stessa.

Una retta r è *singolare* se e solo se il relativo iperpiano polare è indeterminato, cioè se e solo se

$$c_{ikj}r^{ik} = 0 \qquad (j = 0, 1, ..., 5). \tag{2.3}$$

Ricordiamo che si possono avere i seguenti tipi di c. l. — S_2 [2]):

1) *Complesso di tipo generale*, per il quale vi sono due piani, *cardini* del complesso, tali che le rette singolari sono

---

[2]) Si veda p. es. C. SEGRE, memoria citata in [1]); o anche E. BOMPIANI: *Complessi lineari di piani nello spazio a cinque dimensioni*, Rend. Acc. Naz. Lincei, (8), 14, (1953), 719-723; B. SEGRE, *Forme differenziali e loro integrali* vol. I ,Ed. Univ. Docet, Roma, pp. 102-106; C. LONGO, *Sui complessi lineari di piani*, Annali di Mat., s. IV, XXXVII, (1954).

tutte e sole le rette incidenti ad essi; i piani cardini costituiscono inoltre il luogo dei *punti singolari,* cioè dei punti per i quali passa una stella di rette singolari.

2) *Complesso speciale,* caratterizzato dall'ammettere uno ed uno solo *piano singolare totale,* cioè tale che ogni sua retta è singolare. Tale complesso può dedursi come limite dal precedente facendo tendere i due piani cardini al piano singolare totale; questo costituisce il luogo dei punti singolari e le rette singolari per un suo punto appartengono ad un S_3, lo S_3 *singolare associato* al punto, passante per il piano stesso, e la corrispondenza fra i punti del piano ed i relativi S_3 è una proiettività.

3) *Complessi singolari,* con almeno un *centro,* punto tale che ogni retta per esso è singolare. Di questi complessi se ne hanno due tipi: a) con un solo centro; b) con un piano luogo di centri (*complesso nucleato*).

Per il seguito ci sarà utile determinare i c. l. — S_2 che ammettono tre date rette singolari individuanti lo S_5. Scelte queste rette come $O_\alpha O_{\alpha+1}$ $(\alpha = 0, 2, 4)$ i c. l. — S_2 in esame hanno equazione:

$$
\begin{aligned}
(2.4) \qquad & c_{024}p^{024} + c_{025}p^{025} + c_{034}p^{034} + c_{035}p^{035} + \\
& + c_{124}p^{124} + c_{125}p^{125} + c_{134}p^{134} + c_{135}p^{135} = 0
\end{aligned}
$$

Indicate con $(y^\alpha,\ y^{\alpha+1})$ le coordinate di un punto di $O_\alpha O_{\alpha+1}$, i piani cardini del precedente complesso si appoggiano ad $O_\alpha O_{\alpha+1}$ nei due suoi punti singolari determinati dall'equazione:

$$
(2.5) \qquad A_{\alpha\alpha}(y^\alpha)^2 + 2A_{\alpha,\,\alpha+1}y^\alpha y^{\alpha+1} + A_{\alpha+1,\,\alpha+1}(y^{\alpha+1})^2 = 0
$$

ove:

$$
\begin{aligned}
(2.6) \qquad 2A_{\alpha+i,\,\alpha+j} = {} & c_{\alpha+i((\alpha+2,\,\alpha+3}c_{\alpha+4,\,\alpha+5))\alpha+j} + \\
& + c_{\alpha+j((\alpha+2,\,\alpha+3}c_{\alpha+4,\,\alpha+5))\alpha+i} \qquad (i,\ j = 0,\ 1)\ ^{3)}.
\end{aligned}
$$

---

[3]) Si è posto: $c_{j_1((i_0 i_1}c_{i_2 i_3))j_2} = c_{j_1 i_0 i_1}c_{i_2 i_3 j_1} + c_{j_1 i_0 i_2}c_{i_3 i_1 j_1} + c_{j_1 i_0 i_3}c_{i_1 i_2 j_1}$.

3. - Fascio di c.l. — S_2: caso generale.

