

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

THÉODORE VOGEL

Systèmes dynamiques héréditaires à déferlement

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 22 (1953), p. 64-80

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__64_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__64_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SYSTEMES DYNAMIQUES HEREDITAIRES A DEFERLEMENT

Mémoire () de THÉODORE VOGEL (de Marseille)*

1. Position du problème. — La bibliographie des travaux qui ont pris pour objet l'étude des oscillations non linéaires est, à ce jour, assez considérable, comme on peut s'en rendre compte par le bel exposé de M. SANSONE¹⁾. Toutefois, la plus grande partie porte sur des cas où la non-linéarité est faible; la méthode du petit paramètre de POINCARÉ s'applique alors fort bien, et permet une discussion satisfaisante des solutions. Il est vrai que cette méthode a été également appliquée, à la suite des célèbres recherches de VAN DER POL sur les « oscillations de relaxation », au cas de fortes non-linéarités; mais, d'une part, elle prête alors le flanc à certaines objections qui ne lui permettent guère de conserver qu'une valeur heuristique; et, de l'autre, si les solutions ainsi obtenues peuvent être rendues numériquement aussi exactes qu'on le désire, elles ne mettent que mal en lumière certains aspects qualitatifs qui sont pourtant primordiaux, et que l'observation naïve d'un système physique régi par l'équation traitée permet de saisir immédiatement. C'est ainsi, par exemple, qu'on pourra avoir affaire à une oscillation « en dents de scie », grossièrement décomposable en deux phases sensiblement linéaires de pentes bien différentes, raccordées par une transition plus ou moins rapide: cet aspect frappant de l'oscillation ne se dégage que très difficilement d'une expression sous forme de série, et au prix d'une approximation relativement poussée.

*) Pervenuta in Redazione il 16 gennaio 1953.

¹⁾ Exposé fait au Séminaire mathématique de l'Université de Padoue le 16 Décembre 1952.

¹⁾ G. SANSONE, « Atti del IV Congresso dell'U.M.I. », Taormina (1951).

Il y a là un phénomène très général, et qui s'observe particulièrement bien dans les questions de physique qui font intervenir le couple d'aspects complémentaires du discontinu et du continu : lorsqu'on passe de l'un à l'autre pour améliorer l'adéquation de la théorie au réel, on perd en même temps quelque chose des aspects généraux qui ressortaient bien de la schématisation précédente, plus grossière. Plus on avance, plus « les arbres empêchent de voir la forêt ».

Or, dans beaucoup de questions de ce genre, ce sont précisément les aspects généraux, et notamment, l'existence et la stabilité des solutions périodiques, qui sont intéressants. Il a donc paru utile d'éclairer les très nombreux phénomènes naturels qui se présentent à l'observation naïve comme une succession de phases d'aspect nettement différents (déferlement des vagues, en hydrodynamique ; multivibrateur d'ABRAHAM et BLOCH, en électricité ; échappements, en mécanique, etc.) au moyen d'une schématisation nouvelle, qui mette l'accent sur ce qui les distingue des oscillations linéaires, plutôt que sur ce qui les en rapproche ; et la façon la plus naturelle de le faire n'est-elle pas de supposer discontinue, au sens mathématique du mot, la transition entre les phases successives ? Comme le dit si bien BOUSSINESQ, « si la continuité simplifie les choses quand elle en relie plusieurs qui suivent la même loi, elle les complique, au contraire, le plus souvent, lorsqu'elle établit la transition entre deux catégories d'objets ou de faits régis par deux lois simples différentes ; et c'est alors une discontinuité fictive, un passage brusque de la première catégorie à la seconde, qui rend les questions abordables » ²⁾.

Nous avons donc défini une catégorie de systèmes dynamiques caractérisés par un tel brusque changement de loi, et les avons nommés « systèmes déferlants » pour rappeler, par l'un des exemples les plus connus, l'allure générale de leurs solutions. Dans le cas simple où l'évolution d'un tel système peut être représentée par le mouvement d'un affixe dans un plan de phase, la recherche des solutions périodiques et la

²⁾ J. BOUSSINESQ, *Applications des Potentiels*. Paris, 1885, p. 217.

discussion de leur stabilité sont justiciables des méthodes topologiques de POINCARÉ. On aboutit ainsi à un certain nombre de résultats caractéristiques, que nous avons ensuite vérifiés expérimentalement sur des systèmes matériels pouvant être considérés comme déferlants, à une certaine approximation. Enfin, nous montrons comment ces systèmes peuvent entrer dans la catégorie plus vaste des systèmes héréditaires définis par VOLTERRA, et les conclusions qu'on peut tirer de cette façon de voir, quant à la déformation des solutions lorsque les caractéristiques du système subissent certaines modifications, graduelles ou brusques.

