

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ENRICO MAGENES

Problemi al contorno misti per l'equazione del calore

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 24 (1955), p. 1-28

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1955__24__1_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1955__24__1_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROBLEMI AL CONTORNO MISTI PER L'EQUAZIONE DEL CALORE

Memoria () di ENRICO MAGENES (a Modena)*

La teoria della diffusione del calore porta, come è noto, allo studio di problemi di valori al contorno per l'equazione di tipo parabolico

$$(1) \quad E(u) \equiv \sum_{h=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_h^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = f(x_1, \dots, x_m, y)$$

Assegnata anzitutto la distribuzione della temperatura nei punti del corpo all'istante iniziale, i due problemi al contorno notoriamente più studiati, che noi chiameremo rispettivamente *primo e secondo problema al contorno*, sono quelli corrispondenti a ritenere anche nota negli istanti successivi la temperatura di tutto il contorno del corpo oppure la temperatura dello spazio ambientale e le condizioni di irraggiamento e conducibilità del contorno del corpo.

Analiticamente essi corrispondono alla ricerca di una soluzione u della (1) per $(x_1, \dots, x_m)$ variabile nel dominio D (il corpo) e y (il tempo) tra 0 e y_0 , di cui siano assegnati il valore per $y=0$ e $(x_1, \dots, x_m) \in D$ e quello per $0 < y \leq y_0$ e $(x_1, \dots, x_m) \in FD$ (FD frontiera di D), oppure il valore per $y=0$ e $(x_1, \dots, x_m) \in D$ e una combinazione lineare del tipo $\frac{du}{dv} + hu \left(\frac{du}{dv} \text{ derivata secondo la normale interna} \right)$ per $0 < y \leq y_0$ e $(x_1, \dots, x_m) \in FD$.

A questi problemi al contorno, che chiamerò « uniformi » per la loro analogia con i problemi di DIRICHLET e di NEU-

*) Pervenuta in Redazione il 28 giugno 1954.

MANN nella teoria delle equazioni lineari di tipo ellittico, è da aggiungere un terzo problema tipico, il problema « misto », consistente nell'assegnare la soluzione u per $y=0$, $(x_1, \dots, x_m) \in D$ e, per $0 < y \leq y_0$, la u oppure la $\frac{du}{dy} + hu$ secondo che $(x_1, \dots, x_m)$ appartenga a una parte F_1D di FD oppure alla rimanente F_2D . Esso corrisponde fisicamente a ritenere note nell'istante iniziale la temperatura di tutto il corpo e negli istanti successivi la temperatura del corpo in una parte del suo contorno e quella dello spazio ambiente sulla rimanente parte del contorno.

Non mi risulta che siano state finora trattate le questioni esistenziali relative a questo problema, se si eccettua il caso particolare che, essendo il corpo filiforme ($m=1$) oppure più volte connesso, le parti F_1D e F_2D siano a distanza positiva tra di loro (caso banale perchè il problema allora non presenta nulla di nuovo rispetto ai problemi « uniformi » e si tratta nello stesso modo, come osservò già fin dal 1908 E. E. LEVI [14]¹). In realtà il problema « misto » presenta nel caso generale difficoltà di tipo essenzialmente nuovo rispetto ai problemi « uniformi » e ciò avviene nei confronti di tutti i diversi metodi esistenziali finora usati nello studio degli stessi problemi « uniformi »²). D'altra parte se l'analogia con le equazioni di tipo ellittico poteva suggerire di estendere i metodi con i quali era stato studiato l'analogo problema « misto » per quelle equazioni (una combinazione cioè del problema

¹) I numeri tra [] si riferiscono alla bibliografia finale del presente lavoro.

²) Una esposizione notevole riguardante la teoria della (1) e una bibliografia vastissima fino al 1936 si trovano negli articoli di G. ASCOLI e G. GIRAUD della monografia [2]; richiamerò in particolare i lavori di E. E. LEVI [14] e [13], di M. GEVREY [11], [9] e [10], di G. GIRAUD [2] e [12]; successivamente al 1936 si vedano tra l'altro i lavori [1], [6], [15], [3], [17], [16]. Osserverò poi fin d'ora che nel presente lavoro farò uso di risultati e di proprietà, ormai note, relativi alla (1) e dovuti soprattutto a E. E. LEVI, M. GEVREY e G. GIRAUD; per essi rinvio una volta per tutti ai lavori ora citati.

di DIRICHLET e di quello di NEUMANN), si trovava che l'unico metodo finora veramente efficace nel caso ellittico, dovuto a G. FICHERA [7], era strettamente legato all'ipotesi dell'*autoaggiunzione* dell'equazione, cosa che ne escludeva l'applicazione immediata all'equazione (1)²⁾.

Orbene, è appunto l'aver trovato un metodo, per il problema « misto » relativo alle equazioni di tipo ellittico, indipendente dall'autoaggiunzione dell'equazione³⁾, che mi ha permesso di trattare anche per l'equazione del calore le questioni essenziali inerenti al problema « misto ». Infatti quel metodo si può estendere anche alle equazioni di tipo parabolico, in particolare alla (1), come appunto mostrerò nel presente lavoro.

Il problema « misto » verrà qui considerato secondo due diverse « impostazioni », riguardanti il modo secondo il quale i dati al contorno vengono assunti: in una impostazione i dati vengono assunti « puntualmente », nel senso classico, sia per quanto riguarda la u che la $\frac{du}{dv} + hu$; nell'altra impostazione invece i dati vengono assunti in parte « puntualmente » e in parte (e precisamente i valori della u sulla $F_1 D$ per $0 < y \leq y_0$) « in media », in un senso analogo a quello che G. CIMMINO ha introdotto nei Suoi studi sul problema generalizzato di DIRICHLET per le equazioni di tipo ellittico (v. ad es. [5] e [4]) e che B. PINI ha recentemente esteso al primo problema al contorno per la (1) (v. [17], [16]). Vengono così ottenuti due teoremi di esistenza, dopo aver precisato ogni volta la classe di funzioni in cui va cercata la soluzione; e in una di queste classi, corrispondente al secondo modo di assumere i dati al contorno, viene anche dimostrata l'unicità della soluzione.

²⁾ Di un altro recentissimo metodo del FICHERA, relativo alle equazioni di tipo ellittico in due variabili indipendenti, e della sua possibile estensione alla (1) nel caso $m=2$ ho avuto notizia quando il presente lavoro era già compilato; il metodo e i risultati del FICHERA saranno pubblicati negli *Atti del Convegno Internazionale sulle equazioni lineari alle derivate parziali*. (Trieste - agosto 1954).

³⁾ Il metodo e i risultati per le equazioni di tipo ellittico sono stati da me esposti in una memoria in corso di stampa sugli *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa* (serie III, vol. VIII).

Non mi dilungo ulteriormente nella descrizione del metodo usato e nelle considerazioni ad esso relative per le quali rinvio alla prefazione della memoria citata in ³⁾; mi limito, ad osservare che il teorema di completezza sul quale si fonda il metodo stesso è stato da me dimostrato proprio su questi *Rendiconti* [15] e che naturalmente anche ora mi sono stati utili, per le questioni relative alla convergenza e al teorema di unicità, ragionamenti del tipo di quelli usati da G. CIMMINO per il Suo metodo di trattazione del problema generalizzato da DIRICHLET (v. ad es. [5] e [4]).

Per semplicità di esposizione ho supposto $m = 2$ e (il corpo) D semplicemente connesso, dividendo la sua frontiera in due soli archi F_1D e F_2D ; e ho inoltre supposto $h = 0$. Ma non si ha difficoltà ad applicare il metodo in generale, m essendo qualunque, D più volte convesso, F_1D e F_2D composte da un numero finito di varietà sufficientemente regolari, la funzione h continua e non positiva su F_2D .