Siano L_a ed L_b due c. l. — S_2 individuati rispettivamente dai trivettori a_{ikj}, b_{ikj}. Supposto che vi siano tre sole rette incidenti i piani cardini dei due complessi (caso generale), scelte queste tre rette come $O_\alpha O_{\alpha+1}(\alpha = 0, 2, 4)$, e posto:

$$c_{ikj} = \lambda a_{ikj} + \mu b_{ikj}, \tag{3.1}$$

il fascio individuato dai due complessi ammette le precedenti tre rette come le sole rette singolari per tutti i complessi del fascio; inoltre, l'equazione del fascio coincide con l'equazione (2.4).

Le 2.6 sono forme di 2° grado nelle λ, μ; pertanto i punti di appoggio dei piani cardini dei c.l. — S_2 del fascio con $O_\alpha O_{\alpha+1}$ determinano, su ciascuna di queste rette, una corrispondenza [2,2].

I quattro punti uniti corrispondono ai quattro *complessi speciali* appartenenti al fascio. Supposto che questi corrispondano ai valori 0, ∞, 1, k di $\mu : \lambda$ si ha che k è un *invariante* del fascio.

Scelti i piani $\tau_1 \equiv O_0 O_2 O_4$, $\tau_2 \equiv O_1 O_3 O_5$ rispettivamente nei piani singolari totali dei due complessi corrispondenti a $\mu = 0$ e $\lambda = 0$, per le equazioni dei due complessi L_a ed L_b si ha rispettivamente:

$$a_{035} p^{035} + a_{125} p^{125} + a_{134} p^{134} + a_{135} p^{135} = 0, \tag{3.2}$$

$$b_{124} p^{035} + b_{034} p^{034} + b_{035} p^{025} + b_{024} p^{024} = 0. \tag{3.2'}$$

Supposto poi che il complesso speciale corrispondente a $\lambda = \mu = 1$ abbia come piano singolare totale il piano congiungente i punti unità di $O_\alpha O_{\alpha+1}$, si verifica facilmente che debbono essere soddisfatte le seguenti quattro relazioni, indipendenti fra loro:

$$\begin{aligned} a_{035} + a_{135} &= b_{124} + b_{024} \\ a_{125} + a_{135} &= b_{124} + b_{024} \\ a_{134} + a_{135} &= b_{025} + b_{024} \\ a_{035} + a_{125} + a_{134} + 2a_{135} &= b_{024} \end{aligned} \tag{3.3}$$

da cui, posto:

$$a_{135} = \beta_1 \quad , \quad b_{024} = \beta_2 \tag{3.4}$$

si ha:

$$\begin{aligned} a_{035} &= \alpha_1 - \beta_1 \quad , \quad a_{125} = \alpha_2 - \beta_1 \quad , \quad a_{134} = \alpha_3 - \beta_1 \\ b_{124} &= \alpha_1 - \beta_2 \quad , \quad b_{034} = \alpha_2 - \beta_2 \quad , \quad b_{025} = \alpha_3 - \beta_2 \end{aligned} \tag{3.5}$$

con:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \beta_1 + \beta_2 . \tag{3.6}$$

Ciò posto dalle (2.5) segue che l'ulteriore complesso speciale corrisponde al valore:

$$k = \frac{\beta_2(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_1)(\alpha_3 - \beta_1)}{\beta_1(\alpha_1 - \beta_2)(\alpha_2 - \beta_2)(\alpha_3 - \beta_2)}, \tag{3.7}$$

ed il relativo piano singolare totale si appoggia alle tre rette $O_\alpha O_{\alpha+1}$ rispettivamente nei punti

$$\begin{gathered} \rho_1 = \frac{y^1}{y^0} = \frac{\beta_2(\alpha_1 - \beta_1)}{\beta_1(\alpha_1 - \beta_2)} \quad , \quad \rho_2 = \frac{y^3}{y^2} = \frac{\beta_2(\alpha_2 - \beta_1)}{\beta_1(\alpha_2 - \beta_2)} \quad , \\ \rho_3 = \frac{y^5}{y^4} = \frac{\beta_2(\alpha_3 - \beta_1)}{\beta_1(\alpha_3 - \beta_2)} . \end{gathered} \tag{3.8}$$