L'exposé qui suit résume brièvement les résultats que nous avons pu obtenir jusqu'ici; cette étude n'en est visiblement qu'à ses débuts, et l'on croit que les mêmes méthodes très simples doivent permettre d'aborder bien d'autres questions encore.

2. Etude directe des systèmes déferlants. — Soit un système dynamique dont l'état est, à tout instant t , caractérisé par les valeurs des deux variables d'état x et y , initialement liées entre elles par la loi

$$\frac{dx}{X_1(x, y)} = \frac{dy}{Y_1(x, y)}.$$

Nous supposons que si, au cours de son mouvement, l'affixe $P(x, y)$ du système atteint un point de la courbe T du plan de phase, cette loi change brusquement, et devient

$$\frac{dx}{X_2(x, y)} = \frac{dy}{Y_2(x, y)}.$$

(Nous pourrions sans inconvénient, en vertu d'un théorème connu de BENDIXSEN, supposer les X et Y convenablement continues, et même les remplacer par des polynomes). La prochaine fois que P atteindra la courbe T , la loi redeviendra brusquement ce qu'elle était à l'origine; et ainsi de suite.

Soient R et S les familles de trajectoires, d'équations respectives $R(x, y) = \text{const}$ et $S(x, y) = \text{const}$, correspondant aux deux lois précédentes prises dans tout le plan. Supposons

que la courbe-frontière T soit telle qu'elle partage le plan en deux domaines (dont celui, D , qui contient la position initiale de l'affixe, sera dit « intérieur »): il passera une R et une S par tout point de T qui ne sera singulier pour aucune des deux familles, et ce point aura, pour chacune d'elles, un caractère attractif ($\odot$) ou répulsif ($\oplus$) bien défini relativement à l'intérieur D , caractère qui dépendra du membre (non écrit ci-dessus) en dt des équations du mouvement. Ne feront exception que les points transitifs (contacts de T avec une R ou une S , et points doubles de T), lesquels découperont sur T des arcs dont tous les points auront même caractère attractif ou répulsif par rapport à la famille correspondante. La frontière de D sera ainsi finalement divisée en arcs de 4 espèces, $\oplus\oplus$, $\oplus\odot$, $\odot\odot$ et $\odot\oplus$, le premier symbole se rapportant aux R et le second aux S .

Lorsque l'affixe du système, suivant dans D une R (ou une S), arrive en un point-frontière répulsif pour S (ou pour R), il repart vers l'intérieur; et si un tel état de choses se reproduit en tous les points-frontières conséquents, nous dirons que le mouvement est *déferlant*. La trajectoire d'ensemble de l'affixe sera alors composée d'une succession d'arcs R et S se coupant sur T .

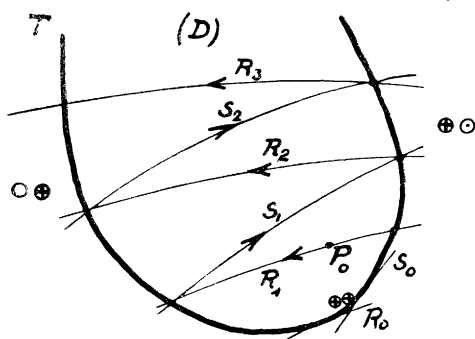


Fig. 1.

Lorsque le point-frontière atteint est $\odot\odot$, par contre, le nouvel arc emprunté est extérieur à D , et en général l'affixe ne rencontrera plus la frontière: l'alternance des lois cesse *ipso facto*, le système prend un caractère classique, il est

donc annihilé en tant que système déferlant. D'ailleurs, la nouvelle trajectoire possède en général des points à l'infini, qui correspondent, du point de vue physique, à la destruction du système matériel; on dira donc que la solution est *disruptive*. Il peut arriver, toutefois, que l'arc extérieur parcouru par l'affixe le ramène en un point-frontière $\oplus\oplus$, et le fasse ainsi pénétrer à nouveau dans D : le mouvement sera encore déferlant, et l'on dira plus généralement qu'il le demeure si l'affixe repasse une infinité de fois dans D pour $t > t'$, quel que soit t' . Enfin, le système sera dit pérenne si son mouvement est déferlant, ou bien si, après avoir quitté D , son affixe reste à l'intérieur d'un domaine fini entourant D .