1. - Preliminari. - α) Sia D un dominio regolare limitato nel piano (x_1, x_2) , la cui frontiera FD sia costituita da una curva semplice chiusa di classe 2 in ogni suo punto ⁴⁾; e sia

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ x_2 = x_2(t) \end{cases} \quad a_1 \leq t \leq a_2$$

una rappresentazione parametrica regolare di FD . Mediante i punti $Q_1 \equiv [x_1(t_1), x_2(t_1)]$ e $Q_2 \equiv [x_1(t_2), x_2(t_2)]$ ($a_1 < t_1 < t_2 < a_2$) dividiamo FD in due sottoarchi aperti e privi di estremi F_1D e F_2D . F_1D sia il sottoarco che si ottiene dalle (2) per $t_1 < t < t_2$, F_2D il rimanente; $\overline{F_1D}$ e $\overline{F_2D}$ siano gli stessi

⁴⁾ Secondo una nomenclatura abituale diremo che una funzione è di classe r in un insieme se essa è ivi continua insieme alle sue derivate parziali di ordine $\leq r$; diremo che è di classe rH se, inoltre, le derivate d'ordine $\leq r$ soddisfano ad una condizione di HÖLDER; analogamente diremo che una curva regolare è di classe r o rH in un punto M se risulta definita in un intorno di M da una rappresentazione parametrica con funzioni di classe r o rH .

archi cui si siano aggiunti gli estremi Q_1 e Q_2 . Fissato $y_0 > 0$ indichiamo con τ il dominio cilindrico dello spazio (x_1, x_2, y) costituito dai punti tali che (x_1, x_2) appartenga a D e $0 \leq y \leq y_0$, con σ la frontiera di τ , con s la superficie laterale di τ e precisamente l'insieme dei punti (x_1, x_2, y) per cui $(x_1, x_2) \in FD$ e $0 < y \leq y_0$. In corrispondenza poi della suddivisione operata su FD , potremo distinguere su s le parti $s_1, s_2, \overline{s_1}, \overline{s_2}$ luoghi dei punti (x_1, x_2, y) tali che $0 < y \leq y_0$ e (x_1, x_2) appartenga rispettivamente a $F_1D, F_2D, \overline{F_1D}, \overline{F_2D}$. Indichiamo infine con B la base superiore di τ cioè l'insieme dei punti (x_1, x_2, y) per cui $y = y_0$ e $(x_1, x_2) \in D$.

3) Consideriamo ora l'equazione parabolica

$$(1) \quad E(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = f(x_1, x_2, y)$$

e indichiamo con $E^*(u)$ l'operatore aggiunto di $E(u)$:

$$E^*(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Il problema al contorno che ci poniamo è quello di studiare l'esistenza in una opportuna classe di funzioni di una soluzione $u(P)$ della equazione (1) nel dominio τ , assegnati che siano i valori $\mu(P)$ della u stessa su $D + s_1$ e quelli $\delta(P)$ della sua derivata normale $\frac{du}{dv}$ ⁵⁾ su s_2 .

Possiamo limitarci a supporre che sia $f \equiv 0$ in τ , $\delta \equiv 0$ su s_2 e $\mu \equiv 0$ su D . Con ciò non particolarizziamo il nostro problema, poichè se δ è la traccia su s_2 di un funzione δ^* continua su tutto s , μ è pure continua su D ed f è opportunamente regolare in τ (per es. hölderiana in τ), è noto che è sempre risolubile il problema

$$E(u) = f \text{ in } \tau - \sigma, \quad u = \mu \text{ su } D, \quad \frac{du}{dv} = \delta^* \text{ su } s.$$

⁵⁾ Supporremo la normale a s orientata sempre verso l'interno di τ ; evidentemente la direzione e il verso di essa non dipendono dalla y .

Supposto dunque $f \equiv 0$ in τ , $\delta \equiv 0$ su s_2 , $\mu = 0$ su D , si tratterà ora di precisare il nostro problema al contorno determinando in quali classi di funzioni si debba cercare la soluzione e in che senso debbano essere assunti i dati al contorno, cosa che faremo nei numeri successivi.

γ) Richiamiamo dapprima il seguente, per noi fondamentale, teorema di completezza:

TEOREMA DI COMPLETEZZA: *Esiste una successione $\{w_k(P)\}$ ($k=1, 2, \dots$) di soluzioni regolari in $\tau - \sigma$ della $E(u) = 0$ ^e e di classe 1 in τ , tale che il sistema dei vettori $\{w_k\}$ nello spazio S_3 di componenti*

$$w_k(P) \text{ su } D, \quad w_k(P) \text{ su } s_1, \quad -\frac{dw_k}{dv} \text{ su } s_2$$

è completo per l'approssimazione lineare in media del secondo ordine dei vettori di S_3 di componenti di quadrato sommabile rispettivamente su D , s_1 e s_2 .

Sistemi di funzioni $\{w_k(P)\}$ del tipo suddetto possono costruirsi in generale e in diversi modi; essi sono stati introdotti da L. AMERIO [1] e la loro completezza è stata da me dimostrata in [15]; nel caso particolare che il dominio D sia semplicemente connesso, come abbiamo supposto per semplicità, per sistema $\{w_k(P)\}$ può prendersi lo stesso sistema dei polinomi parabolici (v. [15: Nota II, n. 4]).

2. - Identità fondamentale. - α) Sia

$$(3) \quad \begin{cases} x_1 = x_1(t, r) \\ x_2 = x_2(t, r) \end{cases}$$

una trasformazione biunivoca e bicontinua del rettangolo $R \equiv [t_1 \leq t \leq t_2, 0 \leq r \leq r_1]$ del piano (t, r) nel dominio D del piano (x_1, x_2) tale che:

^e) Diremo che una funzione u è soluzione regolare dalla $E(u) = 0$ in un insieme se essa è ivi continua insieme alle derivate $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$ e soddisfa ivi alla $E(u) = 0$.

I) per ogni r le (3) diano al variare di t una rappresentazione parametrica regolare di una curva regolare γ_r , la quale per $r=0$ coincida con l'arco $\overline{F_1D}$; precisamente

$$x_1(t, 0) = x_1(t) \quad x_2(t, 0) = x_2(t);$$

II) almeno per r sufficientemente piccolo, gli estremi di γ_r , $Q_{i,r} \equiv [x_1(t_i, r), x_2(t_i, r)]$ ($i=1, 2$), e solo essi, siano punti di F_2D ; precisamente sia per $0 < r \leq r_0$ ($r_0 < r_1$)

$$(4) \quad \begin{cases} x_1(t_1, r) = x_1(t_1 - r) & x_1(t_2, r) = x_1(t_2 + r) \\ x_2(t_1, r) = x_2(t_1 - r) & x_2(t_2, r) = x_2(t_2 + r). \end{cases}$$

III) siano generalmente continue e limitate in R le derivate delle $x_i(t, r)$ rispetto a t e r , $x_{i,t}$ e $x_{i,r}$ ($i=1, 2$) e siano tali che

$$x_{1,t} x_{2,r} - x_{1,r} x_{2,t} > 0;$$

inoltre siano verificate per $0 < r \leq r_0$ le

$$(5) \quad x_{1,t}(t_i, r) x_{1,r}(t_i, r) + x_{2,t}(t_i, r) x_{2,r}(t_i, r) = 0 \quad (i=1, 2).$$

Si osservi che le (5) in virtù delle (4) esprimono il fatto che γ_r sia ortogonale a FD nei punti $Q_{1,r}$ e $Q_{2,r}$.

Considerato il seguente sistema di equazioni

$$(6) \quad x_{1,r} = -\alpha x_{2,t} + \beta x_{1,t} \quad x_{2,r} = \alpha x_{1,t} + \beta x_{2,t}$$

si ha per le funzioni α e β in R

$$(7) \quad \alpha = \frac{x_{1,t} x_{2,r} - x_{1,r} x_{2,t}}{x_{1,t}^2 + x_{2,t}^2} \quad \beta = \frac{x_{1,t} x_{1,r} + x_{2,t} x_{2,r}}{x_{1,t}^2 + x_{2,t}^2}.$$

Mediante le (3) operiamo ora la trasformazione

$$(8) \quad \begin{cases} x_1 = x_1(t, r) \\ x_2 = x_2(t, r) \\ y = y \end{cases}$$

la quale trasforma il parallelepipedo $C \equiv [t_1 \leq t \leq t_2; 0 \leq r \leq r_1; 0 \leq y \leq y_0]$ dello spazio (t, r, y) nel cilindro τ dello spazio (x_1, x_2, y) in modo biunivoco e bicontinuo; dalle curve γ_r vengono così individuate delle superfici Γ_r luogo dei punti (x_1, x_2, y) per cui $(x_1, x_2) \in \gamma_r$ e $0 < y \leq y_0$.

