

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

MAURO PAGNI

Equazioni differenziali lineari e problemi al contorno con condizioni integrali

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 24 (1955), p. 245-264

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1955__24__245_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI E PROBLEMI AL CONTORNO CON CONDIZIONI INTEGRALI

Memoria () di MAURO PAGNI (a Modena)*

Nel suo recente libro « *Lezioni sulle trasformazioni lineari* »¹⁾ il Prof. G. FICHERA dà un generale principio dell'alternativa per le trasformazioni lineari svincolato da qualsiasi proprietà metrica dell'insieme nel quale si considera la trasformazione. Questo punto di vista oltre a conseguire la massima generalità del principio stesso ne rende particolarmente agevole l'applicazione ai singoli problemi. È così che per suggerimento del Prof. G. FICHERA ho cercato di vedere come si possa applicare detto generale principio ai problemi ai limiti per le equazioni differenziali ordinarie con l'aggiunta di condizioni integrali e ai problemi al contorno per equazioni lineari alle derivate parziali con l'aggiunta di condizioni integrali.

Tali problemi trovano applicazioni in questioni di idrodinamica e termodinamica e sono strettamente legati alla teoria delle equazioni integro differenziali e alle equazioni di Eulero di certi problemi di Calcolo delle variazioni²⁾. In particolare sono qui da ricordare per lo studio di problemi ai

(*) Pervenuta in Redazione il 31 marzo 1955.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico Università, Modena.

1) G. FICHERA [3]. I numeri fra parentesi quadre si riferiscono alla Bibliografia alla fine della Memoria.

2) Vedasi: DUHAMEL [2], G. GIRAUD [4], R. HESTENES [5], JONACH [6], L. LICHTENSTEIN [7], E. MAGENES [8], M. PICONE [9], W. T. REID [12], J. D. TAMARKIN [14], J. THOMAS [15].

limiti per le equazioni differenziali ordinarie ed integro differenziali con l'aggiunta di condizioni integrali i lavori di JONACH [6], M. PICONE [9], J. D. TAMARKIN [14], J. THOMAS [15], e per gli analoghi problemi per equazioni alle derivate parziali il lavoro di G. GIRAUD [4].

Nella presente Memoria dopo aver richiamato al n. 2 il principio dell'alternativa come dato da G. FICHERA [3] si studia nel n. 3 un generale problema ai limiti per un sistema di equazioni differenziali ordinarie lineari con l'aggiunta di condizioni integrali per il quale viene dato il teorema dell'alternativa.

È da notare che il risultato ottenuto si diversifica da quelli di J. D. TAMARKIN [14] dato che comprende anche il caso del sistema con le sole condizioni integrali.

Nel n. 4 viene studiato un generale problema al contorno per le equazioni lineari alle derivate parziali di ordine n con l'aggiunta di condizioni integrali pervenendo per esso al teorema dell'alternativa. Anche qui si può osservare che il risultato conseguito non è contenuto nel lavoro di G. GIRAUD [4] sia per l'ordine dell'equazione sia perchè vale anche per l'equazione con la sola aggiunta di condizioni integrali.

2. Principio generale dell'alternativa per le trasformazioni lineari.

Esponiamo qui brevemente il generale principio dell'alternativa, su cui sono basati i risultati esposti nei successivi numeri, come viene dato da G. FICHERA [3].

Siano S ed S' due insiemi lineari rispetto allo stesso corpo numerico $\mathfrak{N}$ ³⁾. Indichiamo con Σ_F l'insieme di tutti i funzionali lineari che si possono definire in S . Σ_F è un insieme lineare rispetto ad $\mathfrak{N}$ se si assume come somma $F + G$ di due

³⁾ Per la definizione di insieme lineare rispetto ad un corpo numerico $\mathfrak{N}$ rimandiamo a S. BANACH [1], G. FICHERA [3], M. PICONE [10].

funzionali il funzionale lineare $F(x) + G(x)$ e quale prodotto αF il funzionale $\alpha F(x)$ ⁴⁾.

Sia $\{V\}$ una famiglia di varietà lineari contenute in S e a cui appartiene lo stesso insieme S . Diremo che l'insieme S_F è associato all'insieme lineare S rispetto alla famiglia $\{V\}$ se

I) S_F è costituito da funzionali lineari definiti in S ;

II) S_F è lineare rispetto al corpo $\mathfrak{N}$, cioè è una varietà lineare di Σ_F ;

III) se V è una varietà di $\{V\}$ che non coincide con S , preso comunque un punto x_0 in $S - V$, esiste qualche funzionale di S_F che è nullo su V ed è diverso da zero in x_0 .

Sia $S'_{F'}$ una varietà lineare di $\Sigma_{F'}$ e $F'(x')$ un qualsiasi funzionale appartenente a $S'_{F'}$. Si consideri la trasformazione lineare

$$(1) \quad x' = T(x),$$

che muta punti di S in punti di S' e il cui codominio indicheremo con $T(S)$, e per ogni x di S si ponga

$$(2) \quad F(x) = F'[T(x)]$$

venendo così a definire in S un funzionale lineare F .