Une trajectoire déferlante sera cyclique si, après avoir parcouru un certain nombre d'arcs R et S , l'affixe retrouve un arc déjà parcouru. Le cas le plus simple est celui d'un cycle composé d'un arc R et d'un arc S , lesquels devront alors se couper en deux points de T , respectivement $\oplus\ominus$ et $\ominus\oplus$; d'une façon générale, il pourra y avoir n arcs R et n arcs S , et l'on dira alors que la solution périodique correspondante (ou *oscillation de déferlement*) est du $n^{\text{ème}}$ genre. Il est aisé de voir que le genre maximum possible d'une trajectoire cyclique est en relation étroite avec les singularités des R et des S intérieures au domaine (fermé) D ; il est égal à 1 en l'absence de toute singularité, et à 2 si chaque famille a une singularité au plus dans D .

Si l'on se borne à ces deux éventualités, il y a dix cas à discuter: pas de singularités (OO); un noeud (NO); un col (XO); un centre (CO); et les cas NN , NX , NC , XX , XC , CC . Il n'y a pas lieu d'envisager l'existence d'un foyer, puisque celui-ci correspondrait à une époque infinie ($\pm$), ce qui exclut évidemment toute possibilité de périodicité; quant aux noeuds, ils ne pourront se trouver que sur la frontière, puisqu'ils sont les points de départ ou d'aboutissement de demi-trajectoires.

Les solutions périodiques ne présentent d'intérêt pour le physicien que si elles sont stables, c'est à dire si un affixe voisin d'une trajectoire cyclique tend à s'en rapprocher, ou du moins ne s'en écarte pas (la stabilité indifférente, qui est en fait une instabilité, présente cependant un certain intérêt lorsque le

système étudié est non-dissipatif: ce caractère ne peut, en effet, résulter que d'une simplification pour les besoins de la théorie, et ce sont les termes d'amortissement négligés qui assureront la stabilité lorsque la solution non-dissipative n'est pas instable). La tendance à se rapprocher de la trajectoire cyclique peut ne se manifester que pour les affixes situés dans une certaine région du plan: celle-ci sera alors dite *domaine d'attraction* de la solution périodique.

Pour étudier les conditions d'existence et de stabilité des solutions périodiques à déferlement, on remarquera qu'une trajectoire cyclique gardera ce caractère si l'on représente le plan de phase sur un autre plan, au moyen d'une correspondance univoque qui respecte le nombre et la nature des singularités; et que sa stabilité ou son instabilité sont également conservées. Il suffira donc de faire une transformation de cette nature, qui donne à la fois aux R et aux S une forme simple se prêtant bien à la discussion; dans les 10 cas énumérés ci-dessus, cette forme sera celle de deux familles appropriées de coniques (dégénérées ou non). La frontière T est alors transformée en une certaine courbe τ , et c'est des propriétés de cette dernière que dépendront les conclusions de la discussion.

Nous ne donnerons pas ici les détails de celle-ci, que l'on pourra trouver dans nos publications antérieures (^{3, 4, 5}); contentons-nous des indications suivantes, faciles à vérifier sur les figures:

1° Dans le cas OO , la transformation

$$R(x, y) = \xi \quad ; \quad S(x, y) = \eta$$

fait correspondre aux R et aux S les parallèles aux axes $O\xi\eta$; il y aura une solution périodique si τ a un point double, et ce cycle sera stable si la branche répulsive passant par le point double Π a, par rapport à l'axe de la famille correspondante, une pente supérieure à celle de la branche attractive (fig. 2).

2° Cas XO : on fera la transformation

$$R(x, y) = \xi^2 - i\eta^2 \quad ; \quad S(x, y) = \eta^2$$

(hyperboles et parallèles à un axe). Il y aura une solution du

premier genre si τ passe par deux points symétriques par rapport à $O\eta$ et situés entre cet axe et les asymptotes; et une

