

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

BRUNO PINI

Sui cicli relativi ai sistemi ai differenziali totali

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 22 (1953), p. 38-63

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__38_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__38_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SUI CICLI RELATIVI AI SISTEMI AI DIFFERENZIALI TOTALI

Nota (*) di BRUNO PINI (a Bologna)

Così come si studia l'andamento delle curve integrali di un sistema differenziale ordinario $dx_i/dt = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, analogamente si possono studiare le varietà integrali di un sistema ai differenziali $dx_i = \sum_{k=1}^m f_{ik}(x_1, x_2, \dots, x_n) du_k$, $i = 1, 2, \dots, n$. In una precedente Nota ¹⁾ abbiamo preso in considerazione il sistema passivo di pfaffiani

$$(1) \quad d\mathbf{x} = \mathbf{a}(x_1, x_2, x_3)du + \mathbf{b}(x_1, x_2, x_3)dv$$

con $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ vettori a tre componenti, ciascuna delle quali sviluppabile in serie di Taylor in un intorno di ciascun punto (x_1, x_2, x_3) di un campo $\mathcal{C}$. Abbiamo studiato l'andamento delle superfici integrali (*caratteristiche*) nell'intorno di un punto *singolare* di prima e di seconda specie (tale cioè che in esso la matrice $\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$ ha rango rispettivamente uno o zero)

nell'ipotesi che le matrici $\left\| \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right\|$ e $\left\| \frac{\partial b_i}{\partial x_j} \right\|$ siano invertibili, abbiano i divisori elementari tutti lineari e, detti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e μ_1, μ_2, μ_3 gli autovalori se sono tutti reali, e $\lambda_1, \lambda_2 \pm i\lambda_3$ e $\mu_1, \mu_2 \pm i\mu_3$, se ve ne sono di complessi, la matrice $\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}$ abbia tutti i minori di second'ordine diversi da zero. Nel presente lavoro ci riferiremo al sistema (1) supponendo sempre

(*) Pervenuto in Redazione il 16 gennaio 1953.

¹⁾ B. PINI, *Sui punti singolari per i sistemi ai differenziali totali*, Annali di Mat. (4) 34 (1953) 95-104.

soddisfatte le ipotesi che or ora abbiamo ricordato. L'ipotesi della invertibilità delle due matrici $\left\| \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right\|$ e $\left\| \frac{\partial b_i}{\partial x_j} \right\|$ è sovrabbondante, come abbiamo già avuto occasione di osservare, ma comoda, e noi ce ne serviremo anche nell'ultima parte del presente lavoro mentre nei primi tre numeri ci serviremo solo dell'ipotesi (d'altronde riducibile) dell'analiticità dei coefficienti. Stabiliremo alcune proprietà « in grande » delle varietà integrali, prendendo in considerazione particolarmente le caratteristiche chiuse. Analogamente a quanto avviene per le curve integrali di un sistema differenziale ordinario autonomo di due equazioni, anche per un sistema (1) si possono avere caratteristiche chiuse con punti singolari e caratteristiche chiuse senza punti singolari; chiameremo queste ultime *cicli*. Per esempio, si consideri il sistema

$$\begin{aligned} dx_1 &= [x_1(1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) + x_1x_3]du + [x_1(1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) - \\ &\quad - x_2 + x_1x_3]dv \\ dx_2 &= [x_2(1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) + x_2x_3]du + [x_2(1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) + \\ &\quad + x_1 + x_2x_3]dv \\ dx_3 &= [x_3(1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) - x_1^2 - x_2^2]du + [x_3(1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) - \\ &\quad - x_1^2 - x_2^2]dv; \end{aligned}$$

questo si integra immediatamente passando a coordinate polari (polo nell'origine e asse polare x_3); si ha una superficie integrale $\rho = 1$; poi $\rho = [1 + c_1 \exp(-2u)]^{-1/2}$ e conseguentemente $\operatorname{tg} \theta/2 = c_2 \left(\frac{1+\rho}{1-\rho} \right)^{1/2}$ se $c_1 > 0$, $\operatorname{tg} \theta/2 = c_2 \left(\frac{\rho+1}{\rho-1} \right)^{1/2}$ se $c_1 < 0$.

Pertanto per $c_1 = 0$ si ha una superficie sferica chiusa nel *centro a colle*²⁾ $(0, 0, 1)$ e nel *centro a nodo* $(0, 0, -1)$, mentre per ogni $c_1 > 0$ si ha una superficie di rotazione attorno all'asse x_3 chiusa nei due centri a nodo $(0, 0, 0)$ e $(0, 0, -1)$.