La (2) è anche una trasformazione che muta gli elementi $S'_{F'}$ in elementi di Σ_F . Tale trasformazione, che è lineare, verrà chiamata trasformazione associata alla (1) secondo $S'_{F'}$ e si denoterà con

$$(3) \quad F = T^*(F').$$

L'equazione omogenea

$$(3_0) \quad \Omega = T^*(F')^5$$

sarà detta equazione omogenea associata alla (1) secondo $S'_{F'}$. Abbiamo ora tutti gli elementi per enunciare il principio generale dell'alternativa nella forma datagli da G. FICHERA ⁶⁾.

⁴⁾ Le notazioni usate sono quelle di G. FICHERA [3]: $x, y, z \dots$ indicano i punti di S ; $a, b, c, \dots$ i numeri di $\mathfrak{N}$.

⁵⁾ Con Ω indichiamo l'origine di Σ_F , cioè il funzionale lineare definito in S ed ivi identicamente nullo.

⁶⁾ Vedi G. FICHERA [3].

Siano S ed S' lineari rispetto allo stesso corpo $\mathfrak{N}$ e sia S'_F associato rispetto alla famiglia $\{V'\}$ di varietà lineari di S' .

Si consideri l'equazione

$$(1) \quad x' = T(x)$$

e si ammetta che $T(S)$ appartenga a $\{V'\}$.

Sussiste la seguente alternativa:

I) L'equazione omogenea associata (3_0) non ammette autosoluzioni. La (1) è allora risolubile comunque si fissi x' in S' , e tale condizione è sufficiente affinché la (3_0) non abbia autosoluzioni.

II) La (3_0) ammette autosoluzioni. In tal caso la (1) è risolubile allora ed allora soltanto che il termine noto x' è ortogonale ad ogni autosoluzione dell'equazione omogenea associata ⁷⁾.

3. Problema ai limiti con l'aggiunta di condizioni integrali per un sistema lineare di equazioni differenziali lineari del primo ordine.

Siano

$$\|p_{sk}\| \quad , \quad \|q_{rk}\|$$

$$(s = 1, \dots, \lambda \quad , \quad 0 \leq \lambda \leq n), \quad (r = 1, \dots, \mu \quad , \quad 0 \leq \mu \leq n)$$

due matrici numeriche assegnate rispettivamente di caratteristica λ, μ .

Siano $\alpha_j \equiv (\alpha_{j1}(t), \dots, \alpha_{jn}(t))$ ($j = 1, \dots, m$) m vettori assegnati, le cui n componenti sono funzioni continue nell'intervallo chiuso (a, b) , lineamente indipendenti.

Indichiamo con S l'insieme lineare, rispetto al corpo reale, costituito dai vettori $x \equiv (x_1(t), \dots, x_n(t))$, le cui n compo-

⁷⁾ Il punto x e il funzionale F si diranno ortogonali se $F(x) = 0$ cfr. G. FICHERA [3]

nenti sono funzioni di classe 1 in (a, b) ⁸⁾, che verificano le seguenti condizioni

$$(4_a) \quad L_{sa}(x) = \sum_{k=1}^n p_{sk} x_k(a) = 0 \quad (s = 1, \dots, \lambda)$$

$$(4_b) \quad L_{rb}(x) = \sum_{k=1}^n q_{rk} x_k(b) = 0 \quad (r = 1, \dots, \mu)$$

$$(4) \quad L_j(x) = \int_a^b x \alpha_j dt = \sum_{k=1}^n \int_a^b x_k(t) \alpha_{jk}(t) dt = 0 \quad (j = 1, \dots, m).$$

Denotiamo con S' l'insieme lineare, rispetto al corpo reale, dei vettori $x' \equiv (x'_1(t), \dots, x'_n(t))$ le cui n componenti sono continue in (a, b) .

Assegnate le n^2 funzioni $a_{ik}(t)$ continue in (a, b) consideriamo la seguente trasformazione lineare T definita in S e con codominio S' :

$$(5) \quad x'_i(t) = \frac{dx_i}{dt} + \sum_{k=1}^n a_{ik}(t) x_k(t) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Studieremo il problema di determinare le condizioni per l'esistenza di un sistema di soluzioni per il sistema differenziale (5) verificante le condizioni (4_a) , (4_b) , (4). Ciò equivale, ovviamente, a studiare le condizioni per l'esistenza di un vettore x di S verificante l'equazione $x' = T(x)$.

Denotiamo con S'_E la varietà lineare costituita dai funzionali lineari definiti in S' e aventi la forma seguente:

$$(6) \quad F'(x') = \int_a^b x' y dt = \sum_{i=1}^n \int_a^b x'_i(t) y_i(t) dt$$

essendo $y \equiv (y_1(t), \dots, y_n(t))$ un vettore le cui componenti sono funzione di classe 1 in (a, b) .

⁸⁾ Dicendo che una funzione $f(t)$ è di classe n in (a, b) ($n \geq 0$) si intende che essa è continua in (a, b) insieme alle sue derivate sino all'ordine n incluso.

Determiniamo la trasformazione $F = T^*(F')$ associata alla (5) secondo $S'_{F'}$.