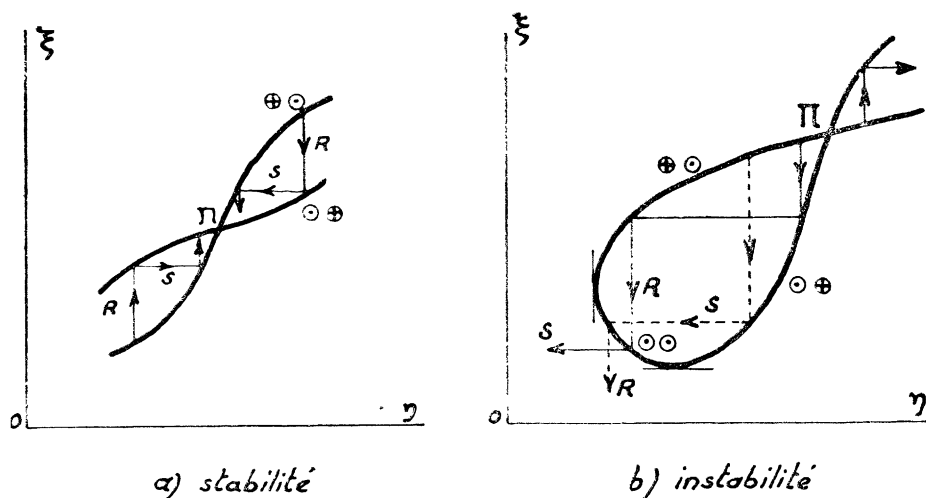


Fig. 2.

solution du deuxième genre s'il y a deux couples de points symétriques, situés au delà des asymptotes (fig. 3).

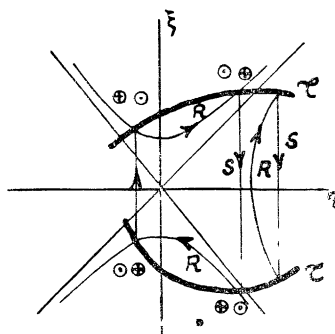


Fig. 3.

Les conditions de stabilité sont les mêmes que ci-dessus, en considérant les deux branches de τ passant par un couple de points symétriques (fig. 4).

3° Dans le cas XO , il suffira de changer, dans la transformation précédente, le signe du coefficient i (qui représente l'in-

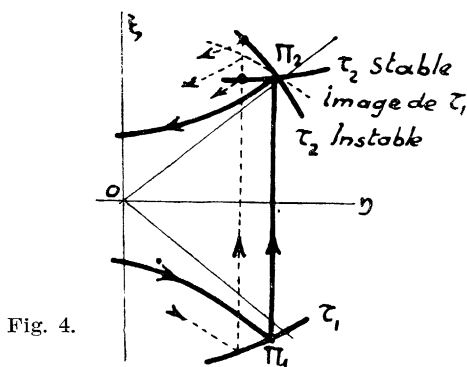


Fig. 4.

dice de POINCARÉ, et non une imaginaire, bien entendu): on obtient des ellipses et des droites (fig. 5)

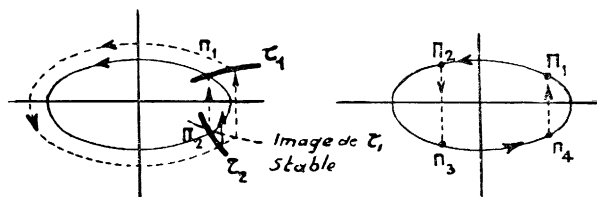


Fig. 5.

et les résultats précédents subsistent, sauf à supprimer les restrictions relatives aux asymptotes.

4° Cas NO: on fera

$$R(x, y) = \xi/\eta \quad ; \quad S(x, y) = \eta^2 ;$$

deux droites qui ont deux points communs étant confondues, et $\eta = 0$ étant la seule droite commune aux deux familles, il y aura une solution périodique si cette droite est une corde de τ , c'est à dire si cette courbe n'est pas tangente à $O\xi$ à l'origine (fig. 6);

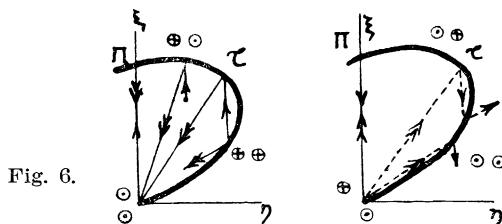


Fig. 6.

la solution sera stable si le noeud O est attractif pour les R.

Les autres cas ne présentent pas de nouveautés remarquables par rapport aux précédents; s'il y a un noeud de chaque famille, ces deux points devront être d'attractivités opposées; s'il y a un centre de chaque famille, il n'y aura de solutions symétriques du deuxième genre que si ces deux points sont confondus; etc.

Les particularités qu'il semble intéressant de souligner, car elles sont caractéristiques du genre d'oscillations étudié, sont les suivantes :

1°. *Mise en régime*: Les solutions périodiques déferlantes se présentent en général comme des cycles limites, atteints au bout d'un temps infini; mais s'il existe un noeud sur T , c'est au bout d'un seul déferlement qu'est atteint le régime périodique, quelle que soit la position initiale de l'affixe: la figure 7 rend inutile la démonstration détaillée de cette propriété remarquable, qui distingue radicalement les systèmes déferlants du type considéré des oscillateurs linéaires

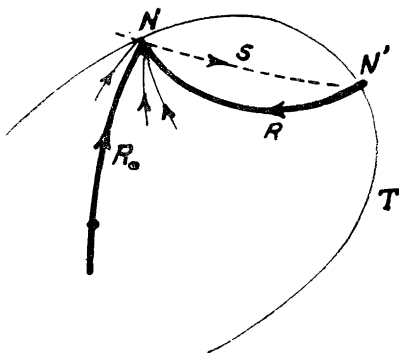


Fig. 7.