Invece per i sistemi

$$\begin{aligned} dx_1 &= -x_2 du - x_1 x_3 dv \\ dx_2 &= x_1 du - x_2 x_3 dv \\ dx_3 &= \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1) dv \end{aligned}$$

²⁾ Secondo le locuzioni usate in ¹⁾.

e

$$\begin{aligned} dx_1 &= -x_1 x_3 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + a^2 - b^2) [2a(x_1^2 + x_2^2)]^{-1} du - x_2 dv \\ dx_2 &= -x_2 x_3 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + a^2 - b^2) [2a(x_1^2 + x_2^2)]^{-1} du + x_1 dv \\ dx_3 &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - a^2 - b^2) (2a)^{-1} du, \end{aligned}$$

si hanno dei cicli. Le caratteristiche del primo sono le superfici toroidali rotonde $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1)^2 = 4 \cotgh^2 c \cdot (x_1^2 + x_2^2)$, con c costante arbitraria, le quali si avvolgono attorno alla caratteristica singolare $x_3 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 = 1$, che è luogo di centri; i cicli del secondo sistema sono le superfici toroidali $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - a^2 - b^2)^2 = 4a^2(c^2 - x_3^2)$, dove c è una costante arbitraria tale che $|c| < b$, le quali si avvolgono attorno alla caratteristica singolare $x_3 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 = a^2 + b^2$, luogo di centri.

Nei due ultimi esempi dati si hanno dei cicli che nell'interno contengono una sola linea di punti singolari; è facile però dare esempi di cicli che nell'interno contengono più di una linea di punti singolari. Si consideri per esempio il sistema

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_1 x_3 [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} + 5] (x_1^2 + x_2^2)^{-1/2} du - x_2 dv \\ dx_2 &= x_2 x_3 [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} + 5] (x_1^2 + x_2^2)^{-1/2} du + x_1 dv \\ dx_3 &= [x_3 - (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}] [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} + 3] du. \end{aligned}$$

Esclusi i punti dell'asse x_3 , i punti singolari sono tutti e soli quelli delle circonferenze $x_3 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 = 1, 4, 9$; le circonferenze $x_3 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 = 1, 9$ sono luoghi di centri mentre la circonferenza $x_3 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 = 4$ è luogo di colli. Vi sono infiniti cicli (tori di rotazione attorno all'asse x_3) parte dei quali contengono solo la circonferenza $x_3 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 = 1$, parte la sola circonferenza $x_3 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 = 9$, parte tutte le tre linee singolari; da notare anche la presenza di un *biciclo* che si taglia lungo la circonferenza luogo di colli.

E' ben noto che POINCARÉ³⁾ studiando l'andamento delle curve integrali del sistema $dx/X(x, y, z) = dy/Y(x, y, z) = dz/Z(x, y, z)$ sulla superficie chiusa $f(x, y, z) = 0$ $\left(\frac{\partial f}{\partial x} X + \right.$

³⁾ H. POINCARÉ, *Sur les courbes définies par les équations différentielles*, Oeuvres t. I, cap. XIII.

$\frac{\partial f}{\partial y} Y + \frac{\partial f}{\partial z} Z = Mf$) nell'ipotesi che questa sia priva di punti conici e di curve multiple, ha stabilito la relazione $N_c - N_f - N_n = 2p - 2$ tra il numero dei colli (N_c), fuochi (N_f), nodi (N_n) delle curve integrali e il genere p della superficie; pertanto solo se $p = 1$ possono non esservi punti singolari. Dunque *un ciclo è una superficie di genere uno*.

POINCARÉ stesso ⁴⁾ e più tardi DENJOY ⁵⁾ hanno studiato l'andamento delle curve integrali di un sistema ordinario sopra la superficie di un toro. Noi non avremo occasione di riferirci a tali lavori; ci limiteremo a provare che le linee integrali dei sistemi $dx = a du$, $dx = b dv$ che si trovano su un ciclo sono *chiuse e concatenate* al ciclo, nel senso che nessuna di esse può staccare dal ciclo una porzione semplicemente connessa.

Noi studieremo da una parte l'andamento delle caratteristiche del sistema (1) in un intorno di un ciclo e dall'altra le linee singolari interne a un ciclo.

L'esistenza di linee singolari nell'interno di un ciclo si prova facilmente una volta che sia stata assicurata l'esistenza di almeno un punto singolare.

E' ben noto che, servendosi dell'integrale di KRONEKER, POINCARÉ ⁶⁾ ha esteso anche al caso di uno spazio a più di due dimensioni il suo concetto di *indice* allo scopo di stabilire delle relazioni tra i numeri dei punti singolari dei varii tipi, interni a una superficie chiusa senza contatto (con le linee integrali del sistema).