Si ha

$$(7) \quad \begin{aligned} F(x) = F[T(x)] &= \int_a^b \sum_{i=1}^n \left(\frac{dx_i(t)}{dt} + \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)x_k(t) \right) y_i(t) dt = \\ &= \sum_{i=1}^n [x_i(t)y_i(t)]_a^b + \int_a^b \sum_{k=1}^n \left(-\frac{dy_k(t)}{dt} + \sum_{i=1}^n a_{ik}(t)y_i(t) \right) x_k(t) dt. \end{aligned}$$

Consideriamo l'equazione

$$(8) \quad \Omega = T^*(F').$$

Se F' è soluzione della (8), allora dalla (7) si deduce che qualunque sia x di S e avente le componenti nulle agli estremi di (a, b) deve aversi

$$(9) \quad \int_a^b \sum_{k=1}^n \left(-\frac{dy_k(t)}{dt} + \sum_{i=1}^n a_{ik}(t)y_i(t) \right) x_k(t) dt = 0.$$

Siano ora $\alpha_j^* \equiv (\alpha_{j1}^*(t), \dots, \alpha_{jm}^*(t))$ ($j = 1, \dots, m$) m vettori, le cui componenti sono funzioni di classe 1 in (a, b) nulle

$$\int_a^b \alpha_l \alpha_j^* dt \quad \left\{ \begin{array}{ll} = 0 & \text{se } l \neq j \\ = 1 & \text{se } l = j \end{array} \right. \quad (l, j = 1, \dots, m).$$

Allora se $u \equiv (u_1(t), \dots, u_n(t))$ è un qualunque vettore, la cui n componenti sono funzioni di classe 1 in (a, b) e nulle agli estremi di (a, b) , riesce posto $\gamma_j = \int_a^b u \alpha_j^* dt$

$$u - \sum_{j=1}^m \gamma_j \alpha_j^* = x$$

con x soddisfacente le (4) e avente le componenti, funzioni di classe 1 in (a, b) , nulle agli estremi di (a, b) .

Tenuto conto di ciò e delle (4) la (9) può scriversi

$$\begin{aligned} & \int_a^b \sum_{k=1}^n \left(-\frac{dy_k(t)}{dt} + \sum_{i=1}^n a_{ik}(t)y_i(t) - \sum_{j=1}^m c_j \alpha_{jk}(t) \right) x_k(t) dt = \\ & = \int_a^b \sum_{k=1}^n \left(-\frac{dy_k(t)}{dt} + \sum_{i=1}^n a_{ik}(t)y_i(t) - \sum_{j=1}^m c_j \alpha_{jk}(t) \right) u_k(t) dt - \\ & - \int_a^b \sum_{k=1}^n \left(-\frac{dy_k(t)}{dt} + \sum_{i=1}^n a_{ik}(t)y_i(t) - \sum_{j=1}^m c_j \alpha_{jk}(t) \right) \left(\sum_{l=1}^m \gamma_l \alpha_{lk}^*(t) \right) dt = 0, \end{aligned}$$

essendo c_j ($j = 1, \dots, m$) costanti arbitrarie.

Si determinano le costanti c_j in modo che il secondo integrale che figura nel secondo membro della relazione ora scritta sia nullo qualunque siano le γ_l . Un semplice calcolo porge

$$c_l = \int_a^b \sum_{k=1}^n \left(-\frac{dy_k}{dt} + \sum_{i=1}^n a_{ik} y_i \right) \alpha_{lk}^* dt \quad (l = 1, \dots, m).$$

Si ha così che la (9) può scriversi

$$\begin{aligned} & \int_a^b \sum_{k=1}^n \left(-\frac{dy_k(t)}{dt} + \sum_{i=1}^n a_{ik}(t)y_i(t) - \right. \\ (9) \quad & \left. - \sum_{j=1}^m \alpha_{jk}(t) \int_a^b \sum_{k=1}^n \left(-\frac{dy_k}{d\tau} + \sum_{i=1}^n a_{ik} y_i \right) \alpha_{jk}^*(\tau) d\tau \right) u_k(t) dt = 0. \end{aligned}$$

Ed imponendo ad u di avere tutte le componenti nulle tranne la k^{ma} ($k = 1, \dots, n$) e facendo uso di un noto lemma si ha:

$$\begin{aligned} & -\frac{dy_k(t)}{dt} + \sum_{i=1}^n a_{ik}(t)y_i(t) - \\ (5^*) \quad & - \sum_{j=1}^m \alpha_{jk} \int_a^b \sum_{l=1}^n \left(-\frac{dy_l}{d\tau} + \sum_{i=1}^n a_{li} y_i \right) \alpha_{jl}^*(\tau) d\tau = 0 \\ & (k = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Inoltre se F' è soluzione della (8) y deve essere tale, che per ogni x di S e avente le componenti nulle in b , da annullare l'espressione

$$\sum_{i=1}^n x_i(a) y_i(a) = 0.$$

Poichè assegnati arbitrariamente i numeri $\xi_1, \dots, \xi_n$, esiste sempre un vettore di classe 1, che soddisfa le (4), verificante le condizioni

$$x_k(a) = \xi_k, \quad x_k(b) = 0 \quad (k = 1, \dots, n),$$

quanto sopra detto comporta che ogni soluzione del sistema

$$\sum_{k=1}^n p_{sk} \xi_k = 0 \quad (s = 1, \dots, \lambda)$$

deve verificare l'equazione

$$\sum_{i=1}^n \xi_i y_i(a) = 0$$

e ciò comporta $n - \lambda$ condizioni lineari indipendenti fra le $y_i(a)$. Epperò y deve soddisfare, in a , $n - \lambda$ condizioni del tipo

$$(4_a^*) \quad M_{sa}(y) = \sum_{k=1}^n P_{sk} y_k(a) = 0 \quad (s = 1, \dots, n - \lambda).$$