Le multivibrateur constitue, dans certaines conditions, une illustration de système déferlant NN (pratiquement équivalent à un système NO , comme il vient d'être dit), où d'ailleurs il s'agit d'un déferlement à proprement parler, les S étant parcourues à vitesse infinie, et constituant l'expression d'une condition de continuité plutôt qu'une loi de mouvement ⁽³⁾. Nous avons vérifié expérimentalement, dans le travail cité, sa pro-

³⁾ TH. VOGEL, *Annales des Télécommunications*, **6**, (1951), 182-190.

priété d'atteindre le régime définitif d'oscillation dès après le premier déferlement.

2°. *Coeexistence de cycles des deux genres*: Un oscillateur à déferlement qui présente des singularités et une frontière convenables peut posséder simultanément des régimes périodiques stables du premier et du deuxième genre: dans ce cas, une perturbation qui ferait pénétrer l'affixe dans un nouveau domaine d'attraction modifierait profondément l'aspect des oscillations ultérieures, sans détruire leur caractère stationnaire. La figura 8 donne un exemple théorique d'un tel état de choses.

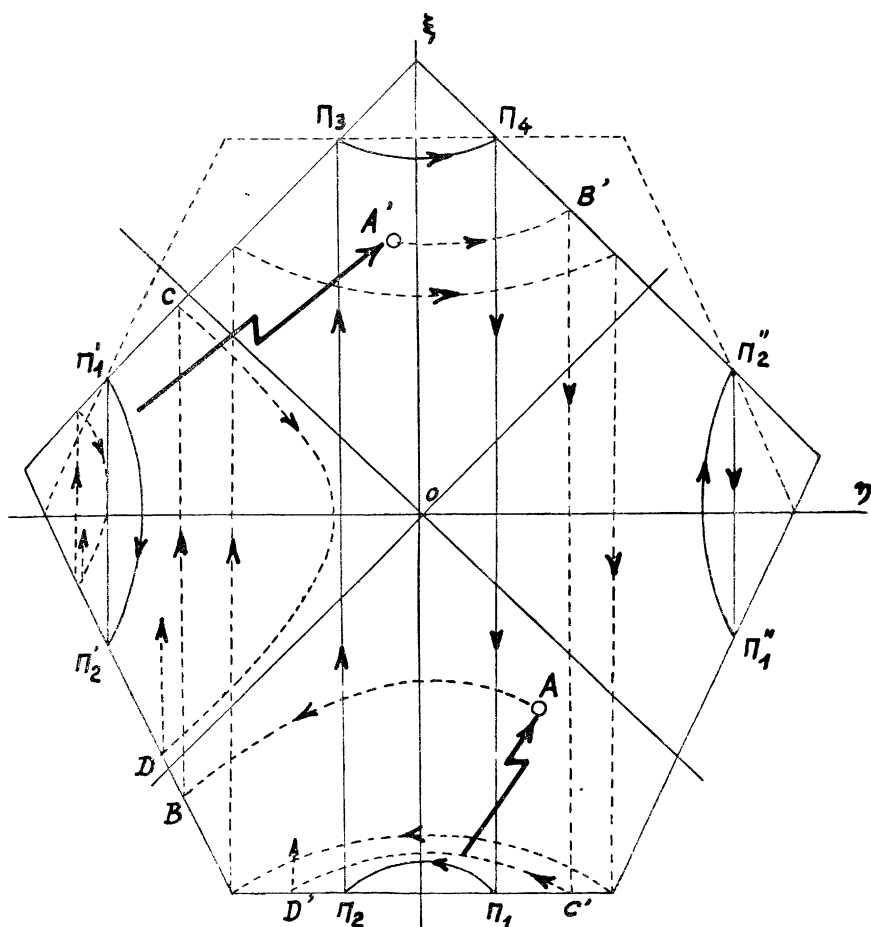


Fig. 8.