Nel nostro caso, l'ipotesi che le matrici $\left\| \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right\|$ e $\left\| \frac{\partial b_i}{\partial x_j} \right\|$ siano invertibili porta di conseguenza che i punti singolari di seconda specie sono i punti singolari relativi al sistema $dx/du = a$ o $dx/dv = b$, indifferentemente. Ciononostante non sembra che l'indice di POINCARÉ dia utili servigi nel caso attuale; infatti proprio nel caso di una superficie di genere uno l'indice è privo di significato; in ogni caso poi l'esame sarebbe limitato ai pun-

⁴⁾ H. POINCARÉ, Oeuvres t. I, cap. XV.

⁵⁾ A. DENJOY, *Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore*, Journal de Math. pures et appl. vol. II (1932).

⁶⁾ H. POINCARÉ, Oeuvres t. I pag. 189 e sgg.

ti singolari di seconda specie mentre tutti gli esempi riportati sopra provano come nell'interno di un ciclo possano esservi solo punti singolari di prima specie.

Per provare l'esistenza di un punto singolare interno a un ciclo noi imiteremo i ragionamenti di BENDIXSON ⁷⁾ i quali presentano il vantaggio di stabilire l'andamento delle caratteristiche prive di punti singolari interne a un ciclo.

Vogliamo però mostrare come, almeno in ipotesi opportunamente restrittive, appoggiandoci all'indice di POINCARÉ relativo al caso piano sia facile mostrare l'esistenza di linee singolari interne a un ciclo e conseguire contemporaneamente un legame tra i numeri delle linee singolari luoghi di punti singolari dei varii tipi; un legame di tale tipo è presumibile che sussista in generale.

Supponiamo che il sistema (1) abbia tra le sue caratteristiche un ciclo, che per semplicità supponiamo sia un toro attorno all'asse x_3 ; introdotto un sistema di coordinate cilindriche con asse x_3 il sistema (1) si scrive

$$\begin{aligned} d\varphi &= (a_1 \cos \varphi + a_2 \sin \varphi) du + (b_1 \cos \varphi + b_2 \sin \varphi) dv \\ (1') \quad \rho d\varphi &= (-a_1 \sin \varphi + a_2 \cos \varphi) du + (-b_1 \sin \varphi + b_2 \cos \varphi) dv \\ dx_3 &= a_3 du + b_3 dv. \end{aligned}$$

Fissato un valore di φ , poniamo

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1 \sin \varphi - x_2 \cos \varphi,$$

onde

$$(2) \quad \sum_1^3 a_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = a_1 \sin \varphi - a_2 \cos \varphi, \quad \sum_1^3 b_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = b_1 \sin \varphi - b_2 \cos \varphi.$$

Se supponiamo che il piano $F = 0$ sia senza contatto con le caratteristiche di (1), almeno una delle (2) sarà $\neq 0$; sia tale per esempio la prima; allora da (1') si deduce

$$(3) \quad \frac{d\varphi}{dv} = \frac{\Delta_{12}}{a_1 \sin \varphi - a_2 \cos \varphi}, \quad \frac{dx_3}{dv} = - \frac{\Delta_{31} \sin \varphi + \Delta_{23} \cos \varphi}{a_1 \sin \varphi - a_2 \cos \varphi}$$

$$\text{ove si è posto } \Delta_{ij} = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}.$$

⁷⁾ J. BENDIXSON, *Sur les courbes définies par des équations différentielles*, Acta Mathematica, t. 24, 1900.

(3) è il sistema delle tracce sul piano $F = 0$ delle caratteristiche di (1). I suoi punti singolari sono quelli per cui $\Delta_{12} = 0$, $\Delta_{31} \sin \varphi + \Delta_{23} \cos \varphi = 0$; ora è $a_1 \Delta_{23} + a_2 \Delta_{31} + a_3 \Delta_{12} = 0$; perciò $\Delta_{31} \sin \varphi + \Delta_{23} \cos \varphi = 0$, $a_2 \Delta_{31} + a_1 \Delta_{23} = 0$ e poichè $a_1 \sin \varphi - a_2 \cos \varphi \neq 0$, segue $\Delta_{12} = \Delta_{23} = \Delta_{31} = 0$. Pertanto tutti e soli i punti singolari di (3) sono quelli di (1) che appartengono al piano $F = 0$.

Ora, com'è noto, se il sistema $\frac{dx}{dt} = f(x, y)$, $\frac{dy}{dt} = g(x, y)$ ha una caratteristica chiusa, nell'interno di questa esistono punti singolari e precisamente se N_f , N_c ed N_n sono i numeri dei fuochi (centri), colli e nodi, è $N_f + N_n - N_c = 1$.