Analogamente si deduce che in b la y deve soddisfare $n - \mu$ condizioni

$$(4_b^*) \quad N_{rb}(y) = \sum_{k=1}^n Q_{rk} y_k(b) = 0 \quad (r = 1, \dots, n - \mu).$$

Invertendo il ragionamento si prova che se y verifica il seguente sistema

$$(5_a^*) \quad \begin{aligned} & -\frac{dy_k}{dt} + \sum_{i=1}^n a_{ik} y_i - \\ & - \sum_{j=1}^m \alpha_{jk}(t) \int_a^b \sum_{i=1}^n \left(-\frac{dy_i}{d\tau} + \sum_{l=1}^n a_{il} y_l \right) \alpha_{ji}^*(\tau) d\tau = 0 \end{aligned}$$

colle condizioni

$$(4_a^*) \quad M_{sa}(y) = 0, \quad (4_b^*) \quad N_{rb}(y) = 0 \\ (s = 1, \dots, n - \lambda) \quad (r = 1, \dots, n - \mu).$$

il corrispondente funzionale dato dalla (6) è soluzione di (8).

Il problema (5_a^*) , (4_a^*) , (4_b^*) verrà detto problema omogeneo associato o aggiunto del problema (5), (4_a) , (4_b) , (4).

Nel sistema (5_a^*) compaiono le funzioni α_{jl}^* ($j = 1, \dots, m$, $l = 1, \dots, n$) componenti dei vettori α_j^* costruiti come detto.

È appena opportuno avvertire che se $\bar{\alpha}_j^*$ ($j = 1, \dots, m$), sono vettori costruiti allo stesso modo degli α_j^* , cioè tali che

$$\int_a^b \alpha_l \bar{\alpha}_j^* dt \left\{ \begin{array}{l} = 0 \text{ se } l \neq j \\ = 1 \text{ e } l = j \end{array} \right. \quad (l, j = 1, \dots, m),$$

il sistema

$$-\frac{dy_k}{dt} + \sum_{i=1}^n a_{ik} y_i - \\ (5_k^*) \quad - \sum_{j=1}^m \alpha_{jk}(t) \int_a^b \sum_{l=1}^n \left(-\frac{dy_l}{d\tau} + \sum_{i=1}^n a_{li} y_i \right) \bar{\alpha}_{jl}^*(\tau) d\tau = 0 \\ (k = 1, \dots, n)$$

è equivalente al sistema (5_a^*) come si constata facilmente.

Sia ora $\{V'\}$ la famiglia costituita da tutte le varietà lineari che sono codomini di trasformazione quale la (5).

Mostriamo che $S'_{F'}$ è associato a S' rispetto a $\{V'\}$. Per questo, supposto che $T(S)$ non coincida con S bisogna far vedere che se x'_0 è contenuto in $CT(S)$ si può in corrispondenza determinare un vettore $y \equiv (y_1(t), \dots, y_n(t))$ le cui componenti sono funzioni di classe 1 in (a, b) , tale che

$$(10) \quad F'(x') = \int_a^b x' y dt \left\{ \begin{array}{l} = 0 \text{ per } x' \text{ di } T(S) \\ \neq 0 \text{ per } x' \equiv x'_0. \end{array} \right.$$

Sia $x_k \equiv (x_{k1}(t), \dots, x_{kn}(t))$ ($k = 1, \dots, n$) un sistema fon-

damentale di integrali del sistema omogeneo

$$\frac{dx_i(t)}{dt} + \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)x_k(t) = 0 \quad (i=1, \dots, n)$$

e sia $z \equiv (z_1(t), \dots, z_n(t))$ il vettore integrale particolare del sistema (5), che ha tutte le componenti nulle nel punto $t=a$, allora come noto z può porsi nella forma:

$$z_i = \sum_{l=1}^n \int_a^t H_{il}(t, \tau) x'_l(\tau) d\tau \quad (i=1, \dots, m)$$

ove si è posto $H_{il}(t, \tau) = \sum_{k=1}^n x_{ik}(t) X_{lk}(\tau)$, essendo X_{lk} il reciproco della matrice $\|x_{ik}\|$ ⁹⁾.

Consideriamo il sistema lineare omogeneo nelle $\beta_s, \gamma_r, \delta_j$

$$\sum_{s=1}^{\lambda} \beta_s L_{sa}[x_h] + \sum_{r=1}^{\mu} \gamma_r L_{rb}[x_h] + \sum_{j=1}^m \delta_j L_j[x_h] = 0 \quad (h=1, \dots, n).$$

Esso deve ammettere un'autosoluzione

$$\beta_i^{(0)}, \dots, \beta_{\lambda}^{(0)}, \gamma_i^{(0)}, \dots, \gamma_{\mu}^{(0)}, \delta_i^{(0)}, \dots, \delta_m^{(0)}$$

tale che

$$\sum_{r=1}^{\mu} \gamma_r^{(0)} L_{rb}(z) + \sum_{j=1}^m \delta_j^{(0)} L_j(z) \neq 0.$$

In caso contrario il sistema nelle c_h

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^n c_h L_{sa}(x_h) &= 0 \\ \sum_{h=1}^n c_h L_{rb}(x_h) &= -L_{rb}(z) \\ \sum_{h=1}^n c_h L_j(x_h) &= -L_j(z) \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} s=1, \dots, \lambda \\ r=1, \dots, \mu \\ j=1, \dots, m \end{array} \right)$$

⁹⁾ Vedasi ad es. M. PICONE [11], G. SANSONE [13].

ammetterebbe soluzione assumendo $x' \equiv x'_0$, epperò x'_0 non apparterebbe al $CT(S)$.