Il n'est pas difficile de réaliser un système réel présentant les mêmes propriétés; dans une étude expérimentale dont nous rendrons un compte détaillé ailleurs, on a utilisé un appareillage électronique conçu suivant le schéma de principe de la figure 9, où R et S sont deux systèmes caractérisés respective-

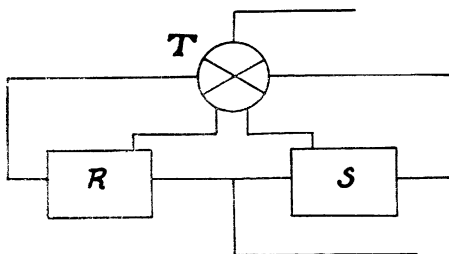


Fig. 9.

ment par des trajectoires hyperboliques et rectilignes, et T un organe qui commande la commutation lorsqu'une certaine fonction, réglable à volonté, des deux tensions de sortie x, y atteint la valeur zéro. Les figures 10 et 11 donnent deux exemples d'oscillogrammes obtenus, la première avec deux régimes stables du premier et du deuxième genres, la deuxième avec une solution stable du deuxième genre et une solution instable du premier (par modification des pentes de la frontière)

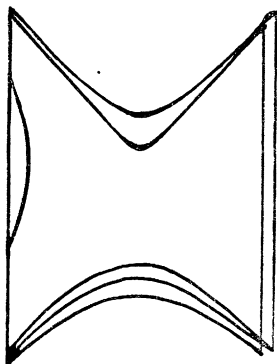


Fig. 10.

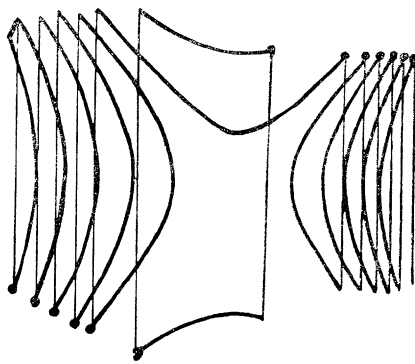


Fig. 11.

3°. *Coexistence de cycles déferlants et continus.* Dans le cas d'un centre, il y a nécessairement des trajectoires de la famille centrée qui ne coupent pas la frontière, et par suite

il existe une région d'oscillations linéaires (sans discontinuités), limitée par la R tangente à T . En dehors de cette région, il peut exister des trajectoires déferlantes fermées, du premier ou du second genre, et un passage est possible de l'un à l'autre régime. La figure 12 donne un exemple schématique où coe-

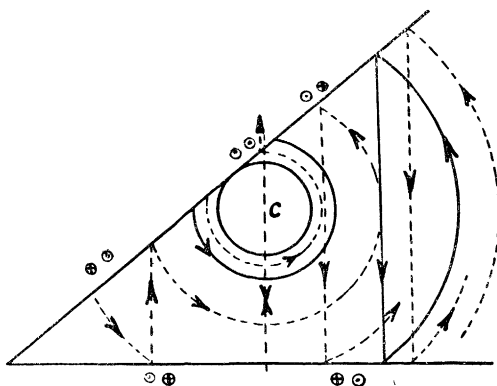


Fig. 12.

existent des solutions linéaires et une solution stable du premier genre, à domaine d'attraction très étendu. On constate l'existence d'une zone $\odot\odot$ de la frontière, qui donne naissance à un anneau de solutions disruptives, séparant les zones linéaire et déferlante: nous croyons qu'il s'agit là d'un fait tout à fait général, mais n'en possédons pas pour l'instant de démonstration satisfaisante. On remarquera d'ailleurs que l'anneau en question sépare efficacement les deux régimes pour de petites perturbations, mais est inopérant pour celles qui auraient une certaine amplitude: de sorte qu'on peut envisager la réalisation d'un oscillateur qui fonctionnerait alternativement en régime linéaire (harmonique) et en régime déferlant, sous l'action de chocs répétés d'amplitude convenable.

La encore, la réalisation d'un exemple est aisée, au moyen du schéma de la figure 9, où le circuit R est un oscillateur linéaire.

3. Déferlements et hérédité. — On a vu au paragraphe précédent quelques-unes des propriétés qui distinguent les sy-

stèmes déferlants, telles que les donne une étude topologique directe, et que les confirme l'expérience. Mais il s'agit jusqu'ici d'une création d'aspect un peu arbitraire, dont on peut entrevoir des applications⁴ intéressantes pour la technique, mais qui gardera pour le théoricien un caractère tératologique s'il n'est pas possible de l'insérer dans le corps général des systèmes dynamiques; et il serait particulièrement satisfaisant pour l'esprit (aussi bien qu'important en vue des applications) de déduire de cette insertion un mode de transition entre les systèmes déferlants et ceux des types plus généralement étudiés jusqu'ici. C'est à quoi l'on va s'employer maintenant.