È chiaro che oltre a k anche i valori ρ_i sono *invarianti* del fascio. Questi quattro invarianti non sono però indipendenti in quanto è subito visto che eliminando le α_i tra le (3.6), (3.7), (3.8) si ha:

$$k\beta_2^2 = \rho_1\rho_2\rho_3\beta_1^2 .$$

Quindi:

Considerato in S_5 un generico fascio di c.l. — S_2 esso ammette tre invarianti e la sua equazione si può ridurre alla seguente forma canonica:

$$\begin{aligned} &\lambda\beta_1(p^{143} + p^{15} + p^{053} + p^{135}) + \mu\beta_2(p^{052} + p^{043} + p^{142} + p^{024}) + \\ &+ \alpha_1(\lambda p^{035} + \mu p^{124}) + \alpha_2(\lambda p^{125} + \mu p^{034}) + \alpha_3(\lambda p^{134} + \mu p^{025}) = 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

con:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \beta_1 + \beta_2 .$$

OSSERVAZIONI: 1) Dimostriamo che dati gli invarianti ρ_i vi sono quattro sistemi di valori α e β che soddisfano le (3.8), e perciò vi sono quattro fasci del tipo (3.9).

Posto infatti

$$\beta_1 = \sigma\beta_2 \quad , \quad a_{ik} = \alpha_i - \beta_k$$

dalle (3.8) segue:

$$a_{11} = \sigma\rho_1 a_{12} \quad , \quad a_{21} = \sigma\rho_2 a_{22} \quad , \quad a_{31} = \sigma\rho_3 a_{32}$$

e perciò dalle (3.3):

$$\begin{aligned}
&(1 - \sigma)\beta_2 + (1 - \sigma\rho_1)a_{12} = 0\\
&(1 - \sigma)\beta_2 + (1 - \sigma\rho_2)a_{22} - 0\\
&(1 - \sigma)\beta_2 + (1 - \sigma\rho_3)a_{32} = 0\\
&(2 - \sigma)\beta_2 + a_{12} + a_{22} + a_{32} = 0
\end{aligned}$$

da cui posto:

$$\Delta(\sigma) = \begin{vmatrix} 1-\sigma & 1-\sigma\rho_1 & 0 & 0 \\ 1-\sigma & 0 & 1-\sigma\rho_2 & 0 \\ 1-\sigma & 0 & 0 & 1-\sigma\rho_3 \\ 2-\sigma & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

per ogni soluzione dell'equazione di quarto grado, $\Delta(\sigma) = 0$, si ha un fascio del tipo (3.9) con gli invarianti ρ_i.

Quindi:

Dati in S_5 quattro piani in posizione generica, vi sono quattro fasci di complessi lineari di piani per ognuno dei quali i quattro complessi speciali in esso contenuti hanno per piani singolari totali i quattro piani dati[4]).

2) Se il fascio (3.9) ammette due complessi speciali coincidenti per il valore di k dato dalla (3.7) si deve avere uno dei valori 0, ∞, 1. Ne segue facilmente che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè il fascio (3.9) *ammetta due complessi speciali coincidenti è che si abbia*:

$$(3.10) \qquad \begin{gathered} \alpha_1\alpha_2\alpha_2\beta_1\beta_2(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - \beta_2). \\ (\alpha_2 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2)(\alpha_3 - \beta_1)(\alpha_3 - \beta_2) = 0. \end{gathered}$$

---

[4]) Si veda anche: C. SEGRE, p. 180.

Caratterizzeremo geometricamente ai n. (6), (7) i fasci che soddisfano alla precedente relazione.

4. - Altro significato degli invarianti di un fascio.

Un primo significato geometrico degli invarianti ρ_i del fascio, da quanto si è detto nel n. precedente, è dato dai birapporti dei punti di appoggio dei piani singolari totali relativi ai quattro complessi speciali del fascio con le tre rette singolari $O_\alpha O_{\alpha+1}$.