Introduciamo ora una funzione « peso » $P(t, r, y)$ sulla quale supponiamo che:

a) $P(t, r, y)$ sia continua e positiva in tutta C e tale che il prodotto $P\alpha$, considerato attraverso l'inversa della (8) come funzione di (x_1, x_2, y) , sia in $\tau - (\bar{s}_1 + \overline{F_1 D})$ funzione di classe 2

b) per ogni r e ogni y tali che $0 < r \leq r_0$, $0 \leq y \leq y_0$ esista e sia limitata quasi-ovunque in (t_1, t_2) la derivata $(P\beta)_t$; per gli stessi r e y e per quasi-tutti i t di (t_1, t_2) esista la derivata P_r e sia limitata nell'intorno di ogni tale r al variare di y in $(0, y_0)$ e di t in (t_1, t_2) .

β) Fatte queste premesse sia $u(x_1, x_2, y)$ una funzione soddisfacente alle seguenti condizioni:

- 1) è soluzione regolare di $E(u) = 0$ in $\tau - \sigma$,
- 2) è continua in $\tau - (\bar{s}_1 + \overline{F_1 D})$,
- 3) ha le derivate prime $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ e $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ continue in $\tau - (\bar{s}_1 + \overline{F_1 D})$.

Si consideri per $0 < r \leq r_0$ la funzione di r

$$\int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_2} P(t, r, y) u^2[x_1(t, r), x_2(t, r), y] dy dt.$$

Possiamo derivare questa funzione rispetto ad r , per le ipotesi fatte, ed ottenere in virtù anche delle (6):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_2} P u^2 dy dt &= \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_2} P_r u^2 dy dt + 2 \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_2} P u \left[\frac{\partial u}{\partial x_1} x_{1,r} + \frac{\partial u}{\partial x_2} x_{2,r} \right] dy dt = \\ &= \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_2} P_r u^2 dy dt + 2 \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_2} P \alpha u \left[- \frac{\partial u}{\partial x_1} x_{2,t} + \frac{\partial u}{\partial x_2} x_{1,t} \right] dy dt + \\ &+ 2 \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_2} P \beta u \left[\frac{\partial u}{\partial x_1} x_{1,t} + \frac{\partial u}{\partial x_2} x_{2,t} \right] dy dt = \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_2} P_r u^2 dy dt + \\ &+ 2 \int_{s_{r,1}} P \alpha u \frac{du}{dv_r} d\sigma + 2 \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_2} P \beta u \frac{\partial u}{\partial t} dy dt \end{aligned}$$

dove $s_{r,1}$ e v_r hanno il seguente significato: indichiamo con D_r il dominio regolare del piano (x_1, x_2) delimitato da γ_r e dall'arco di F_2D avente per estremi $Q_{1,r}$ e $Q_{2,r}$, con τ_r il cilindro costituito dai punti (x_1, x_2, y) per cui $(x_1, x_2) \in D_r$ e $0 \leq y \leq x_0$, con σ_r la frontiera di τ_r , con B_r la base superiore di τ_r , con s_r la superficie laterale di τ_r (precisamente l'insieme dei punti (x_1, x_2, y) per cui $(x_1, x_2) \in FD_r$, $0 < y \leq y_0$); allora $s_{r,1}$ sarà la parte di s_r costituita da Γ_r , $s_{r,2}$ la rimanente parte di s_r ; v_r sarà infine la normale a s_r orientata verso l'interno di τ_r .

Integrando per parti, in virtù delle (5), si ha

$$2 \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_2} P \beta u \frac{\partial u}{\partial t} dy dt = - \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_2} u^2 (P \beta)_t dy dt$$

e dunque

$$\frac{d}{dr} \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_2} P u^2 dy dt = \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_2} [P_r - (P \beta)_t] u^2 dy dt + 2 \int_{s_r} P \alpha u \frac{du}{dv_r} d\sigma - 2 \int_{s_{r,2}} P \alpha u \frac{du}{dv_r} d\sigma$$

D'altra parte come conseguenza della formula di GREEN, si ha

$$\begin{aligned} 2 \int_{s_r} P \alpha u \frac{du}{dv_r} d\sigma &= \int_{\tau_r} u^2 E^*(P \alpha) d\tau - 2 \int_{\tau_r} P \alpha \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right] d\tau + \\ &+ \int_{s_r} u^2 \frac{d(P \alpha)}{dv_r} d\sigma + \int_{D_r} u^2 P \alpha d\sigma - \int_{B_r} u^2 P \alpha d\sigma \end{aligned}$$

e quindi in definitiva si ha l'identità fondamentale

$$\begin{aligned} (9) \quad \frac{d}{dr} \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_2} P u^2 dy dt &= \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_2} \left[P_r - (P \beta)_t + \frac{d(P \alpha)}{dv_r} \sqrt{x_{1,t}^2 + x_{2,t}^2} \right] u^2 dy dt - \\ &- 2 \int_{s_{r,2}} P \alpha u \frac{du}{dv_r} d\sigma + \int_{s_{r,2}} u^2 \frac{d(P \alpha)}{dv_r} d\sigma + \int_{\tau_r} u^2 E^*(P \alpha) d\tau - \\ &- 2 \int_{\tau_r} P \alpha \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right] d\tau + \int_{D_r} u^2 P \alpha d\sigma - \int_{B_r} u^2 P \alpha d\sigma. \end{aligned}$$

3. - Determinazione della classe $\{u\}$ e teorema di unicità in essa. - Si consideri ora la classe $\{u\}$ delle funzioni $u(x_1, x_2, y)$ ciascuna delle quali soddisfi alle condizioni 1), 2), 3) del numero precedente e inoltre anche alle seguenti

$$4) \quad \frac{du}{dv} = 0 \text{ su } s_2, \quad u = 0 \text{ su } D - \overline{F_1 D};$$

5) converge « in media » rispetto alla funzione peso $P(t, r, y)$ sul sistema delle superfici $s_{r,1}$ nel senso che esiste una funzione $\mu(t, y)$ di quadrato sommabile nel rettangolo $(t_1 < t < t_2; 0 < y \leq y_0)$ tale che

$$(10) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_2} P(t, r, y) \{u[x_1(t, r), x_2(t, r), y] - \mu(t, y)\}^2 dy dt = 0.$$

Si osservi che poichè P è positiva e continua in C la condizione (12) equivale alla seguente

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_2} \{u[x_1(t, r), x_2(t, r), y] - \mu(t, y)\}^2 dy dt = 0.$$

Abbiamo così contemporaneamente precisato il problema « misto » in una delle due impostazioni che gli daremo in questo lavoro, fissando anche mediante le 4) e 5) in che senso debbano essere assunti i dati al contorno.

Del problema così impostato ci interesseremo ora, dimostrando un teorema di unicità:

TEOREMA DI UNICITÀ: Se

i) in tutti i punti interni a τ è

$$E^*(P\alpha) \leq 0$$

ii) nei punti di s_2 è

$$\frac{d(P\alpha)}{dv} \leq 0$$

iii) esiste un numero M tale che per r sufficientemente piccolo ($0 < r \leq r_0$), $t_1 < t < t_2$ e $0 < y \leq y_0$ sia

$$P_r - (P\beta)_t + \frac{d(P\alpha)}{dv_r} \sqrt{x_{1,t}^2 + x_{2,t}^2} \leq MP;$$

allora esiste nella classe $\{u\}$ solo la funzione identicamente nulla che converge « in media » su $s_{r,1}$ allo zero, per la quale cioè è

$$(11) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_2} P(t, r, y) u^2[x_1(t, r), x_2(t, r), y] dy dt = 0.$$

Infatti dalla (9) si avrebbe almeno per $0 < r \leq r_0$

$$\frac{d}{dr} \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_2} P u^2 dy dt \leq M \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_2} P u^2 dy dt - 2 \int_{\tau_r} P \alpha \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right] dt - \int_{B_r} u^2 P \alpha d\sigma$$

e se u non fosse $\equiv 0$ in τ , il secondo membro, poichè $P\alpha$ è positivo in τ e per la (11), sarebbe negativo per r sufficientemente piccolo e quindi lo sarebbe pure il primo membro;

e allora la funzione di $r \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_2} P u^2 dy dt$ sarebbe decrescente nell'intorno dello zero e, poichè essa è positiva per $r > 0$, la (11) sarebbe assurda.

Il teorema di unicità è stato dunque dimostrato nelle ipotesi che la trasformazione (8) e la funzione peso P soddisfino alle I), II), III), a), b) del n. 2 ed alle i), ii), iii), del presente numero. Circa la possibilità di soddisfare a queste condizioni si possono ripetere osservazioni analoghe a quelle fatte nel n. 4 della memoria citata in ³), relativa alle equazioni di tipo ellittico; in particolare la condizione iii) può essere trasformata opportunamente ⁷) e si può anche costruire un esempio del tutto simile a quello ivi considerato per l'equazione di Laplace. Ciò prova l'esistenza di trasformazioni siffatte e di funzioni peso corrispondenti.