Pertanto, se si suppone che per ogni φ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$) i piani $F = 0$ siano senza contatto, si può dire che nell'interno del ciclo si hanno delle linee chiuse luoghi di fuochi (centri) nodi e colli, essendo i loro numeri legati dalla precedente relazione.

I. - Indicheremo costantemente con S una superficie integrale e con γ e Γ le curve integrali $v = \text{cost.}$ e $u = \text{cost.}$, rispettivamente. Se P è un punto regolare, con S_P , γ_P , Γ_P intendiamo la superficie e le due curve integrali passanti per P . Nel caso poi che $\gamma_P [\Gamma_P]$ sia aperta, indicheremo con γ_P^+ e γ_P^- [Γ_P^+ e Γ_P^-] le due parti in cui γ_P [Γ_P] è divisa dal punto P , la prima corrispondente ai valori crescenti di u [v], l'altra ai valori decrescenti. E' evidente che due γ non possono avere un punto regolare in comune; ciò è immediata conseguenza del teorema di unicità ⁸⁾ perchè in tutto un intorno di tale punto sarà $|a| \neq 0$ da cui per esempio $a_3 \neq 0$ onde il sistema $dx = a du$ si scriverà $dx_1/dx_3 = a_1/a_3$, $dx_2/dx_3 = a_2/a_3$, in tale intorno.

Lo stesso si dica di due Γ . Di più se P è un punto regolare, le γ_P e Γ_P non possono essere tangenti in P ; ciò richiederebbe infatti $a_1/b_1 = a_2/b_2 = a_3/b_3$.

Ciò posto, mostriamo che le γ e Γ che appartengono a un ciclo sono chiuse.

Consideriamo una γ . Cominciamo con l'osservare che, fissato su S un punto P e associato a questo un intorno (su S), si può

⁸⁾ É. GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, Paris 1921, pag. 130 e sgg.

prendere il raggio di tale intorno sufficientemente piccolo in modo che in tale intorno non si trovino punti di γ oppure i punti di γ che vi cadono siano tutti e soli quelli di un ben determinato arco di γ passante per P . Infatti, in caso contrario, per P passerebbe un arco di γ_P e, comunque si prenda l'intorno di P , in questo vi sarebbero infiniti archi di γ ; dai quali, per la continuità di $\mathbf{a}$ e di $\mathbf{b}$, si potrebbe estrarre una successione convergente uniformemente all'arco di γ_P ; ma allora la Γ_P taglierebbe la γ in infiniti punti appartenenti a un intorno comunque piccolo di P . Ciò è impossibile perchè se al punto P associamo la coppia u, v , per il teorema di esistenza e unicità, un intorno di P su S è rappresentabile su un intorno di (u, v) mediante un vettore $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ a componenti olomorfe. Dunque a ogni punto P si può associare un intorno nel quale non cadono punti di γ oppure, se cadono punti di γ , questi sono tutti e soli quelli di un ben determinato arco. Allora per il teorema di ricoprimento di BOREL potremmo trovare su S un numero finito di punti $P_1, P_2, \dots, P_n$ in modo da ricoprire S con gli interni $j(P_1), j(P_2), \dots, j(P_n)$ in ciascuno dei quali o non cade alcun punto di γ oppure cade tutto un arco di γ passante per il centro dell'intorno in parola. Ma allora la γ deve essere chiusa oppure deve arrestarsi in un punto; quest'ultima alternativa è da scartare perchè tale punto sarebbe singolare. Allo stesso modo si riconosce che le Γ sono chiuse.

Mostriamo ora che *nessuna γ o Γ può scomporre S in due parti di cui una semplicemente connessa*.

Ragionando per assurdo, supponiamo che una γ scomponga la S in due parti S_1 ed S_2 di cui per esempio S_1 semplicemente connessa; sia P un punto di γ ; la Γ_P taglia la γ in P e poichè è chiusa, deve tagliarla ulteriormente in un certo punto P' . I punti P e P' spezzano la γ in due archi γ' e γ'' ; ora la Γ che esce da un punto P_1 di γ' , di un intorno di P , dovendo nuovamente tagliare la γ e non potendo tagliare la Γ_P deve tagliare γ' , e non γ'' , in un certo punto P_1' ; ma allora se il punto P_1 descrive l'arco γ' da P verso P' , corrispondentemente P_1' descrive l'arco γ' da P' a P ; esiste allora un punto Q di γ' ove la Γ_Q è tangente alla γ , e ciò è impossibile.

Dunque le curve γ e Γ sono concatenate al ciclo.

II. - Vogliamo ora studiare l'andamento delle caratteristiche in un intorno di un ciclo. Cominciamo col fare alcune osservazioni.