Assunto $y \equiv (y_1(t), \dots, y_n(t))$ con

$$y_i(\tau) = \sum_{r=1}^{\mu} \gamma_r^{(0)} \sum_{l=1}^n H_{il}(b, \tau) q_{rl} + \sum_{j=1}^m \delta_j^{(0)} \sum_{l=1}^m \int_a^b H(t, \tau) \alpha_{lj}(t) dt$$

($i = 1, \dots, n$)

sono, come facilmente si verifica, soddisfatte le (10).

Possiamo quindi applicare il principio generale dell'alternativa enunciato al n. 2 ed ottenere così il seguente teorema:

I. - *Il problema (5), (4_a), (4_b), (4) ammette soluzioni comunque si fissi x' allora ed allora soltanto che il problema omogeneo associato (5^{*}), (4_a^{*}), (4_b^{*}) è sprovvisto di autosoluzioni.*

Se esistono autosoluzioni per il problema (5^{}), (4_a^{*}), (4_b^{*}) è condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza della soluzione del problema (5), (4_a), (4_b), (4) che il termine noto x' verifichi la condizione*

$$\int_a^b x' y dt = 0$$

per ogni autosoluzione y di (5^{}), (4_a^{*}), (4_b^{*}).*

4. Problemi al contorno per le equazioni lineari alle derivate parziali con l'aggiunta di condizioni integrali.

Sia A un campo limitato dello spazio euclideo ad r dimensioni e $\mathcal{F}A$ la sua frontiera.

Poniamo, essendo $a_{s_1 \dots s_r}^{(k)}(x)$ ($s_1 + \dots + s_r = k$, $k = 0, 1, \dots, n$) assegnate funzioni di classe k in $A + \mathcal{F}A$,

$$E(u) = \sum_{k=0}^n \sum_{s_1 + \dots + s_r = k} a_{s_1 \dots s_r}^{(k)}(x) \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_r^{s_r}},$$

$$E^*(v) = \sum_{k=0}^n \sum_{s_1 + \dots + s_r = k} (-1)^k \frac{\partial^k (a_{s_1 \dots s_r} v)}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_r^{s_r}}.$$

Indichiamo con $\mathcal{M}(\mathcal{Q})$ l'insieme delle funzioni $u(x)$ ($v(x)$) [$x \equiv (x_1, \dots, x_r)$] di classe n in A e di classe $n-1$ in $A + \mathcal{FA}$ ¹⁰ e tali che $E(u)$ ($E^*(v)$) riesca sommabile in A .

Siano $L_1(u), \dots, L_v(u)$ v ($v \geq 0$) combinazioni lineari, a coefficienti continui su $\mathcal{FA}$, della u e delle sue derivate di ordine $\leq n-1$. Supposte le $L_h(u)$ ($h=1, \dots, v$) linearmente indipendenti su $\mathcal{FA}$ ed indicata con $u'(x)$ un assegnata funzione continua e sommabile in A , consideriamo per $u \in \mathcal{M}$ il problema

$$(11) \quad E(u) = u' \text{ in } A$$

$$(12) \quad L_h(u) = 0 \text{ su } \mathcal{FA} \quad (h=1, \dots, v)^{11}.$$

Siano $L_1^*(v), \dots, L_\mu^*(v)$ ($\mu \geq 0$) μ combinazioni lineari (linearmente indipendenti), a coefficienti continui su $\mathcal{FA}$, della v e delle sue derivate di ordine $\leq n-1$, tali che, per ogni coppia di funzioni $u, v, u \in \mathcal{M}$ e soddisfacente le

$$(12) \quad L_h(u) = 0 \text{ su } \mathcal{FA} \quad (h=1, \dots, v)$$

$v \in \mathcal{Q}$ è soddisfacente le

$$(12^*) \quad L_i^*(v) = 0 \text{ su } \mathcal{FA} \quad (i=1, \dots, \mu)$$

riesca

$$\int_A v E(u) d\tau = \int_A u E^*(v) d\tau$$

$$(d\tau = dx_1 \dots dx_r).$$

Indicata con $v'(x)$ un assegnata funzione continua e sommabile in A , chiameremo, per $v \in \mathcal{Q}$, *problema aggiunto del problema* (11), (12) il problema

$$(11^*) \quad E^*(v) = v' \text{ in } A$$

$$(12^*) \quad L_i^*(v) = 0 \text{ su } \mathcal{FA} \quad (i=1, \dots, \mu).$$

¹⁰ Se $\mathcal{C}$ è un insieme di punti contenuti in $A + \mathcal{FA}$, dicendo che v è di classe n in $\mathcal{C}$ intendiamo che essa è continua in ogni punto di $\mathcal{C}$ assieme a tutte le sue derivate parziali $\leq n$.

