

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIOVANNI ZACHER

Un criterio di non semplicità di un gruppo finito

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 24 (1955), p. 215-219

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1955__24__215_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1955__24__215_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UN CRITERIO DI NON SEMPLICITÀ DI UN GRUPPO FINITO

Nota () di GIOVANNI ZACHER (a Padova)*

Nella presente Nota dimostro che se H è un sottogruppo proprio modulare non identico del gruppo finito G , il gruppo G non può essere semplice.

La nozione di sottogruppo modulare è posta in una mia Memoria pubblicata in questi Rendiconti, e si può formulare dicendo che H è un sottogruppo modulare di G , se il reticolo $\{H, \mathfrak{R}\}$ generato da H , $\mathfrak{R}$ è modulare ogni volta che modulare sia il sottoreticolo $\mathfrak{R}$ del reticolo $\mathfrak{L}(G)$ dei sottogruppi di G . Da quella mia Memoria traggo alcune proposizioni che utilizzerò in questa:

I. - Un automorfismo di un gruppo trasforma sottogruppi modulari in sottogruppi modulari.

II. - L'unione e l'intersezione di due sottogruppi modulari sono ancora sottogruppi modulari.

III. - Se H è un sottogruppo modulare di G , se L è un sottogruppo di G con $H \cap L = 1$, se T è un sottogruppo di H , T è un sottogruppo modulare nel gruppo $T \cup L$.

Premesso questo, dimostro il seguente lemma:

Se G è un gruppo d'ordine finito ed H un sottogruppo modulare, H è permutabile con qualunque sottogruppo di G generato da elementi d'ordine primo con quello di H .

(*) Pervenuta in Redazione il 28 marzo 1955.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

Sia H un sottogruppo modulare ed anzi supponiamo che H sia pel momento un p -gruppo ciclico

$$H = \{h\}$$

coll'ordine $o(H) = p^v$.

Sia poi $\{a\}$ un gruppo ciclico d'ordine q^p con q numero primo diverso da p , $q \neq p$.

Poichè il nostro lemma è vero se l'ordine di G è pq , usiamo per la dimostrazione induzione sull'ordine di G .

Consideriamo il gruppo $\{a\} \cup \{h\}$. Se $\{a\} \cup \{h\}$ è un sottogruppo proprio di G , poichè $\{h\}$ risulta modulare anche in $\{a\} \cup \{h\}$, per ipotesi d'induzione, sarà $\{a\}$ permutabile con $\{h\}$.

Sia dunque $\{a\} \cup \{h\} = G$.

E' ovviamente per l'ipotesi sull'ordine dei due gruppi

$$\{a\} \cap \{h\} = 1.$$

Affinchè allora $\{h\}$ risulti un sottogruppo modulare, dovrà essere sia $\{a\}$ che $\{h\}$ un sottogruppo di Sylow di G , altrimenti uno almeno sarebbe contenuto propriamente in un sottogruppo di Sylow di G , ad es. $\{a\} \subset S_q$, ed il reticolo

$$\{\{a\}, \{h\}, S_q\}$$

non sarebbe modulare.

Siano ora $\mathcal{N}\{a\}$ ed $\mathcal{N}\{h\}$ i normalizzanti di $\{a\}$ ed $\{h\}$ in G .

Se $\mathcal{N}\{a\} = \{a\}$, oppure $\mathcal{N}\{h\} = \{h\}$ per un teorema di BURNSIDE ¹⁾, $\{a\}$ oppure $\{h\}$ ha un complemento normale in G .

Per fissare le idee sia $\mathcal{N}\{a\} = \{a\}$.

Sarà $G = N\{a\}$, $N \cap \{a\} = 1$ ed inoltre $\{h\} \leq N$.

Ora $\{h\} \subset N$ è assurdo, perchè $\{\{h\}, N, \{a\}\}$ non sarebbe un reticolo modulare; pertanto $\{h\}$ è permutabile con $\{a\}$.

Il ragionamento è analogo se $\mathcal{N}\{h\} = \{h\}$.

¹⁾ H. ZASSENHAUS, *Lehrbuch der Gruppentheorie*. p. 133.

Ci resta dunque da discutere il caso in cui si abbia

$$\mathfrak{N}|a| \supset |a| \text{ ed } \mathfrak{N}|h| \supset |h|$$

contemporaneamente.

Poichè $|a|$ è un sottogruppo modulare, dovrà essere sia

$$\mathfrak{N}|a| \cap |h| \neq 1 \text{ sia } \mathfrak{N}|h| \cap |a| \neq 1.$$

Dei due numeri p, q , sia $p > q$.

Poniamo $L = \mathfrak{N}|a| \cap |h|$.

Il gruppo $L \cup |a| = [\mathfrak{N}|a| \cap |h|] \cup |a| = [|a| \cup |h|] \cap \mathfrak{N}|a| = \mathfrak{N}|a|$ è supersolubile come prodotto di 2 gruppi ciclici. Ma allora L è normale in $\mathfrak{N}|a|$ e così $|a|$, per cui

$$\mathfrak{N}|a| = L \times |a|.$$

Ma allora $|a|$ è abeliano, $|a|$ sta quindi nel centro del proprio normalizzante. Quindi $|a|$ ha un complemento normale che contiene $|h|$. Ma allora si conclude come sopra.

Se invece $q > p$, si prende in considerazione il gruppo $\mathfrak{N}|h| \cap |a|$ e si conclude analogamente.