4. - Il teorema di esistenza nella classe $\{u\}$ - Dimostriamo ora il seguente

TEOREMA: *Nelle ipotesi del teorema di unicità del n. 3, prefissata una funzione $\mu(t, y)$ di quadrato sommabile in*

⁷) Sarà utile per questo tener presente il n. 2 di [17].

($t_1 < t < t_2$; $0 < y \leq y_0$), esiste una (e naturalmente una sola) funzione u nella classe $\{u\}$ soddisfacente alla

$$(10) \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_2} (P(t, r, y) \{u[x_1(t, r), x_2(t, r, y)] - \mu(t, y)\}^2 dy dt = 0.$$

a) In virtù del teorema di completezza del n. 1, γ) possiamo costruire una successione $\{u_n(P)\}$ ($n = 1, 2, \dots$) di combinazioni lineari delle funzioni del sistema $\{w_k(P)\}$ tale che

$$(12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_2} \{u_n[x_1(t), x_2(t), y] - \mu(t, y)\}^2 dy dt + \int_{s_2} \left(\frac{du_n}{dv} \right)^2 d\sigma + \int_D u_n^2 d\sigma \right\} = 0.$$

Supponiamo inizialmente che esista una costante H per cui risulti

$$(13) \quad \int_{\tau} u_n^2 d\tau \leq H \quad (n = 1, 2, \dots)$$

e dimostriamo subito alcune disuguaglianze integrali per le funzioni u_n che ci interesseranno in seguito.

In condizioni note di regolarità per la funzione v (per es. se v è continua in τ , con derivate $\frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}$ continue in $\tau - \sigma$ e tali che $E^*(v)$ risulti sommabile in $\tau - \sigma$, e con le derivate $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ e $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ limitate in tutto τ), segue dalla formula di Green per ogni n la seguente relazione

$$(14) \quad 2 \int_s v u_n \frac{du_n}{dv} d\sigma - \int_{\tau} u_n^2 E^*(v) d\tau + 2 \int_{\tau} v \left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_2} \right)^2 \right] d\tau - \\ - \int_s u_n^2 \frac{dv}{dv} d\sigma - \int_D u_n^2 v d\sigma + \int_B u_n^2 v d\sigma = 0.$$

Sia ora φ una qualunque funzione definita su $\bar{s}_2$, non negativa, annullantesi nei punti (Q_1, y) e (Q_2, y) ($0 \leq y \leq y_0$)^{a)},

a) Cioè nei punti di $\bar{s}_2$ che si proiettano ortogonalmente in Q_1 e Q_2 .

continua e con derivate quasi-ovunque limitate ⁹⁾. Prendiamo nella (14) la funzione v in modo da soddisfare alle condizioni

$$\frac{dv}{dv} \geq \varphi^2 \text{ su } s_2, \quad v \leq 0 \text{ in } \tau, \quad v = 0 \text{ su } s_1, \quad |v| \leq k\varphi \text{ su } s_2,$$

$E^*(v)$ limitato in $\tau - \sigma$.

k essendo una costante positiva. Si avrà allora per ogni n

$$\begin{aligned} \int_{s_2} \varphi^2 u_n^2 d\sigma &\leq \int_{s_2} \frac{dv}{dv} u_n^2 d\sigma \leq \text{extsup}_{\tau-\sigma} |E^*(v)| \int_{\tau} u_n^2 d\tau + \max_D |v| \int_D u_n^2 d\sigma + \\ &+ \text{extsup}_{s_1} \left| \frac{dv}{dv} \right| \int_{s_1} u_n^2 d\sigma + 2k \int_{s_2} \varphi |u_n| \left| \frac{du_n}{dv} \right| d\sigma \leq \\ &\leq K_\varphi \left\{ \int_{\tau} u_n^2 d\tau + \int_{D+s_1} u_n^2 d\sigma \right\} + H_\varphi \left\{ \int_{s_2} \varphi^2 u_n^2 d\sigma \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{s_2} \left(\frac{du_n}{dv} \right)^2 d\sigma \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

con K_φ e H_φ costanti positive dipendenti solo dalla funzione φ . Ne segue, tenendo presente anche la (12) e la (13)

$$(15) \quad \int_{s_2} \varphi^2 u_n^2 d\sigma \leq L_\varphi \left\{ \int_{\tau} u_n^2 d\tau + \int_{D+s_1} u_n^2 d\sigma + \int_{s_2} \left(\frac{du_n}{dv} \right)^2 d\sigma \right\} \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$(16) \quad \int_{s_2} \varphi^2 u_n^2 d\sigma \leq L'_\varphi \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$(17) \quad \int_{s_2} \varphi^2 (u_m - u_n)^2 d\sigma \leq 4L'_\varphi \quad (m, n=1, 2, \dots)$$

dove L_φ e L'_φ sono costanti dipendenti solo dalla φ .

β) Applichiamo ora l'identità (9) alla differenza $u_m - u_n$ di due qualunque delle u_n ; per le ipotesi ammesse si ha per

⁹⁾ Le derivate si intendono naturalmente fatte rispetto ai parametri cui si riferisce la superficie s_2 ; per es. la lunghezza d'arco su $\overline{F_2 D}$ e y .

$$0 < r \leq r_0$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_2} P(t, r, y) (u_m - u_n)^2 dy dt &\leq M \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_2} P(t, r, y) (u_m - u_n)^2 dy dt + \\ &+ 2 \int_{s_{r,2}} P \alpha |u_m - u_n| \left| \frac{d(u_m - u_n)}{dv} \right| d\sigma + \int_{D_r} (u_m - u_n)^2 P \alpha d\sigma \end{aligned}$$

e moltiplicando ambo i membri per e^{-Mr} dopo ovvi passaggi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(e^{-Mr} \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_2} P(t, r, y) (u_m - u_n)^2 dy dt \right) &\leq \\ &\leq K \left\{ \int_{s_{r,2}} |u_m - u_n| \left| \frac{d(u_m - u_n)}{dv} \right| d\sigma + \int_D (u_m - u_n)^2 d\sigma \right\} \end{aligned}$$

con K costante opportuna; integrando allora tra ε e r ($0 < \varepsilon < r$) e facendo poi tendere ε a zero, si ha

$$\begin{aligned} e^{-Mr} \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_2} P(t, r, y) (u_m - u_n)^2 dy dt &\leq \\ &\leq \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_2} P(t, 0, y) \{ u_m[x_1(t), x_2(t), y] - u_n[x_1(t), x_2(t), y] \}^2 dy dt + \\ &+ K \int_0^r d\rho \int_{s_{\rho,2}} |u_m - u_n| \left| \frac{d(u_m - u_n)}{dv} \right| d\sigma + Kr \int_D (u_m - u_n)^2 d\sigma. \end{aligned}$$

Prendiamo in considerazione il secondo integrale del secondo membro. Riferiamo la superficie s alla lunghezza d'arco s della curva FD e all'altezza y . I punti Q_2 e Q_1 di FD corrispondono rispettivamente ai valori s_2 e s_1 di s con $s_2 < s_1$; e così pure i punti $Q_{2,r}$ e $Q_{1,r}$ per $0 < r \leq r_0$ corrispondono ai valori $s_2(r)$ e $s_1(r)$ di s . Ovviamente $s_2(r)$ [$s_1(r)$] è funzione crescente [decescente] e di classe 1 in $(0, r_0)$ e risulta $s_2(0) = s_2$ [$s_1(0) = s_1$], e la funzione inversa $r_2(s)$ [$r_1(s)$] è anche di classe 1 e crescente [decescente] nell'intervallo