¹¹ Se $v=0$ la (12) viene a mancare e il problema (11), (12) si riduce alla sola equazione (11).

Siano $\alpha_k(x)$ ($k=1, \dots, m$) m assegnate funzioni continue e sommabili in A ed ivi linearmente indipendenti. Ci proponiamo lo studio del seguente problema

$$(11) \quad E(u) = u' \text{ in } A$$

$$(12) \quad L_h(u) = 0 \text{ su } \mathcal{F}A \quad (h=1, \dots, \nu)$$

$$(13) \quad \int_A u \alpha_k d\tau = 0 \quad (k=1, \dots, m).$$

Faremo la seguente ipotesi

I. - Valga il teorema dell'alternativa per il problema (11), (12) e per il suo aggiunto (11*), (12*) nella classe $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ ¹²⁾.

In questa ipotesi, servendoci del principio generale dell'alternativa del n. 2, stabiliremo un teorema dell'alternativa per il problema (11), (12), (13).

Diciamo S l'insieme lineare delle funzioni $u \in \mathcal{M}$ e soddisfacenti le (12) e le (13). Con S' indichiamo poi l'insieme lineare delle funzioni $u'(x)$ continue e sommabili in A .

Sia $u' = T(u)$ la trasformazione lineare che ad ogni elemento u di S fa corrispondere la funzione u' di S' uguale ad $E(u)$.

È allora evidente che lo studio del problema (11), (12), (13) equivale allo studio dell'equazione funzionale

$$(14) \quad u' = T(u).$$

Diciamo S'_F l'insieme lineare costituito dai funzionali lineari definiti in S' e aventi la forma seguente

$$F'(u') = \int_A u' v d\tau$$

¹²⁾ Per teorema dell'alternativa per il problema (11), (12) intendiamo la seguente proposizione: Il problema (11), (12) è risolvibile comunque si fissi u' se e soltanto se il problema omogeneo associato (11_0^*) $E^*(v) = 0$, (12^*) $L_i^*(v) = 0$ ($i=1, \dots, \mu$) non ha autosoluzioni.

Se invece il problema (11_0^*) , (12^*) ha autosoluzioni condizione necessaria e sufficiente per la risolubilità del problema (11), (12) è che il termine noto u' verifichi la condizione $\int_A u' v d\tau = 0$ per ogni autosoluzione di (11_0^*) , (12^*) .

essendo $v \in \mathcal{Q}$ e verificante le (12*).

Consideriamo la trasformazione $F = T^*(F')$ associata alla T secondo $S'_{F'}$

$$F(u) = F'(E(u)) = \int_A v E(u) d\tau = \int_A E^*(v) u d\tau.$$

Si osservi che se F' è soluzione dell'equazione

$$(15) \quad \Omega = T^*(F')$$

v deve essere tale che qualunque sia $u \in S$ riesca

$$(16) \quad \int_A u E^*(v) d\tau = 0.$$

Tenuto conto delle (13) e indicate con λ_k ($k = 1, \dots, m$) m costanti arbitrarie la (16) può scriversi

$$(16') \quad \int_A [E^*(v) - \sum_{k=1}^m \lambda_k \alpha_k] u d\tau = 0.$$

Siano α_k^* ($k = 1, \dots, m$) m funzioni, appartenenti a $\mathcal{M}$ soddisfacenti le (12) e tali che

$$\int_A \alpha_j^* \alpha_k d\tau \quad \left\{ \begin{array}{l} = 0 \text{ se } j \neq k \\ = 1 \text{ se } j = k \end{array} \right. \quad (j, k = 1, \dots, m).$$

Si verifica allora immediatamente che una qualunque funzione $u \in S$ può essere messa nella forma

$$u = w - \sum_{k=1}^m \gamma_k \alpha_k^* \quad \left(\gamma_k = \int_A w \alpha_k d\tau \right)$$

con w funzione appartenente a $\mathcal{M}$ e verificante le (12).

Tenuto conto di ciò la (16') può scriversi

$$\int_A \left[E^*(v) - \sum_{k=1}^m \lambda_k \alpha_k \right] w d\tau - \int_A \left[E^*(v) - \sum_{k=1}^m \lambda_k \alpha_k \right] \left(\sum_{j=1}^m \gamma_j \alpha_j^* \right) d\tau = 0$$

e fatto $\lambda_k = \int_A E^*(v) \alpha_k^* d\tau$ ($k = 1, \dots, m$) si ha

$$\int_A \left[E^*(v) - \sum_{k=1}^m \left(\int_A E^*(v) \alpha_k^* d\tau \right) \alpha_k \right] w d\tau = 0$$

qualunque sia $w \in \mathcal{M}$ e verificante le (12).

Segue allora, per un noto ragionamento, che deve essere

$$(17) \quad E^*(v) - \sum_{k=1}^m \alpha_k \int_A E^*(v) \alpha_k^* d\tau = 0$$

per $v \in \mathcal{V}$ verificante le (12*) e relativa a F' soluzione di (15). Viceversa se $v \in \mathcal{V}$ soddisfa le (12*) e verifica la (17) F' è soluzione di (15).