En somme, nous avons affaire à un système dont la loi d'évolution change brusquement lorsque l'affixe passe par certains points de l'espace de phase. Or, si les systèmes les plus classiques sont caractérisés par une loi immuable, nous en connaissons une catégorie importante, pour lesquels elle varie, graduellement il est vrai, au cours de l'évolution: ce sont les systèmes *héréditaires*, dont la notion est due au génie de VOLTERRA. Un tel système est régi, on le sait, par une équation intégral-différentielle, où figurent, à côté de termes différentiels indiquant la tendance à variation du système parvenu à un certain état, des termes intégraux traduisant l'expérience accumulée par le système au cours de son mouvement antérieur.

Or, la notion d'intégrale est la plus facile à généraliser de manière à englober les analyses du continu et du discontinu: il suffit de l'entendre au sens de STIELTJES; et, pour ce nous intéresse ici, de considérer des intégrales de la forme $\int F(P)df(P)$, prises le long de la trajectoire de l'affixe, avec une distribution d'action héréditaire $f(P)$ qui varie brusquement de la valeur 0 pour $P \notin T$ à telle fonction que l'on voudra de P , lorsque $P \in T$, T étant le lieu des points de l'espace de phase où se produisent les discontinuités postulées pour la loi d'évolution. En particulier, pour retrouver le système étudié au paragraphe précédent, répartissons l'action héréditaire avec la densité -1 sur les arcs de T repulsifs par

⁴) TH. VOGEL, C. R. *Colloque de Porquerolles*, (1951), 1-17.

rapport aux R , avec la densité $+1$ sur les arcs attractifs, et 0 hors de T : l'intégrale $\int df(P)$ prise le long d'une trajectoire (composée d'arcs successifs de R et de S) vaudra 0 depuis la position initiale jusqu'au premier point-frontière, 1 à partir de ce point jusqu'au suivant, puis alternativement 0 et 1 , tant que le système continue à évoluer. L'équation

$$\frac{dx}{X_1 + (X_2 - X_1) \int df} = \frac{dy}{Y_1 + (Y_2 - Y_1) \int df}$$

exprime alors sous une forme unifiée le comportement de notre système déferlant, et le présente comme un cas particulier de système héréditaire, où l'action héréditaire s'exprime par une certaine intégrale de STIELTJES. Il suffit d'une modification infiniment petite de la distribution $df(P)$ pour que le système devienne un système héréditaire classique, puisqu'il existe toujours une fonction continue et dérivable infiniment voisine de la distribution envisagée d'abord; de même, si la densité d'action héréditaire tend vers 0 tout en restant confinée aux points de T , ou bien tend à s'uniformiser dans tout le plan, on passe graduellement au système classique sans hérédité. L'insertion des systèmes déferlants est ainsi réalisée; on voit mieux la place qu'ils occupent, et comment ils peuvent dégénérer en systèmes continus (ou encore: comment il est possible de les considérer comme la schématisation de systèmes héréditaires continus, à distribution d'action héréditaire très inégale)⁵⁾.

On remarquera que les systèmes déferlants ainsi présentés ne vérifient pas le postulat de la « dissipation de l'action héréditaire » formulé par VOLTERRA: à tout instant, c'est la parité du nombre de points-frontières antécédents qui compte, et le premier passage garde autant d'importance que le dernier; mais aussi diffèrent-ils des systèmes dynamiques réels en ce qu'ils ne sont pas dissipatifs, du point de vue énergétique. Il ne serait pas malaisé de modifier l'un comme l'autre

⁵⁾ TH. VOGEL, 8^e Congrès internat. de Mécan. théor. et appl., Istanbul (1952), sous presse.

de ces caractères, en introduisant des facteurs d'amortissement exponentiels convenables; mais cette modification est sans intérêt du moment qu'on borne son attention aux solutions périodiques libres, qui sont nécessairement non-dissipatives des deux points de vue.