$(s_2 \leq s \leq s_2(r_0))[(s_1(r_0) \leq s \leq s_1)]$, risultando inoltre $r_2(s_2) = 0$ $[r_1(s_1) = 0]$. Si ha allora per $0 < r \leq r_0$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^r d\rho \int_{s_{\rho, 2}} |u_m - u_n| \left| \frac{d(u_m - u_n)}{dv} \right| d\sigma = \int_0^r d\rho \int_{s_2(\rho)}^{s_1(\rho)} ds \int_0^{y_0} |...| dy \leq \\
 & \leq \int_0^{r_0} dr \int_{s_2(r)}^{s_1(r)} ds \int_0^{y_0} |...| dy = \int_0^{r_0} dr \int_{s_2(r)}^{s_2(r_0)} ds \int_0^{y_0} |...| dy + \int_0^{r_0} dr \int_{s_2(r_0)}^{s_1(r_0)} ds \int_0^{y_0} |...| dy + \\
 & + \int_0^{r_0} dr \int_{s_1(r_0)}^{s_1(r)} ds \int_0^{y_0} |...| dy = \int_{s_2}^{s_2(r_0)} ds \int_0^{r_2(s)} dr \int_0^{y_0} |...| dy + \int_{s_2(r_0)}^{s_1(r_0)} ds \int_0^{r_0} dr \int_0^{y_0} |...| dy + \\
 & + \int_{s_1(r_0)}^{s_1} ds \int_0^{r_1(s)} dr \int_0^{y_0} |...| dy = \int_{s_2}^{s_2(r_0)} r_2(s) ds \int_0^{y_0} |...| dy + \int_{s_2(r_0)}^{s_1(r_0)} r_0 ds \int_0^{y_0} |...| dy + \\
 & + \int_{s_1(r_0)}^{s_1} r_1(s) ds \int_0^{y_0} |...| dy = \int_{s_2} \varphi^2(u_m - u_n)^2 d\sigma \left\{ \frac{1}{2} \right\} \int \left(\frac{d(u_m - u_n)}{dv} \right)^2 d\sigma \left\{ \frac{1}{2} \right\}
 \end{aligned}$$

dove $\varphi(s, y)$ è la funzione così definita per ogni y :

$$\begin{aligned}
 \varphi(s, y) &= r_2(s) \quad \text{per } s_2 \leq s < s_2(r_0), \quad \varphi(s, y) = r_0 \quad \text{per } s_2(r_0) \leq s < s_1(r_0), \\
 \varphi(s, y) &= r_1(s) \quad \text{per } s_1(r_0) \leq s \leq s_1.
 \end{aligned}$$

Possiamo allora concludere in virtù della (17) che è

$$\begin{aligned}
 (18) \quad & \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_2} P(t, r, y) \{ u_m[x_1(t, r), x_2(t, r), y] - u_n[x_1(t, r), x_2(t, r), y] \}^2 dy dt \leq \\
 & \leq \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_1} P(t, 0, y) \{ u_m[x_1(t), x_2(t), y] - u_n[x_1(t), x_2(t), y] \}^2 dy dt + \\
 & + 2K \vee \overline{L'}_\varphi \left\{ \int_{s_2} \left(\frac{d(u_m - u_n)}{dv} \right)^2 d\sigma \right\}^{\frac{1}{2}} + Kr_0 \int_D (u_m - u_n)^2 d\sigma
 \end{aligned}$$

e ciò per ogni m e n e per $0 < r \leq r_0$.

Osserviamo subito che di qui, per la (12), si ha la convergenza in media nel rettangolo $(t_1 \leq t \leq t_2; 0 < y \leq y_0)$ rispetto alla funzione peso $P(t, r, y)$ delle $u_n[x_1(t, r), x_2(t, r), y]$, *uniformemente* al variare di r tra 0 e r_0 e la convergenza in media si ha anche in sostanza rispetto alla funzione peso 1, poichè P è positiva e continua in C .

Dalle (18), e sempre poichè P è positiva e continua in C , si ha poi ancora per ogni r^* fissato tra 0 e r_0 :

$$\begin{aligned} & \int_0^{r^*} \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_2} \{ u_m[x_1(t, r), x_2(t, r), y] - u_n[x_1(t, r), x_2(t, r), y] \}^2 dr dy dt \leq \\ & \leq L^* \left\{ \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_2} P(t, 0, y) \{ u_m[x_1(t), x_2(t), y] - u_n[x_1(t), x_2(t), y] \}^2 dy dt + \right. \\ & \quad \left. + \left[\int_{s_2} \left(\frac{d(u_m - u_n)}{dv} \right)^2 d\sigma \right]^{\frac{1}{2}} + \int_D (u_m - u_n)^2 d\sigma \right\} \end{aligned}$$

con L^* costante opportuna e quindi per la (12) si ha la convergenza in media delle $u_n[x_1(t, r), x_2(t, r), y]$ nel dominio $(0 \leq r \leq r^*, t_1 \leq t \leq t_2, 0 \leq y \leq y_0)$. Ma allora si ha la convergenza in media delle $u_n(x_1, x_2, y)$ nell'insieme $\tau - \tau_{r^*}$, poichè è

$$\begin{aligned} \int_{\tau - \tau_{r^*}} (u_m - u_n)^2 d\tau &= \int_0^{r^*} \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_2} (u_m - u_n)^2 \left| \frac{\partial(x_1, x_2, y)}{\partial(r, t, y)} \right| dr dy dt \leq \\ &\leq L \int_0^{r^*} \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_2} (u_m - u_n)^2 dr dy dt \end{aligned}$$

con L costante opportuna.

Vogliamo ora dimostrare che si ha addirittura la convergenza in media delle $u_n(x_1, x_2, y)$ in tutto τ . Infatti, fissato r^* tra 0 e r_0 , si prenda nella (14) la funzione v in modo che risulti

$$\text{ext inf}_{\tau_{r^*}} E^*(v) > 0, \quad E^*(v) \text{ limitato in } \tau - \sigma, \quad v \leq 0 \text{ in } \tau,$$

$$v = 0 \quad \text{su} \quad s_1, \quad \frac{dv}{dv} \geq 0 \quad \text{su} \quad s_2.$$

Si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\tau, s_2} E^*(v) u_n^2 d\tau &\leq \int_{\tau - \tau, s_2} |E^*(v)| u_n^2 d\tau + \int_D |v| u_n^2 d\sigma + \\ &+ 2 \int_{s_2} |v| |u_n| \left| \frac{du_n}{dv} \right| d\sigma + \int_{s_1} \left| \frac{dv}{dv} \right| u_n^2 d\sigma \end{aligned}$$

e in definitiva per la (16) dopo passaggi abituali

$$\int_{\tau, s_2} u_n^2 d\tau \leq K^* \left\{ \int_{\tau - \tau, s_2} u_n^2 d\tau + \int_{D + s_1} u_n^2 d\sigma + \int_{s_2} \left(\frac{du_n}{dv} \right)^2 d\sigma \right\}^{\frac{1}{2}}$$

con K^* costante dipendente solo da v ; ne segue, per la (12) e per la provata convergenza in media delle u_n in $\tau - \tau, s_2$, la convergenza in media delle u_n in τ, s_2 e quindi anche in tutto τ .

γ) Diciamo dunque $u(x_1, x_2, y)$ la funzione verso la quale converge in media in τ la successione $\{u_n\}$; si ha dunque

$$(19) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\tau} (u_n - u)^2 dt = 0.$$

Non è allora difficile dimostrare la convergenza uniforme della $\{u_n\}$ e della successione delle derivate prime in ogni insieme chiuso interno a τ , ottenendo così anche che la funzione u è soluzione regolare in $\tau - \sigma$ della $E(u) = 0$.

Basterebbe per es. adoperare opportunamente formule di media volumetrica del tipo di quelle trovate recentemente da B. PINI ¹⁰⁾ per l'equazione generalizzata del calore oppure an-

¹⁰⁾ Si veda la memoria [17]; si osservi però che la formula di media che interesserebbe maggiormente a noi non è quella esplicitamente dimostrata nel n. 1 di detta memoria, bensì quella sostanzialmente rilevata nel n. 5, formula (38), anche se non esplicitamente enunciata; insomma qui servirebbe meglio una formula di media analoga a quella che per le equazioni del tipo ellittico il PINI ha trovato in [18].

che le formule risolutive per il problema primo relativo alla $E(u) = 0$ ed espresse mediante la funzione di GREEN.

Noi qui ci limiteremo però, più brevemente, a dimostrare questa proprietà per una successione estratta dalla $\{u_n\}$; e ciò del resto ci basterà per il seguito.