Chiamiamo intorno di raggio ε di una curva l'insieme dei punti interni alle sfere di raggio ε che hanno il centro su tale curva; supponiamo che $\gamma_O[\Gamma_O]$ sia chiusa e che in un suo intorno di raggio ε non vi sia alcun punto singolare; indichiamo con π_0 il piano normale a $\gamma_O[\Gamma_O]$ in O . Supponiamo che il punto P descriva la $\gamma_O[\Gamma_O]$ partendo da O , in un senso oppure nell'altro. Prendiamo su π_0 un punto O_1 abbastanza vicino ad O . Ad ogni posizione di P si può associare un punto P_1 su π_P , in modo che mentre P descrive la $\gamma_O[\Gamma_O]$, P_1 descrive una spirale di $\gamma_{O_1}^+[\Gamma_{O_1}^+]$ oppure di $\gamma_{O_1}^-[\Gamma_{O_1}^-]$. Orbene, a ogni $\varepsilon > 0$ si può associare un δ_ε tale che se il punto O_1 è nell'intorno di raggio δ_ε di O su π_0 , la spirale anzidetta di $\gamma_{O_1}^+[\Gamma_{O_1}^+]$ o di $\gamma_{O_1}^-[\Gamma_{O_1}^-]$ è tutta contenuta nell'intorno di raggio ε di $\gamma_O[\Gamma_O]$.

Più in generale, se $\widehat{AB}$ è un arco di una $\gamma[\Gamma]$ e nell'intorno di raggio ε di esso non si trovano punti singolari, esiste un δ_ε tale che fissato su π_A l'intorno di raggio δ_ε di A e preso a piacere un punto P di questo, esiste un arco di $\gamma_P[\Gamma_P]$ compreso tra π_A e π_B tutto contenuto nell'intorno di raggio ε di $\widehat{AB}$.

Sia ora S un ciclo. Se P è un suo punto, mandiamo per P la normale ad S e indichiamo con P' e P'' i due punti di questa, il primo interno e il secondo esterno ad S , a distanza ε da P . Poichè ogni punto di S è regolare, a P si può associare un intorno sferico $J(P)$ tale che quando Q descrive l'insieme $S \cdot J(P)$, i punti Q' e Q'' al variare di ε da zero ad ε , descrivono un intorno di P in cui non cade alcun punto singolare. Appoggiandoci al teorema di ricoprimento di BOREL, si può affermare allora l'esistenza di uno strato attorno ad S nel quale non cade nessun punto singolare.

Fissiamo ora ad arbitrio un punto O su S e consideriamo un segmento OO' della normale interna ad S in O (ragionamenti analoghi a quelli che seguono possono svilupparsi all'esterno di S). Consideriamo il piano $\pi_0(\Gamma_O)$ ortogonale a Γ_O in O e consideriamo le prime spire delle Γ^+ uscenti dai punti di OO' ; se OO' è sufficientemente piccolo queste tornano a in-

poi Q' non appartenesse alla Γ_P , la S_P taglierebbe la Σ_Γ lungo un arco di curva analitica $\mathcal{C}$; ma allora, poichè le Γ che passano pei punti di $\mathcal{C}$ appartengono sia a Σ_Γ che ad S_P , S_P conterrebbe una porzione di Σ_Γ in un intorno di P e quindi una porzione del segmento OO' in un intorno di P ; ciò è evidentemente impossibile perchè il segmento OO' e la S_P , almeno in un intorno abbastanza ristretto di P , hanno in comune il solo punto P . Dunque la γ_Q è chiusa; lo stesso si può dire delle γ che escono dai punti dell'arco $\widehat{PQ}$ di Γ_P . Sostituendo allora alla γ_P la γ^Q e ragionando allo stesso modo si verrà a individuare un arco $\widehat{QR}$ di Γ_P , adiacente a $\widehat{PQ}$ tale che tutte le γ che escono dai suoi punti sono chiuse, ecc. Il ragionamento si può ripetere poichè mai si esce dallo strato di altezza ε di S , almeno per P abbastanza prossimo ad O , e quindi mai si arriverà a un punto singolare. Pertanto con un numero finito di tali archi si esaurirà la Γ_P e quindi mentre il punto Q descrive la Γ_P , la γ_Q descrive la S_P che risulta chiusa.

Per esempio, nel terzo dei sistemi riportati all'inizio, tutte le caratteristiche interne al toro

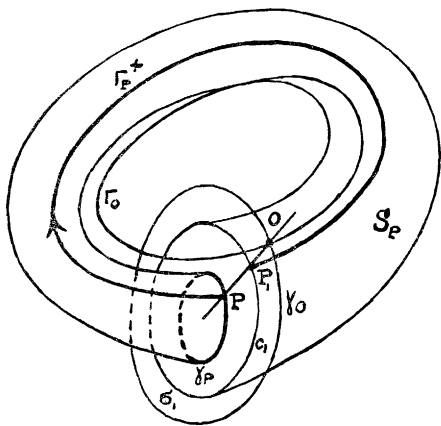
$$x_1 = (a + b \cos u) \cos v, \quad x_2 = (a + b \cos u) \sin v, \quad x_3 = b \sin u$$

sono altrettanti cicli.