Nous terminerons cet exposé par un exemple élémentaire de déformation d'un système déferlant par modification de la distribution d'action héréditaire:

Soit le système

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x(1 + \int df)} = dt,$$

avec, pour commencer, une distribution de densité $m \cdot \text{sgn}(y/x)$ concentrée sur la frontière d'équation

$$(y + 1)(y - 1) = 0 :$$

lorsque $m = 0$, les trajectoires sont des cercles $x^2 + y^2 = \text{const}$, les oscillations sont harmoniques, la frontière est naturellement inopérante. Lorsque m croît, le régime n'est pas modifié

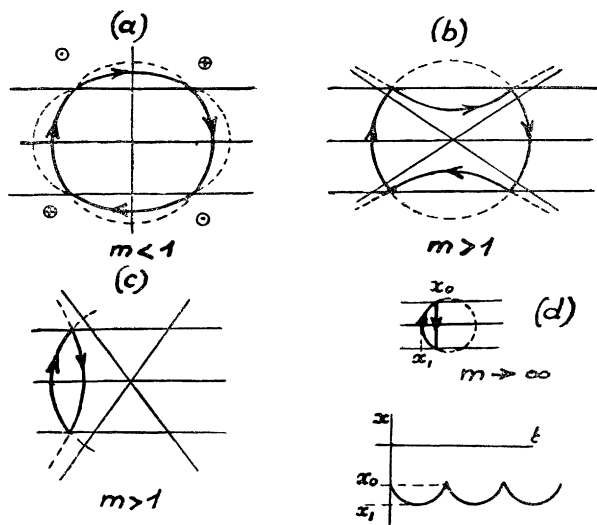


Fig. 13.

pour les système dont l'affixe a un rayon vecteur initial inférieur à 1; pour les autres, après avoir décrit un arc de

cercle, on atteint la frontière, et l'arc suivant sera elliptique (et extérieur à D) si $m < 1$; puis on retrouvera un arc de cercle, suivi d'un arc d'ellipse, et le cycle se ferme. Il est aisé de se rendre compte que l'oscillation diffère peu d'une oscillation harmonique (figure 13a).

Lorsque m dépasse la valeur 1, les trajectoires de la deuxième famille sont des hyperboles. Si le rayon vecteur initial est compris entre 1 et $\sqrt{m/(m-1)}$, on a une solution du deuxième genre (figure 13b); mais pour les mouvements à rayon vecteur initial plus grand, l'oscillation est du premier genre (figure 13c), et c'est la seule qui subsiste lorsque m croît indéfiniment. Son allure en fonction du temps est alors celle de la figure 13d, bien connue en électronique.

On peut imaginer bien d'autres configurations de la « barrière » T , répondant à diverses conditions pouvant se présenter en Physique. Par exemple, si l'on adopte pour la den-

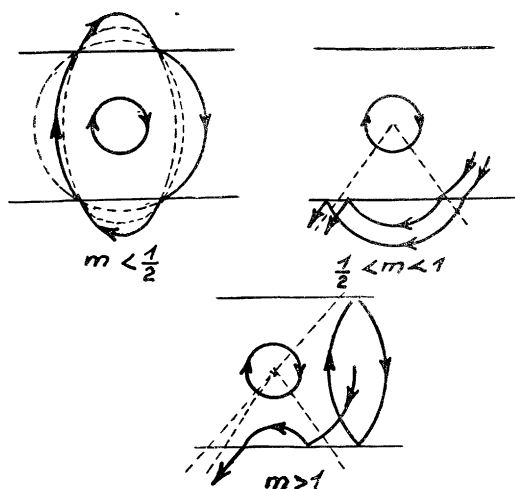


Fig. 14.

sité sur T l'expression $m \cdot \operatorname{sgn} y$, et que l'on suppose l'affixe initialement situé dans le demi-plan de droite, on a les trajectoires de la figure 14, comme on le vérifie aisément, en observant que le coefficient de $-x$ dans l'équation différentielle peut prendre les trois valeurs 1, $1 - m$, et $1 - 2m$.

Dans la discussion qui précède, on a envisagé des modifications de l'action héréditaire, mais en maintenant celle-ci localisée sur la frontière. Il est encore plus intéressant, sans doute, d'examiner ce qui se passe lorsque cette action se répand peu à peu dans le plan tout en conservant sur la frontière les valeurs précédemment prescrites; mais on ne peut rien dire de général sur les résultats de cette discussion, car elle dépend essentiellement de la loi qu'on adopte pour la déformation du problème, loi qui sera suggérée par la signification physique éventuelle de l'équation. Indiquons simplement que si l'on arrive, pour le problème de la figure 14, à la limite où l'action héréditaire est distribuée linéairement avec la densité $m \, y \, dy$, l'équation différentielle

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x \left[1 + \frac{m}{2} (y^2 - y_0^2) \right]}$$

donne les trajectoires

$$\frac{m}{2} (y^2 - y_0^2) = e^{\frac{m}{2} (x_0^2 - x^2)},$$

qui sont des courbes fermées continues, intermédiaires entre le rectangle et le cercle.

C'est par une « dilution » de ce genre de l'action héréditaire que l'on peut faire entrer l'équation de VAN DER POL dans le cadre des systèmes dont nous venons de parler.