Si costruisca nel piano (x_1, x_2) per ogni h positivo sufficientemente piccolo un dominio D'_h interno al dominio base D e delimitato da una curva FD'_h « parallela » alla FD , ottenuta cioè prendendo per ogni punto P di FD sulla normale interna un punto P_h a distanza h da P stesso. Per h sufficientemente piccolo ($0 < h \leq h_0$) otteniamo così un dominio D'_h dello stesso tipo di D . Costruiamo ora il cilindro τ'_h di altezza y_0 e di base inferiore D'_h , luogo cioè dei punti (x_1, x_2, y) per cui $(x_1, x_2) \in D'_h$ e $0 \leq y \leq y_0$. Nell'insieme $\tau - \tau'_{h_0}$ la successione $\{u_n\}$ converge in media alla u ; e poichè, s'_h essendo la superficie laterale di τ'_h , risulta

$$\int_{\tau - \tau'_{h_0}} (u_n - u)^2 d\tau = \int_0^{h_0} dh \int_{s'_h} (u_n - u)^2 d\sigma$$

otteniamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{h_0} dh \int_{s'_h} (u_n - u)^2 d\sigma = 0.$$

Per un teorema di G. FICHERA [7, n. 5] possiamo allora dire che la successione di funzioni della h

$$\varphi_n(h) = \int_{s'_h} (u_n - u)^2 d\sigma$$

converge in misura a zero in $(0, h_0)$ e quindi da essa potremo estrarre una sottosuccessione, che continueremo per semplicità a chiamare ancora $\{\varphi_n(h)\}$, convergente quasi-ovunque in $(0, h_0)$ a zero, cioè

$$(20) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{s'_h} (u_n - u)^2 d\sigma = 0 \quad h \text{ quasi-ovunque in } (0, h_0)$$

Sia ora I un insieme chiuso interno a τ ; esisterà almeno un h (e anzi infiniti) per cui l'insieme I sia interno anche a

τ'_h e valga la (20). Sia allora $G_h(Q, P)$ la funzione di GREEN relativa al dominio τ'_h e al primo problema di valori al contorno per la (1); si ha per ogni n e per ogni P interno a τ'_h :

$$(21) \quad u_n(P) = \int_{s'_h} u_n(Q) \frac{dG_h(Q, P)}{dv_Q} d\sigma_Q + \int_{D'_h} u_n(Q) G_h(Q, P) d\sigma_Q$$

e allora dalle (20), dalla convergenza in media a zero delle u_n in D e da note proprietà di continuità della funzione di GREEN, si ottiene la convergenza uniforme in I delle $u_n(P)$ alla $u(P)$; analogamente derivando rispetto a x_1 , x_2 e y ambo i membri della (21), poichè I è interno a τ'_h ed è chiuso, si ha la convergenza uniforme in I delle derivate prime delle $u_n(P)$.

Inoltre, passando al limite per $n \rightarrow \infty$ nella (21), otteniamo anche che la funzione $u(P)$ soddisfa per ogni P interno a τ'_h alla

$$(22) \quad u(P) = \int_{s'_h} u(Q) \frac{dG_h(Q, P)}{dv_Q} d\sigma_Q.$$

Ciò dimostra che la u è soluzione regolare in $\tau'_h - \sigma'_h$ della $E(u) = 0$ e, poichè h può essere preso vicino a zero quanto si vuole, essa è tale anche in $\tau - \sigma$.

δ) Passiamo a stabilire ora che la funzione $u(P)$ così trovata appartiene alla classe $\{u\}$.

Anzitutto dalla (22) si ottiene già che *la u è continua in $D'_h - FD'_h$ e quindi in $D - FD$ per l'arbitrarietà di h ; si ottiene da essa inoltre che è*

$$u(P) = 0 \quad \text{per } P \text{ in } D - FD.$$

È anche ormai immediato dimostrare che la $u(P)$ soddisfa alla condizione (10). Infatti abbiamo già osservato in β), come conseguenza della (18), che la successione $\{u_n[x_1(t, r), x_2(t, r), y]\}$ converge in media nel rettangolo $(t_1 \leq t \leq t_2; 0 < y \leq y_0)$, naturalmente verso $u[x_1(t, r), x_2(t, r), y]$, uniformemente rispetto a r in $(0, r_0)$.

E poichè si ha:

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_2} \{ u[x_1(t, r), x_2(t, r), y] - \mu(t, y) \}^2 dy dt \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq \left\{ \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_2} \{ u[x_1(t, r), x_2(t, r), y] - u_n[x_1(t, r), x_2(t, r), y] \}^2 dy dt \right\}^{\frac{1}{2}} + \\ & + \left\{ \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_2} \{ u_n[x_1(t, r), x_2(t, r), y] - u_n[x_1(t), x_2(t), y] \}^2 dy dt \right\}^{\frac{1}{2}} + \\ & + \left\{ \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_2} \{ u_n[x_1(t), x_2(t), y] - \mu(t, y) \}^2 dy dt \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

ne scende, in virtù anche della (12) e della continuità in τ delle $u_n(x_1, x_2)$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_2} \{ u[x_1(t, r), x_2(t, r), y] - \mu(t, y) \}^2 dy dt = 0$$

e quindi la u soddisfa alla (10).

ε) Facciamo ora una nuova osservazione sulla convergenza della successione $\{u_n\}$. Sia D^* un qualunque dominio regolare del piano (x_1, x_2) , il quale sia contenuto in D e abbia comune con D una parte di frontiera e precisamente un sottoarco proprio $\overline{F_2 D^*}$ di $\overline{F_2 D}$, avente entrambi gli estremi contenuti in $F_2 D$, mentre la rimanente parte di frontiera $F_1 D^* = \overline{F D^*} - \overline{F_2 D^*}$ sia interna a D . Costruiamo il cilindro τ^* di base inferiore D^* e altezza y_0 , luogo cioè dei punti (x_1, x_2, y) per cui $(x_1, x_2) \in D^*$ e $0 \leq y \leq y_0$.

Se nella (14) prendiamo la funzione v in modo che siano soddisfatte le seguenti relazioni

$$v > 0 \text{ in } \tau^*, \quad v \geq 0 \text{ in } \tau, \quad v = 0 \text{ su } s_1, \quad \frac{dv}{dy} \leq 0 \text{ su } s_2$$

$E^*(v)$ limitato in $\tau - \sigma$

otteniamo per ogni n

$$\begin{aligned} 2 \int_{\tau^*} v \left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_2} \right)^2 \right] d\tau &\leq 2 \int_{\tau} v \left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_2} \right)^2 \right] d\tau \leq \\ &\leq \text{extsup}_{\tau-\sigma} |E^*(v)| \int_{\tau} u_n^2 d\tau + 2 \int_{s_2} |v| |u_n| \left| \frac{du_n}{dv} \right| d\sigma + \\ &+ \text{extsup}_{s_1} \left| \frac{dv}{dv} \right| \int_{s_1} u_n^2 d\sigma + \text{extsup}_D |v| \int_D u_n^2 d\sigma \end{aligned}$$

e quindi per le (16) e i soliti passaggi

$$\int_{\tau^*} \left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_2} \right)^2 \right] d\tau \leq H^* \left\{ \int_{\tau} u_n^2 d\tau + \int_{D+s_1} u_n^2 d\sigma + \int_{s_2} \left(\frac{du_n}{dv} \right)^2 d\sigma \right\}^{\frac{1}{2}}$$

con H^* dipendente solo da v ; e allora dalle (12) e (19) si ottiene la convergenza in media delle $\frac{\partial u_n}{\partial x_i}$ ($i=1, 2$) in τ^* , cioè

$$(23) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\tau^*} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\tau = 0 \quad (i=1, 2).$$

ζ) Sia ora M' un qualunque punto di s_2 e M la sua proiezione su $F_2 D$. Vogliamo costruire un dominio D^* del tipo di quelli visti in ε), il quale sia delimitato da una curva semplice chiusa di classe $1H$, contenga il punto M come punto **frontiera** e, più precisamente, come punto interno all'arco $\overline{F_2 D^*}$ (cioè non coincidente con gli estremi di $\overline{F_2 D^*}$) ed inoltre goda di una ulteriore proprietà che preciseremo.