2° caso. — Sia γ_P chiusa e Γ_P aperta. *In questo caso la S_P è aperta; essa è divisa dalla γ_P in due semicaratteristiche di cui una si avvolge infinite volte su se stessa tendendo asintoticamente ad S o a un ciclo interno ad S .*

Consideriamo una doppia corona attorno a γ_P . Per esempio, per ogni punto Q di γ_P mandiamo il piano normale a γ_P ; questo taglia γ_O in un punto Q' , nell'intorno di raggio ε di Q ; congiungiamo Q' con Q con un segmento di retta e prendiamo sul suo prolungamento un segmento QQ'' di lunghezza d , con d abbastanza piccolo in modo da restare nello strato di altezza ε attorno ad S . Allora, al variare di Q su γ_P , i segmenti QQ' e QQ'' generano due certe corone che indicheremo con σ_1 e σ_2 rispettivamente. Se il punto Q , partendo da P , descrive la Γ_P^+ o la Γ_P^- , esso tornerà a incidere $\sigma_1 + \sigma_2$, in un intorno di P , sulla faccia opposta a quella da cui è uscito. I due archi

di Γ_P^+ e Γ_P^- così individuati, si diranno la prima spira di Γ_P^+ e Γ_P^- . Analogamente si parlerà di seconda, terza, ..., spira di Γ_P^+ e Γ_P^- . Consideriamo dunque la prima spira di Γ_P^+ e la prima spira di Γ_P^- ; con lo stesso ragionamento fatto nel 1° caso, si riconosce che tutte le γ che escono dai punti di queste sono chiuse. Perciò, mentre Q descrive la prima spira di Γ_P^+ , ed eventualmente anche un tratto della seconda spira, la γ_Q descrive una superficie che taglia σ_1 oppure σ_2 secondo una curva



(semplice) chiusa C_1 ; questa non può avere punti in comune né con γ_O né con γ_P perchè altrimenti la S_P avrebbe punti in comune con la S oppure taglierebbe o toccherebbe sè stessa, il che è impossibile; analogamente, quando Q descrive la prima spira di Γ_P^- , ed eventualmente anche un tratto della seconda spira, la γ_Q descrive una superficie che taglia σ_1 oppure σ_2 secondo una curva (semplice) chiusa C_1^A ; delle due curve C_1 e C_1^A una appartiene a σ_1 e l'altra a σ_2 ; supponiamo per esempio che C_1 appartenga a σ_1 ; allora la superficie costituita dalla corona (γ_P, C_1) di σ_1 e dalla porzione della superficie S_P (generata dalla γ_Q quando Q descrive la prima spira di Γ_P^+ ed eventualmente una porzione della seconda spira) limitata da γ_P e dalla C_1 è chiusa. Ora se P è sufficientemente prossimo ad O , le prime spire di Γ_P^+ e Γ_P^- sono contenute in un intorno di Γ_0 onde la prima spira di Γ_P^- sarà tutta contenuta entro la superficie chiusa detta sopra, perchè, in caso contrario, dopo esservi

entrata, per uscirne dovrebbe tagliare la corona (γ_P, C_1) in senso opposto a quello con cui la taglia in P e ciò è impossibile perchè per la continuità di $\mathbf{a}$ e di $\mathbf{b}$, in un intorno di P la Γ_P^- attraversa la $\sigma_1 + \sigma_2$ sempre nello stesso senso. Dunque se C_1 appartiene a σ_1 , la C_1^4 appartiene a σ_2 .

Ripetendo il ragionamento ora fatto sulla seconda, terza, ..., spira di Γ_P^+ , si riconosce che la S_P taglia σ_1 in una successione di curve (semplici) chiuse $C_1, C_2, \dots$, e ciascuna di queste risulta più prossima delle precedenti a γ_O . La successione dei punti $P_1, P_2, P_3, \dots$, comuni a PO e a $C_1, C_2, C_3, \dots$, tenderà a un punto $\bar{P}$. Se $\bar{P} \equiv O$, allora la semicaratteristica S'_P , che ha origine in γ_P e contiene Γ_P^+ , ha S come ciclo-limite. Se invece $\bar{P} \neq O$, allora la S'_P ha come ciclo-limite la $S_{\bar{P}}$ la quale è una superficie chiusa. Per mostrare ciò basta mostrare che $\gamma_{\bar{P}}$ e $\Gamma_{\bar{P}}$ sono chiuse.