Degli invarianti del fascio (2.9) diamo ora un altro significato del quale ci serviremo nel seguito.

Consideriamo due dei quattro complessi speciali: p. es. i complessi (3.2) corrispondenti ai valori $\mu = 0$ e $\lambda = 0$, e siano π_1 e π_2 i rispettivi piani singolari totali.

Lo S_3 singolare associato ad un punto $\overline{P}_1(\bar{x}^0, \bar{x}^2, \bar{x}^4)$ del piano π_1 interseca il piano π_2 in un punto P_2.

Lo S_3 singolare associato al punto P_2 interseca poi π_1 in un punto P_1. La corrispondenza fra i punti P_1 e $\overline{P}_1$ di π_1 è una proiettività di equazione:

$$\sigma x^0 = a_{035} b_{124} \bar{x}^0, \quad \sigma x^2 = a_{125} b_{034} \bar{x}^2, \quad \sigma x^4 = a_{134} b_{025} \bar{x}^4. \tag{4.1}$$

Analogamente si ha una proiettività di π_2 in sè, la cui equazione si ottiene dalla precedente sostituendo rispettivamente x^0, x^2, x^4 con x^1, x^3, x^5.

La proiettività (4.1) ha come punti uniti le intersezioni del piano π_1 con le tre rette singolari, e per i suoi invarianti σ_1, σ_2, che sono anche invarianti del fascio, si ha:

$$\sigma_1 = \frac{(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_1-\beta_2)}{(\alpha_3-\beta_1)(\alpha_3-\beta_2)} = \frac{(\beta_2-\beta_1\rho_3)^2}{(\beta_2-\beta_1\rho_1)^2}\frac{\rho_1}{\rho_3}, \quad \sigma_2 = \frac{(\beta_2-\beta_1\rho_3)^2}{(\beta_2-\beta_1\rho_2)^2}\frac{\rho_2}{\rho_3}. \tag{4.2}$$

Quindi:

Considerati due complessi speciali le proiettività tra i punti dei rispettivi piani singolari totali ed i relativi S_3 singolari associati determinano su ciascuno piano singolare totale una proiettività. Queste proiettività hanno gli stessi invarianti e le rette singolari del fascio individuato dai due complessi sono le tre congiungenti i punti uniti delle prece-

denti proiettività che corrispondono alle stesse radici caratteristiche.

Il fascio di complessi oltre agli invarianti delle precedenti proiettività ammette come invariante il birapporto dei quattro complessi speciali appartenenti ad esso.

5. - Fasci con quattro complessi speciali con due o con un solo invariante.

Caratterizziamo ora tra i fasci, contenenti quattro complessi speciali distinti, quelli per cui si hanno solamente due od un solo invariante.

Nelle nostre ipotesi il fascio si può scrivere nella forma (3.9) ed inoltre l'espressione (3.10) è differente da zero. Si ha p. es. $\rho_2 = \rho_3$ se e solo se:

$$(\alpha_2 - \alpha_3)(\beta_1 - \beta_2) = 0,$$

e perciò, tenuto conto della (3.10), se e solo se:

$$\alpha_2 = \alpha_3 \, (\neq 0). \tag{5.1}$$

In tal caso le due proiettività τ_{π_1} e τ_{π_2} del n. precedente ammettono le rette O_2O_4 ed O_3O_5 come luogo di punti uniti ed il fascio, oltre alla retta O_0O_1, ammette come singolari le rette del regolo avente per direttrici le rette O_2O_4 ed O_3O_5 ed appartenenti alla quadrica:

$$x^3x^4 - x^2x^5 = 0. \tag{5.2}$$

E viceversa: se il fascio ammette le precedenti rette come singolari i due invarianti ρ_2 e ρ_3 sono uguali.