Il problema (17), (12*) verrà detto *problema omogeneo aggiunto del problema* (11), (12), (13).

Detta $\{V'\}$ la famiglia costituita dalle varietà lineari V' che sono codomini di trasformazioni quali la (14), occorre, per applicare il principio generale dell'alternativa, mostrare che $S_{F'}$ è associato ad S' rispetto a $\{V'\}$. A tale scopo basterà provare, supposto che $T(S)$ non coincida con S' , che se u'_0 è un punto appartenente al $CT(S)$ si può determinare una $v \in \mathcal{V}$ e verificante le (12*) tale che

$$(18) \quad F'(u') = \int_A u' v d\tau \quad \left\{ \begin{array}{l} = 0 \text{ per } u' \in T(S) \\ \neq 0 \text{ per } u' = u'_0 \end{array} \right.$$

Convieni a questo punto distinguere due casi:

a) Il problema (11), (12) per $u' = u'_0$ non è risolubile.

Esiste allora per l'ipotesi I un'autosoluzione, diciamola $\bar{v}$ del problema (11*) $E^*(v) = 0$, (12*) $L_i(v) = 0$ su $\mathcal{FA}$ ($i = 1, \dots, \mu$), tale che $\int_A u'_0 \bar{v} d\tau \neq 0$. Fatto $v = \bar{v}$ si ottiene un funzionale soddisfacente la (18), dato che riesce

$$\int_A u' \bar{v} d\tau \quad \left\{ \begin{array}{l} = 0 \text{ se } u' \in T(S) \\ \neq 0 \text{ se } u' = u'_0. \end{array} \right.$$

b) Il problema (11), (12) per $u' = u'_0$ è risolubile.

Supponiamo da prima che il problema (11), (12) per $u' = u'_0$ abbia una sola soluzione. Il problema omogeneo (11₀) $E(u) = 0$, (12) $L_h(u) = 0$ su $\mathcal{FA}$ ($h = 1, \dots, \nu$) è allora sprovvisto di autosoluzioni e per l'ipotesi I il problema (11*), (12*) è sempre risolubile. Indicate allora con u_0 la soluzione di (11), (12) e con $\bar{\alpha}$ la prima delle funzioni α_k ($k = 1, \dots, m$) per cui $\int_A u_0 \alpha_k d\tau \neq 0$, si consideri il problema (11*) $E^*(v) = \bar{\alpha}$, (12*) $L_i(v) = 0$ su $\mathcal{FA}$ ($i = 1, \dots, \mu$) e di questo una sua soluzione $v_{\bar{\alpha}}$. Riesce fatta $v = v_{\bar{\alpha}}$

$$\left. \begin{aligned} \int_A u' v_{\bar{\alpha}} d\tau &= \int_A E(u) v_{\bar{\alpha}} d\tau = \int_A u E^*(v_{\bar{\alpha}}) d\tau = \int_A u \bar{\alpha} d\tau \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &= 0 \text{ se } u' \in T(S) \\ &\neq 0 \text{ se } u' = u'_0 \end{aligned}$$

ed è quindi soddisfatta la (18).

Si supponga infine che il problema omogeneo (11₀), (12) sia dotato di autosoluzioni. Prese comunque m di tali autosoluzioni (linearmente indipendenti o no), che indichiamo con, $u_1, \dots, u_m$ formiamo la matrice

$$(19) \quad \left\| \begin{array}{ccc} \int_A \alpha_1 u_1 d\tau & \dots & \int_A \alpha_1 u_m d\tau \\ \dots & \dots & \dots \\ \int_A \alpha_m u_1 d\tau & \dots & \int_A \alpha_m u_m d\tau \end{array} \right\|$$

La caratteristica di tale matrice è $\leq m$. È subito visto che è minore di m . Infatti se così non fosse, detta w_0 una soluzione del problema (11), (12) con $u' = u'_0$, il sistema lineare nelle c_i

$$(20) \quad \sum_{i=1}^m c_i \int_A \alpha_j u_i d\tau = \int_A w_0 \alpha_j d\tau \quad (j = 1, \dots, m)$$

sarebbe risolubile e indicata con $c_1^{(0)}, \dots, c_m^{(0)}$ la soluzione, la funzione $u = w_0 - \sum_{i=1}^m c_i^{(0)} u_i$ riuscirebbe soluzione del problema (11), (12), (13) con $u' = u'_0$ e u'_0 apparterebbe a $T(S)$.

Sia allora $p < m$ la massima caratteristica della (19) al

variare di tutte le possibile m -ple $(u_1, \dots, u_m)$ di autosoluzioni e per fissare le idee sia $(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m)$ una m -pla tale che la matrice (19) ad essa corrispondente abbia caratteristica p . Il sistema lineare omogeneo sulle γ_j

$$\sum_{j=1}^m \gamma_j \int \alpha_j \bar{u}_i d\tau = 0 \quad (i = 1, \dots, m)$$

deve avere almeno un'autosoluzione, che indicheremo con, $\gamma_1^{(0)}, \dots, \gamma_m^{(0)}$ tale che

$$\sum_{j=1}^m \gamma_j^{(0)} \int w_0 \alpha_j d\tau \neq 0$$

perchè se ciò non fosse il sistema (20) sarebbe risolubile e quindi tale riuscirebbe, per $u' = u'_0$, il problema (11), (12), (13).