Supponiamo che la $\gamma_{\bar{P}}$ sia aperta; a $\bar{P}$ corrisponde su S un punto P^* tale che le prime spire di γ_P^+ e γ_P^- , limitate al piano normale alla $\gamma_{\bar{P}}$ in $\bar{P}$, sono contenute nell'intorno di raggio ε della γ_{P^*} ; esse tornano perciò a incidere tale piano in due punti $\bar{P}'$ e $\bar{P}''$; noi potremo racchiudere $\bar{P}$ con un intorno di raggio δ tale che i punti di $\gamma_{\bar{P}}$ che cadono in esso siano tutti e soli quelli di un ben determinato arco di $\gamma_{\bar{P}}$ (contenente $\bar{P}$); ma le $\gamma_{P_1}, \gamma_{P_2}, \dots$, sono tutte chiuse e $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n \bar{P} = 0$; ora non appena P_n è abbastanza vicino a $\bar{P}$, le prime spire di γ_P^+ e γ_P^- sono tutte contenute in un intorno di γ_{P_n} di raggio piccolo a piacere; quindi si può scegliere P_n e l'intorno di γ_{P_n} in modo che $\bar{P}'$ e $\bar{P}''$ siano esterni a quest'ultimo. Da ciò l'assurdo. Dunque $\gamma_{\bar{P}}$ è chiusa.

Supponiamo ora che la $\Gamma_{\bar{P}}$ sia aperta. La prima, seconda, terza, ..., spira di Γ_P^+ ha come origine e termine rispettivamente P e P_1 ; P_1 e P_2 ; P_2 e P_3 ; ecc. Con un ragionamento simile a quello fatto or ora si vede che si può scegliere una spira di Γ_P^+ d'indice abbastanza elevato in modo che le prime spire di Γ_P^+ e Γ_P^- siano tutte contenute in un intorno prefissato di essa, mentre d'altra parte i termini di Γ_P^+ e Γ_P^- sono esterni a un certo intorno di $\bar{P}$.

Si possono dare facilmente degli esempi per illustrare questo caso. Senza scrivere esplicitamente il sistema nelle x_1, x_2, x_3 , pensiamo operata la sostituzione da coordinate cartesiane a coordinate toroidali

$$x_1 = \frac{\sinh \eta \cos \psi}{\cosh \eta - \cos \xi}, \quad x_2 = \frac{\sinh \eta \sin \psi}{\cosh \eta - \cos \xi}, \quad x_3 = \frac{\sin \xi}{\cosh \eta - \cos \xi}.$$

Il sistema trasformato sia

$$\begin{aligned} d\eta &= (\sinh \eta - \cosh \eta)(\cosh \eta - 2 \sinh \eta) du, \\ d\psi &= du, \quad d\xi = -\sinh^2 \eta dv \end{aligned}$$

onde

$$\tanh \eta = \frac{1 + c_1 \exp u}{2 + c_1 \exp u}, \quad \psi = u + c_2, \quad \cotg \xi = v + c_3.$$

Per $c_1 = 0$ si ha una caratteristica toro-circolare, S ; per $c_1 > 0$ si hanno delle superfici tubolari che penetrano entro sè stesse. Le Γ sono le circonferenze sezioni coi semipiani per l'asse x_3 mentre le γ sono delle specie di eliche sferiche che per $u \rightarrow +\infty$ tendono asintoticamente alla caratteristica singolare $x_3 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 = 1$, e per $u \rightarrow -\infty$ tendono alle circonferenze intersezioni delle sfere $\xi = \text{cost.}$ (corrispondenti ai fissati valori di v) con S . Una Γ ($u = \bar{u}$) spezza la caratteristica, cui essa appartiene, in due parti; quella corrispondente ai valori $u < \bar{u}$ tende asintoticamente ad S (ciclo-limite).

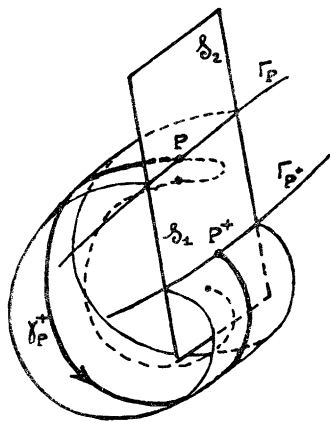
Analogamente il sistema

$$\begin{aligned} d\eta &= (\sinh \eta - \cosh \eta)(\cosh \eta - 2 \sinh \eta) du, \\ d\psi &= dv, \quad d\xi = du, \end{aligned}$$