Nel verso fissato su $F_2 D$ dal verso di percorrenza di FD , i punti Q_1 , Q_2 e M si seguano in questo ordine $Q_2 < M < Q_1$. Sia M_1 un punto tra M e Q_1 distinto da essi: $M < M_1 < Q_1$. Si consideri una trasformazione biunivoca e bicontinua

$$(24) \quad \begin{cases} x_2 = \varphi_2(s, z) \\ x_1 = \varphi_1(s, z) \end{cases}$$

del rettangolo $R^* \equiv (0 \leq s \leq l, z_1 \leq z \leq z_2)$ del piano (s, z)

in un dominio D_0^* del piano (x_1, x_2) del tipo considerato in ϵ), in modo tale che

a') $\overline{F_2 D_0^*}$ coincida con il sottoarco $\gamma(M, M_1)$ di $F_2 D$ di estremi M e M_1 e si ottenga dalla (24) per $s=0$;

b') per ogni z fissato di (z_1, z_2) le (24) diano la rappresentazione parametrica in funzione della lunghezza d'arco s di una curva γ_s di classe $1H$, la quale nel punto M_s , che si ottiene dalle (24) per $s=0$, sia tangente (in direzione e verso) alla $\gamma(M, M_1)$ e costituisca insieme all'arco $\gamma(M, M_s)$ una curva pure di classe $1H$.

c') la trasformazione inversa della (24)

$$\begin{cases} s = s(x_1, x_2) \\ z = z(x_1, x_2) \end{cases}$$

abbia derivate $s_{x_1}, s_{x_2}, z_{x_1}, z_{x_2}$ continue in $D_0^* - FD_0^*$ e Jacobiano $\frac{\partial(s, z)}{\partial(x_1, x_2)}$ ivi diverso da zero e di quadrato sommabile. Le condizioni di regolarità supposte su FD permettono senz'altro la costruzione della (24)¹¹⁾.

Consideriamo ora accanto alla (24) la trasformazione

$$(25) \quad \begin{cases} x_1 = \varphi_1(s, z) \\ x_2 = \varphi_2(s, z) \\ y = y \end{cases} \quad (0 \leq s \leq l, z_1 \leq z \leq z_2, 0 \leq y \leq y_0)$$

la quale trasforma il parallelepipedo $C^*(0 \leq s \leq l, z_1 \leq z \leq z_2, 0 \leq y \leq y_0)$ nel cilindro τ_0^* di base inferiore D_0^* e altezza y_0 . Applicando a questo cilindro τ_0^* le (23), otteniamo la convergenza in media del primo ordine nel parallelepipedo C^* delle derivate parziali $\frac{\partial u_n}{\partial x_i}$ ($i=1, 2$), calcolate naturalmente per $x_1 = \varphi_1(s, z), x_2 = \varphi_2(s, z)$; infatti si ha, essendo lo Jacobiano

¹¹⁾ Si può vedere l'esempio riportato nella memoria citata in ³⁾ nota 12.

della inversa della (25) $\frac{\partial(s, z, y)}{\partial(x_1, x_2, y)}$ di quadrato sommabile in τ_0^* ,

$$\begin{aligned} \iint\limits_{C^*} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| ds dz dy &= \int\limits_{\tau_0^*} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \left| \frac{\partial(s, z, y)}{\partial(x_1, x_2, y)} \right| d\tau \leq \\ &\leq \left\{ \int\limits_{\tau_0^*} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\tau \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int\limits_{\tau_0^*} \left(\frac{\partial(s, z, y)}{\partial(x_1, x_2, y)} \right)^2 d\tau \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

e quindi per la (23) si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint\limits_{C^*} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| ds dz dy = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Ne segue, per un teorema già citato di G. FICHERA [8], la convergenza in misura a zero nell'intervallo (z_1, z_2) della successione di funzioni

$$\psi_{i,n}(z) = \int_0^1 \int_0^{y_0} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| ds dy \quad (i = 1, 2)$$

e quindi l'esistenza di una sottosuccessione della $\{\psi_{i,n}(z)\}$, che per brevità indicheremo ancora con $\psi_{i,n}(z)$, che converge quasi-dappertutto a zero in (z_1, z_2) . Sia allora z' un valore di z interno a (z_1, z_2) per il quale risulti $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{i,n}(z') = 0$ ($i = 1, 2$), cioè

$$(26) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int\limits_{s_{z'}} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| d\sigma = 0 \quad (i = 1, 2)$$

dove con $s_{z'}$, abbiamo indicato la superficie luogo in punti (x_1, x_2, y) per cui $(x_1, x_2) \in \gamma_{z'}$ e $0 < y \leq y_0$.

Operando successivamente in modo analogo sull'arco di $F_2 D$ di estremi Q_2 e $M^{12})$ potremo costruire una curva $\gamma_{z''}$ avente un solo estremo $M_{z''}$ sull'arco $\gamma(M_2, M)$ di $F_2 D$ ($M_2 < M_{z''} < M$), per il resto interna a D , costituente con l'arco $\gamma(M_{z''}, M)$

¹²⁾ Con l'unica differenza che ora imporremo a $\gamma_{z'}$ e $\gamma(M_2, M)$ di avere in $M_{z'}$ tangenti coincidenti in direzione ma di verso opposto.

di F_2D una curva regolare di classe $1H$ e tale che sulla superficie $s_{s''}$ luogo dei punti (x_1, x_2, y) per cui $(x_1, x_2) \in \gamma_{s''}$ e $0 < y \leq y_0$, la successione $\left\{ \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right\}$, o una sottosuccessione, converga in media del primo ordine a $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, cioè

$$(27) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{s_{s''}} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| d\sigma = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Dopo di che come conseguenza della convergenza in media (del secondo ordine) delle $\frac{\partial u_n}{\partial x_i}$ ($i = 1, 2$) in ogni dominio τ^* del tipo considerato in ϵ) e di ragionamenti del tutto analoghi a quelli già adoperati per una questione analoga in γ) ed ora per le (26) e (27) (cioè in sostanza il ricorso al teorema già citato [8] di G. FICHERA), potremo unire $\gamma_{s'}$ e $\gamma_{s''}$ mediante un arco γ' interno a D tale che la curva $\gamma(M_{s''}, M_{s'}) + \gamma_{s'} + \gamma' + \gamma_{s''}$ costituisca una curva chiusa di classe $1H$ e che sulla superficie s' luogo dei punti (x_1, x_2, y) per cui $(x_1, x_2) \in \gamma'$ e $0 < y \leq y_0$ la successione $\left\{ \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right\}$, o una sua sottosuccessione, converga in media (del secondo ordine addirittura) a $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ ($i = 1, 2$).

In definitiva abbiamo costruito un dominio D^* , quello delimitato da $\gamma(M_{s''}, M_{s'}) + \gamma_{s'} + \gamma' + \gamma_{s''}$, nel piano (x_1, x_2) , godente delle proprietà enunciate all'inizio e in più della proprietà che considerato il corrispondente cilindro τ^* avente per base inferiore D^* e altezza y_0 risulti

$$(28) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{s_1^*} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| d\sigma = 0 \quad (i = 1, 2)$$

dove s_1^* ha il solito significato e nel caso specifico coincide con $s_{s'} + s' + s_{s''}$.

π) Sia ora $N^*(Q, P)$ la funzione di Green relativa al dominio τ^* così costruito e al secondo tipo di problema al con-

torno per la (1); per ogni n , se P è interno a τ^* , si ha

$$(29) \quad u_n(P) = \int_D u_n(Q) N^*(Q, P) d\sigma_Q + \int_{s_1^*} \frac{du_n(Q)}{dv} N^*(Q, P) d\sigma_Q + \\ + \int_{s_2^*} \frac{du_n(Q)}{dv} N^*(Q, P) d\sigma_Q.$$

Il primo membro di (29), essendo P interno a τ^* , converge a $u(P)$ per $n \rightarrow \infty$; nel secondo membro, in virtù della (12) e della (28), si può passare al limite sotto il segno di integrale, ottenendo

$$u(P) = \int_{s_1^*} \frac{du(Q)}{dv} N^*(Q, P) d\sigma_Q$$

Questa relazione ci assicura allora che $u(P)$ è continua in M' insieme alle sue derivate prime e soddisfa ivi alla $\frac{du(M')}{dv} = 0$;

e ci assicura anche la continuità di $u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}$ in $D^* - \overline{F_1 D^*}$.

Se si tien conto dell'arbitrarietà con la quale si è preso M' e si è potuto costruire il dominio D^* , si può affermare dunque la continuità della u e delle $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ e $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ in s_2 e in $D - \overline{F_1 D}$.

In definitiva raccogliendo i risultati ottenuti in γ), δ), η) possiamo affermare che la funzione u così ottenuta appartiene alla classe $\{u\}$ e soddisfa alla (10).