Mostriamo ora che tutte le autosoluzioni del problema (11), (12) sono ortogonali a $\sum_{j=1}^m \gamma_j^{(0)} \alpha_j$. Supponiamo che ciò non avvenga per l'autosoluzione $\bar{u}$, riuscirà allora

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^m \gamma_j^{(0)} \int_A \alpha_j \bar{u}_i d\tau = 0 \quad (i = 1, \dots, m) \\ \sum_{j=1}^m \gamma_j^{(0)} \int_A \alpha_j \bar{u} d\tau \neq 0 \end{array} \right.$$

e quindi la matrice

$$\left\| \begin{array}{ccc} \int_A \alpha_1 \bar{u}_1 d\tau & \dots & \int_A \alpha_m \bar{u}_1 d\tau \\ \dots & \dots & \dots \\ \int_A \alpha_1 \bar{u}_m d\tau & \dots & \int_A \alpha_m \bar{u}_m d\tau \\ \int_A \alpha_1 \bar{u} d\tau & \dots & \int_A \alpha_m \bar{u} d\tau \end{array} \right\|$$

sarà di caratteristica $p + 1$; di caratteristica $p + 1$ sarà anche la matrice, ottenuta da quella ora scritta sopprimendo

le condizioni di risolubilità del problema

$$(\star) \quad \left\{ \begin{array}{l} E(u) = u' \quad \text{in } A \\ L_h(u) = 0 \quad \text{su } \mathcal{F}A \quad (h = 1, \dots, \nu) \\ \int_A u \alpha_k d\tau = 0 \quad (k = 1, \dots, m) \end{array} \right.$$

sono così fissate:

Il problema $(\star)$ è sempre risolubile comunque si fissi il termine noto u' in S' se e soltanto se il problema omogeneo aggiunto

$$(\star\star) \quad \left\{ \begin{array}{l} E^*(v) - \sum_{k=1}^m \alpha_k \int_A E^*(v) \alpha_k^* d\tau = 0 \quad \text{in } A \\ L_i^*(v) = 0 \quad \text{su } \mathcal{F}A \quad (i = 1, \dots, \mu) \end{array} \right.$$

è sprovvisto di autosoluzioni.

Se il problema $(\star\star)$ ha autosoluzioni condizione necessaria e sufficiente per la risolubilità del problema $(\star)$ è che u' verifichi la condizione $\int_A u' v d\tau = 0$ per ogni autosoluzione v di $(\star\star)$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] S. BANACH: *Théorie des Operations linéaires*, Monografie Matematyczne, Warszawa, 1932.
- [2] DUHAMEL: *Sur les phénomènes thermo-mécaniques*, « Journal de l'Ecole Polytechnique », vol. 15, cahier 25, 1835.
- [3] G. FICHERA: *Lezioni sulle Trasformazioni lineari*, vol. I, Istituto Matematico, Università di Trieste, 1954.
- [4] G. GIRAUD: *Sur des equations intégrro-differentielles jointes à des conditions intégrro-differentielles à la frontière*, « Comptes rendus Acad. Sciences », Paris 191, 1930, (pp. 478-480).
- [5] R. HESTENES: *Sufficient conditions for multiple integral problems in the calculus of variations*, « American Journal of Mathematics », vol. LXX, 1948, (pp. 239-276).
- [6] JONACH: *The Green's matrix and expansion problem for systems of integro-differential equations*, « Disertation », Brown University, 1930.

- [7] L. LICHTENSTEIN: *Über eine Integro-Differential Gleichung und die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach deren Eigenfunktionen*, Schwarz's Festschrift Berlin 1914, (pp. 274-285).
- [8] E. MAGENES: *Sul minimo relativo degli integrali di Fubini-Tonelli*, «Giornale di Matematiche» di Battaglini, s. IV, vol. 79, 1949-50, (pp. 144-168).
- [9] M. PICONE: *Equazione integrale traducente il più generale problema lineare per le equazioni differenziali ordinarie di qualsivoglia ordine*, Atti Acc. Naz. Lincei, Rend. di classe di Scienze Fis., Mat. e Nat., s. VI, vol. XV, 1932, (pp. 942-948).
- [10] — — *Fondamenti di Analisi funzionale lineare*, Corsi dell'Istituto di Alta Matem., Libreria Universitaria, Roma, 1943.
- [11] — — *Corso di Analisi superiore. Equazioni differenziali*, Catania, 1923.
- [12] W. T. REID: *An integro-differential boundary value problem*, «American Journal of Mathematics», vol. LX, 1938, (pp. 257-291).
- [13] G. SANSONE: *Equazioni differenziali nel campo reale*, parte I, Zanichelli, Bologna, 1941.
- [14] J. D. TAMARKIN: *The notion of the Green's function in the theory of integro-differential equations*, Transation of the Am. Math. Soc., vol 29, 1927, (pp. 755-800).
- [15] J. THOMAS: *Untermuchungen über das Eigenwertproblem*

$$\frac{d}{dx} \left(f(x) \frac{dy}{dx} \right) + \lambda g(x)y = 0; \quad \int_a^b A(x)y dx = \int_a^b B(x)y dx = 0.$$

Mathematische Nachrichten, 6, Band, Berlin 1951-52, (pp. 229-260).