Quindi:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un fascio di c.l. — S_2 in S_5 che ammetta quattro complessi speciali distinti abbia due soli invarianti è che il fascio ammetta un regolo di rette singolari, (e di conseguenza un'ulteriore retta singolare non appartenente allo S_3 del regolo). Il fascio ammette la seguente equazione canonica:

$$\begin{aligned}\lambda\beta_1(p^{143} + p^{152} + p^{053} + p^{135}) + \mu\beta_2(p^{052} + p^{043} + p^{142} + p^{024}) + \\ + \alpha_1(\lambda p^{035} + \mu p^{124}) + \alpha_2[\lambda(p^{125} + p^{134}) + \mu(p^{034} + p^{025})] = 0\end{aligned} \tag{5.3}$$

con:

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 .$$

È subito visto che in tal caso il luogo dei piani cardini dei complessi del fascio è una V_3^6 avente le rette singolari del fascio (e quindi in particolare i punti della quadrica) come luogo di punti doppi.

Supponiamo ora che i tre invarianti ρ_i siano uguali tra loro, cioè che si abbia:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha \neq 0.$$

In tal caso le proiettività τ_{π_1} e τ_{π_2} si riducono all'identità e di conseguenza il fascio ammette ∞^2 rette singolari appartenenti ad una stessa V_3^3: tale V_3^3 (contata due volte) è anche il luogo dei piani cardini dei complessi del fascio.

Quindi:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un fascio di c.l. — S_2 in S_5 che ammetta quattro complessi speciali distinti abbia un solo invariante è che il fascio ammetta quattro rette singolari in posizione generica e quindi di conseguenza ammetta ∞^2 rette singolari appartenenti ad una V_3^3 luogo dei piani cardini dei complessi del fascio.

Nel caso in esame il fascio ammette la seguente equazione canonica:

$$\lambda\beta_1(p^{143} + p^{152} + p^{053} + p^{135}) + \mu\beta_2(p^{052} + p^{043} + p^{142} + p^{024}) +$$
$$+ \alpha[\lambda(p^{035} + p^{125} + p^{134}) + \mu(p^{124} + p^{034} + p^{025})] = 0$$

con

$$\beta_1 + \beta_2 = 3\alpha$$ [5].

6. - Fasci con due complessi speciali coincidenti

Vogliamo ora caratterizzare i fasci per i quali due dei quattro complessi speciali coincidano tra loro. Si vede facilmente che se un fascio ammette un complesso singolare questo, in generale, assorbe due complessi speciali. È perciò ne-

[5]) Solamente di questo secondo caso vi è un cenno in C. SEGRE, l. c. pag. 114.

cessario distinguere due casi secondo che il fascio contenga o no un complesso singolare.

Supposto che il fascio non contenga complessi singolari, esso si può ridurre alla forma (3.9): inoltre supposto che i due complessi speciali coincidenti corrispondano a $\mu = 0$, si deve avere dalla (3.7), $k = 0$, ossia:

$$\beta_2(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_1)(\alpha_3 - \beta_1) = 0.$$

Poichè l'annullarsi di uno dei fattori $\alpha_2 - \beta_1$ porta che il fascio ammette complessi singolari, si deve avere necessariamente:

$$\beta_2 = 0\,,$$

che esprime la condizione necessaria e sufficiente perchè il piano singolare totale $O_0O_2O_4$ relativo al complesso corrispondente a $\mu = 0$ faccia parte della varietà di piani base del fascio.

In tale ipotesi il fascio ammette la seguente forma canonica:

$$\alpha_1[\lambda(p^{143} + p^{132} + p^{153}) + \mu p^{124}] + \alpha_2[\lambda(p^{143} + p^{053} + p^{153}) + \mu p^{034}] +$$
$$+ \alpha_3[\lambda(p^{152} + p^{053} + p^{153}) + \mu p^{025}] = 0.$$

Il fascio ammette due soli invarianti e per il loro significato basta riferirsi agli invarianti delle proiettività τ_{π_i} determinate al n. 4.

Si ha inoltre che anche in tal caso il fascio (in generale) ammette tre sole rette singolari.

Riepilogando:

Condizione necessaria e sufficiente perchè in un fascio di c.l. — S_2 in S_5, privo di complessi singolari, due dei quattro complessi speciali coincidano è che il relativo piano singolare totale faccia parte della varietà base del fascio. In tal caso il fascio, in generale, ammette tre (sole) rette singolari e due invarianti.