0) Rimane ora da verificare la validità della (13) che abbiamo sinora supposto verificata. Se infatti essa non lo fosse, esisterebbe una sottosuccessione della $\{u_n\}$, che indicheremo ancora con $\{u_n\}$, tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\tau} u_n^2 d\tau = +\infty.$$

Posto allora

$$v_n = \frac{u_n}{\left\{ \int_{\tau} u_n^2 d\tau \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

le nuove funzioni v_n sono ancora soluzioni regolari in $\tau - \sigma$ di $E(u) = 0$, di classe 1 in τ e inoltre soddisfano alle

$$(30) \quad \int_{\tau} v_n^2 d\tau = 1$$

e alla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_{s_1 + D} v_n^2 d\sigma + \int_{s_2} \left(\frac{dv_n}{dv} \right)^2 d\sigma \right\} = 0$$

che è poi la (12) dove si ponga $\mu = 0$. Potremo allora ripetere su di esse i ragionamenti fatti in α), ..., η) ed arrivare così ad una soluzione $\bar{u}$ di $E(u) = 0$, appartenente alla classe $\{u\}$, alla quale la $\{v_n\}$ o una sua sottosuccessione converge in media in τ . Ma allora per il teorema di unicità del n. 3 dovrebbe essere $\bar{u} \equiv 0$, mentre invece dalla (30) si avrebbe $\int_{\tau} \bar{u}^2 d\tau = 1$. Dunque la (13) è valida.

5. - Il teorema di esistenza nella classe $[u]$. - La soluzione trovata nel numero precedente assume « in media » i dati assegnati su s_1 , vale a dire verifica la (10). Che possiamo dire di più se particolarizziamo la funzione $\mu(t, y)$?

Orbene, è immediato verificare che se si suppone in più che la $\mu(t, y)$ sia continua per $t_1 < t < t_2$, $0 \leq y \leq y_0$ e soddisfi alla $\mu(t, 0) = 0$ ($t_1 < t < t_2$) allora la soluzione u del numero precedente è continua anche in ogni punto di $s_1 + F_1 D$ e assume ivi proprio il valore $\mu(t, y)$ assegnato.

Infatti, poichè vale la (19), fissato comunque M' su $s_1 + F_1 D$ possiamo costruire con ragionamenti analoghi a quelli svolti nel n. 4, ζ) un dominio D^* regolare del piano (x_1, x_2) tale che: sia limitato da una curva di classe $1H$, sia contenuto in D , abbia con FD a comune solo un sottoarco $\overline{F_1 D^*}$ di $F_1 D$, il quale contenga nel suo interno (cioè distinto dagli estremi) il punto M proiezione su (x_1, x_2) di M' , e infine, detto τ^* il cilindro di base inferiore D^* e altezza y_0 , la successione $\{u_n\}$, o una sua sottosuccessione, soddisfi alla

$$(31) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{s_2^*} |u_n - u| d\sigma = 0$$

con il solito significato per s_2^* , cioè s_2^* è quella parte della superficie laterale s^* di τ^* che si proietta su $F_2 D^* = F D^* - \overline{F_1 D^*}$.

Detta allora $G^*(Q, P)$ la funzione di GREEN relativa al dominio τ^* e al primo problema di valori al contorno per la (1), si ha per ogni n e per P interno a τ^* , posto al solito $s_1^* = s^* - s_2^*$

$$u_n(P) = \int_{s_1^*} u_n(Q) \frac{dG^*(Q, P)}{dv_Q} d\sigma_Q + \int_{s_2^*} u_n(Q) \frac{dG^*(Q, P)}{dv_Q} d\sigma_Q + \\ + \int_{D^*} u_n(Q) G^*(Q, P) d\sigma_Q$$

e passando al limite per $n \rightarrow \infty$, si ha, ricordando la (31) e la (12)

$$u(P) = \int_{s_1^*} \mu(Q) \frac{dG^*(Q, P)}{dv_Q} d\sigma_Q + \int_{s_2^*} u(Q) \frac{dG^*(Q, P)}{dv_Q} d\sigma_Q.$$

Dunque $u(P)$ è continua anche in M' e soddisfa ivi alla

$$u(M') = \mu(M').$$

In sostanza abbiamo con ciò ottenuto un nuovo teorema di esistenza in cui entrambe le condizioni su s_1 e su s_2 sono assunte « puntualmente ». Precisamente detta $[u]$ la classe delle funzioni $u(P)$ che soddisfano alle seguenti condizioni:

- 1) sono soluzioni regolari di $E(u) = 0$ in $\tau - \sigma$,
- 2') sono continue in $\tau - (\overline{s_1} + \overline{F_1 D}) \cdot (\overline{s_2} + \overline{F_2 D})$,
- 3) hanno le derivate prime $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ e $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ continue in $\tau - (\overline{s_1} + \overline{F_1 D})$,

si ha il seguente

TEOREMA: Esiste almeno una funzione $u(P)$ nella classe $[u]$ che soddisfa alle condizioni al contorno

$$\frac{du(P)}{dv} = 0 \text{ su } s_2, u(P) = 0 \text{ su } D - \overline{F_1 D} \cdot \overline{F_2 D}$$

$$u(P) = \mu(P) \text{ su } s_1$$

dove $\mu(P)$ è una funzione continua su $s_1 + F_1 D$, ivi di quadrato sommabile e nulla su $F_1 D$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] L. AMERIO: *Sull'equazione di propagazione del calore*. (Rend. di Mat. e delle sue appl. (5), vol. 5, 1946, pp. 84-120).
- [2] G. ASCOLI - P. BURGATTI - G. GIBAUD: *Equazioni delle derivate parziali dei tipi ellittico e parabolico*. (Sansoni, Firenze, 1936).
- [3] C. CILIBERTO: *Sul problema di Holmgren - Levi per l'equazione del calore*. (Giorn. Mat. di Battaglini (4), vol. 80, pp. 1-13).
- [4] G. CIMMINO: *Nuovo tipo di condizioni al contorno e nuovo metodo di trattazione per il problema generalizzato di Dirichlet*. (Rend. Circ. Mat., Palermo, t. LXI, 1937, pp. 177-221).
- [5] G. CIMMINO: *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di tipo ellittico*. (Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, vol. XXIII, 1952, pp. 255-286).
- [6] G. DOETSCH: *Theorie und Anwendung der Laplace Trasformation*. (Springer, Berlino, 1937).
- [7] G. FICHERA: *Analisi esistenziale per le soluzioni dei problemi al contorno misti, relativi all'equazione e ai sistemi di equazioni del secondo ordine di tipo ellittico autoaggiunti*. (Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, s. III, vol. I, 1949, pp. 75-100).
- [8] G. FICHERA: *Intorno al passaggio al limite sotto il segno di integrale*. (Portugaliae Math., vol. 4, 1943, pp. 1-20).
- [9] M. GEVREY: *Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique*. (Journal de Math. (6), t. 9, 1913, pp. 305-471; t. 10, 1914, pp. 105-143).
- [10] M. GEVREY: *Sur la résolution des problèmes aux limites relatifs aux équations du second ordre des types elliptique et parabolique*. (C. R. Ac. Sc. t. 171, 1920, pp. 839-842).
- [11] M. GEVREY: *Determination et emploi des fonctions de Green dans les problèmes aux limites relatifs aux équations linéaires du type elliptique*. (Journal de Math. (9), t. 9, 1930, pp. 1-80).
- [12] G. GIBAUD: *Sur certaines opérations aux dérivées partielles du type parabolique*. (C. R. Acc. Sc. t. 195, 1932, pp. 98-100).
- [13] E. E. LEVI: *Sull'equazione del calore*. (Ann. Mat. pura e appl. (3), t. 14, 1908, pp. 187-264).
- [14] E. E. LEVI: *Sul problema di Fourier*. (Atti Acc. Sc. Torino, vol. 43, 1908, pp. 435-453).
- [15] E. MAGENES: *Sull'equazione del calore: Teoremi di unicità e teoremi di completezza connessi col metodo di integrazione di M. Picone. Nota I e II*. (Rend. Sem. Mat. Padova, vol. XXI, 1952, pp. 99-123 e pp. 136-170).
- [16] B. PINI: *Sulle equazioni a derivate parziali, lineari del secondo ordine in due variabili, di tipo parabolico*. (Ann. di Mat. pura e appl. (4), t. XXXII, 1951, pp. 179-204).
- [17] B. PINI: *Un problema di valori al contorno, generalizzato, per l'equazione a derivate parziali lineari parabolica del secondo ordine*. (Riv. Mat. Univ. Parma, vol. 3, 1952, pp. 153-187).
- [18] B. PINI: *Sul problema di Dirichlet per le equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico*. (Rend. Acc. Lincei, s. VIII, vol. XI, 1951, pp. 325-333).