Il lemma è così dimostrato nel caso che H sia un p -gruppo ciclico.

Sia ora H un gruppo qualunque ma non p -gruppo ciclico. Esso risulta allora unione di p -gruppi ciclici.

Sia $|a|$ uno qualunque p -gruppo ciclico di H . Il gruppo $|h|$ è allora permutabile con $|a|$ per la propos. III e per quanto si è dimostrato sopra. c. v. d.

Dalla III e dal lemma si trae il corollario: Se H ed L sono due sottogruppi di G con H sottogruppo modulare ed $H \cap L = 1$, allora se $|a|$ è un sottogruppo di H d'ordine p^σ e $|b|$ un sottogruppo di L d'ordine q^τ con $p \neq q$, il gruppo $|a|$ è permutabile col gruppo $|b|$.

Siamo ora in grado di dimostrare il nostro teorema.

Sia dunque G un gruppo finito ed H un suo sottogruppo proprio modulare e diverso dal sottogruppo identico 1. Distinguiamo due casi.

I. caso: L'ordine di H è divisibile per tutti i fattori primi che dividono l'ordine $o(G)$ di G .

Possiamo inoltre supporre che H sia un sottogruppo modulare minimo nel senso che H non contenga alcun sottogruppo proprio diverso da 1 che sia pure modulare in G .

Se allora N è un altro sottogruppo modulare che non contiene H , sarà $H \cap N = 1$, essendo l'intersezione di due sottogruppi modulari ancora modulare (props. II).

Siano $H = H_1, H_2, \dots, H_t$ i coniugati di H in G .

Supposto G semplice, sarà $t > 1$ ed

$$(1) \quad H_i \cap H_j = 1 \quad \text{per } i \neq j$$

dato che H è un sottogruppo modulare minimo come H_1 per la propos. I.

Indichiamo con $\mathcal{N}(H_i)$ il normalizzante di H_i in G e con R un sottogruppo non identico di H_i . Si ha

$$\mathcal{N}(H_i) \supseteq \mathcal{N}(R)$$

dove $\mathcal{N}(R)$ è il normalizzante di R in G .

Infatti se g è un elemento di $\mathcal{N}(R)$ risulta $gRg^{-1} = R$, e quindi se $gH_i g^{-1}$ fosse uguale ad H_j con $j \neq i$, sarebbe

$$H_i \cap H_j \supseteq R \supset 1.$$

contro la (1).

Detto p il massimo divisore primo di $o(G)$, per l'ipotesi fatta su $o(H)$, il gruppo H contiene un sottogruppo ciclico $\{a\}$ d'ordine p .

Sarà $\mathcal{N}(H) \supseteq \mathcal{N}\{a\}$. Sia poi b un elemento d'ordine q di H , con q numero primo diverso da p . Consideriamo i coniugati di b non contenuti in $H_1 = H$. Tale insieme $\mathcal{J}$ per la (1) non è vuoto. Sia $\bar{b}$ un elemento di $\mathcal{J}$. Sarà $\bar{b} \in H_k$ con k conveniente intero diverso da 1. Ora abbiamo

$$H_1 \cap H_k = 1, \quad H_1 \text{ sottogruppo modulare, } a \in H_1, \bar{b} \in H_k$$

e gli ordini a e b rispettivamente p e q . Pel corollario sarà dunque

$$\{a\} \cup \{\bar{b}\} = \{a\}\bar{b}$$

$\{a\}\{\bar{b}\}$ è dunque supersolubile, quindi $\{a\}$ in esso sottogruppo normale essendo $p > q$.

Ne segue che $\mathcal{N}(H_1)$ contiene tutti i coniugati di b non contenuti in H_2 . Ma $\mathcal{N}(H_1) \supseteq H_1$, quindi $\mathcal{N}(H_1)$ contiene

tutti i coniugati di b in G . Se allora K_b indica la classe di tutti gli elementi coniugati di b in G , essendo G semplice, risulta.

$$G = \{K_b\}.$$

Ma allora $\mathfrak{N}(H) \supseteq \{K_b\} = G$ ossia il sottogruppo proprio non identico H è un sottogruppo normale in G , che è contro l'ipotesi che G sia semplice.

II. caso: L'ordine di H non è divisibile per tutti i fattori primi di $o(G)$.

Detto ancora p il massimo fattore di $o(G)$, potremo sempre trovare due sottogruppi $\{a\}$, $\{b\}$ di G , d'ordini rispettivamente p , q dove solo uno dei 2 numeri primi p , q divide $o(H)$.

Se allora p divide $o(H)$, $\{a\}$ possiamo supporre contenuto in H e allora se K_b è la classe completa degli elementi coniugati di b in G , pel corollario, $\{b\}$ risulta normale in $\{a\} \cup \{K_b\}$ ossia in G , ciò che è assurdo. Se invece $\{b\}$ è contenuto in H , poichè allora i coniugati di $\{b\}$ stanno nei coniugati di H , sono ancora soddisfatte le ipotesi del corollario, per cui $\{a\}$ è ancora normale in $\{a\} \cup \{K_b\} = G$, cosa che è pure assurda.

E la dimostrazione del fatto che: *se il gruppo finito G possiede sottogruppi propri modulari non identici, esso non è semplice*, è completa; si noti che per concludere basta che G possieda almeno un sottogruppo proprio modulare non identico.