7. - Fasci con un complesso singolare.

Supponiamo ora che il fascio ammetta un complesso singolare.

In tal caso non possiamo più riferirci alla forma (3.9).

Supposto ancora che i due complessi speciali abbiano le equazioni (3.2) e (3.2′), poichè il centro Ω del complesso singolare deve appartenere ad una retta singolare del fascio, possiamo scegliere Ω nel punto $x^0 = -x^1$ di O_0O_1. Supposto inoltre che il complesso singolare corrisponda a $\lambda = \mu$, si ha:

$$a_{035} = a_{135} = \alpha_1\,,\ b_{024} = b_{134} = \alpha_2\,.\ b_{025} = a_{125} = \alpha_3\,,\ b_{034} = a_{134} = \alpha_4\,.$$

Ne segue che le due proiettività τ_{π_1} e τ_{π_2}, relative ai piani singolari totali dei due omplessi speciali, ammettono l'unico invariante

$$I = \alpha_1\alpha_2/\alpha_3\alpha_4\,, \tag{7.1}$$

e pertanto, oltre ai punti uniti O_0 ed O_1, esse ammettono come luogo di punti uniti rispettivamente le rette O_2O_4 ed O_3O_5. Di conseguenza il fascio ammette un regolo (avente per direttrici O_2O_4 ed O_3O_5) di rette singolari. È subito visto che nel regolo si può scegliere la retta unità in modo che si abbia, $\alpha_3 = \alpha_4$.

Sia Q la quadrica a cui appartiene il regolo: si verifica facilmente che tra le rette

$$y^3 = \rho y^2 \quad , \quad y^5 = \rho y^4$$

dell'altro regolo di Q, ve ne sono due tali che tutti i complessi del fascio ammettono, rispetto ad esse, lo stesso iperpiano polare. Tali rette sono determinate dall'equazione:

$$\alpha_1\rho^2 + 2\alpha_3\rho + \alpha_2 = 0\,. \tag{7.2}$$

Il birapporto di queste due rette e delle rette O_2O_4 ed O_3O_5, appartenenti ai piani singolari totali dei due complessi speciali e corrispondenti rispettivamente a $\rho = 0$ e $\rho = \infty$, coincide, a meno di un fattore numerico, con l'invariante I.

Si può scegliere la retta unità in modo che l'equazione (7.2) abbia la soluzione $\rho = -1$. Posto:

$$\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha$$

ne segue:

$$\alpha_1 = \alpha + \beta \quad , \quad \alpha_2 = \alpha - \beta$$

e per il fascio si ha l'equazione canonica:

$$\begin{aligned}(7.3)\qquad &\lambda[(\alpha+\beta)(p^{035}+p^{135})+\alpha(p^{125}+p^{134})]+\\ &+\mu[(\alpha-\beta)(p^{02}\ +p^{\ 24})+\alpha(p^{025}+p^{034})]=0.\end{aligned}$$

Si verifica inoltre che condizione necessaria e sufficiente affinchè il complesso singolare sia nucleato è che si abbia $I=1$, cioè che le due proiettività τ_{π_1} e τ_{π_2} coincidano con l'identità. In tal caso si ha una V_3^3 luogo di rette singolari ed è subito visto che con opportuna scelta del piano nucleo si ha: $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4$, ed il fascio ammette la seguente forma canonica:

$$\lambda(p^{035}+p^{135}+p^{125}+p^{134})+\mu(p^{124}+p^{024}+p^{025}+p^{034})=0.$$

Riepilogando:

Se un fascio di complessi lineari di piani in S_5 ammette un complesso singolare, in generale, il fascio contiene due soli complessi speciali ed ha un solo invariante. Inoltre esso ammette come rette singolari le rette di un regolo ed una retta, per il centro del complesso singolare, non appartenente al regolo.

Il complesso è nucleato se e solo se il fascio ammette una V_3^3 luogo di rette singolari, ed in quest'ultimo caso il fascio non ha invarianti.