ha un ciclo nella stessa superficie S di prima ($c_1 = 0$), mentre per $c_1 > 0$ le caratteristiche sono superfici aperte che si avvolgono su sè stesse. Le γ sono spirali sui semipiani per l'asse x_3 che per $u \rightarrow +\infty$ si avvolgono attorno alle intersezioni di tali semipiani con la caratteristica singolare, mentre per $u \rightarrow -\infty$ tendono alle intersezioni di S coi semipiani anzidetti; le Γ sono circonferenze intersezioni di S con le sfere $\xi = \text{cost.}$ corrispondenti ai fissati valori di u . Una Γ ($u = \bar{u}$) divide la caratteristica, cui appartiene, in due parti; quella corrispondente ai valori $u < \bar{u}$ tende asintoticamente ad S (ciclo-limite).

3° caso. — γ_P e Γ_P sono entrambe aperte. In questo caso le γ_P e Γ_P dividono S_P in quattro parti; di queste almeno una si avvolge infinite volte su sè stessa tendendo asintoticamente ad S o a un ciclo interno ad S .

Consideriamo attorno ad OO' un elemento di superficie $\mathcal{S}$ luogo di archi di Γ che si appoggiano ad OO' ; sia P un punto di OO' abbastanza prossimo ad O ; l'arco di Γ_P appartenente ad $\mathcal{S}$ divide $\mathcal{S}$ in due parti; chiamiamo $\mathcal{S}_1$ quella limitata da Γ_P e Γ_O ed $\mathcal{S}_2$ quella limitata da Γ_P e $\Gamma_{O'}$. Consideriamo ora la prima spirale di γ_P^+ e la prima spirale di γ_P^- limitate a tale elemento $\mathcal{S}$; i termini di queste P^+ e P^- , non possono appartenere a Γ_P ammenochè non coincidano con P , il che è escluso dalle ipotesi; infatti se P è sufficientemente prossimo ad O , tali spire sono contenute in un intorno di γ_O e d'altra parte un intorno di P su S_P è rappresentabile su un intorno di (u, v) con



un vettore olomorfo $x = x(u, v)$. Supponiamo che P^+ appartenga ad $\mathcal{S}_1$; a ogni punto Q di Γ_P di un intorno di P associamo la prima spirale di γ_Q^+ e il corrispondente termine Q^+ su $\mathcal{S}$ per ragioni di continuità Q^+ apparterrà ad $\mathcal{S}_1$; infatti se per un punto R di tale intorno, R^+ appartenesse a $\mathcal{S}_2$, l'arco $\mathcal{C}$ descritto da Q^+ dovrebbe tagliare la Γ_{P^+} e ciò è impossibile perchè la S_P contiene tutte le Γ_{Q^+} e quindi conterrebbe tutta una porzione di $\mathcal{S}$. Si viene in tal modo a individuare su S_P una striscia, luogo delle prime spire delle γ_Q^+ , la quale avrà come

origine un arco della Γ_P e come termine un arco della Γ_{P+} . Da ciò segue intanto che il punto P^- appartiene ad $\mathcal{S}_2$; infatti la prima spirale di γ_P^- è tutta contenuta in un intorno di γ_0 ; quindi se la striscia anzidetta si pensa prolungata a un arco conveniente di Γ_P , perchè P^- possa trovarsi in $\mathcal{S}_1$ bisogna o che la prima spirale di γ_P^- tagli la striscia anzidetta, ciò ch'è impossibile, oppure che attraversi la $\mathcal{S}_1$ in senso contrario a quello col quale l'attraversa nel punto P , e ciò è pure impossibile perchè in un intorno di P se la γ_P^- taglia $\mathcal{S}$, l'attraversamento deve avvenire sempre nello stesso senso, causa la continuità di α e β .

In modo perfettamente simile, se consideriamo un elemento di superficie $\mathcal{S}'$ luogo di archi di γ che si appoggiano ad OO' , le due prime spire di Γ_+ e Γ_P^- termineranno in due punti che, per la stessa ragione addotta sopra, apparterranno uno a quella porzione di $\mathcal{S}'$ che è limitata dagli archi di γ_0 e γ_P , l'altro all'altra parte; supponiamo che sia la Γ_P^+ a terminare in un punto di $\mathcal{S}'$ compreso tra γ_0 e γ_P . Consideriamo ora attorno alle prime spire di Γ_P^+ e di γ_P^+ le zone Σ_Γ e Σ_γ ottenute per prolungamento da $\mathcal{S}'$ e da $\mathcal{S}$. Prendiamo un punto Q della prima spirale di Γ_P^+ e la prima spirale di γ_P^+ ; questa inciderà Σ_Γ in un punto Q^+ compreso tra Γ_0 e la prima spirale di Γ_P^+ ; infatti, in caso contrario, la S_P taglierebbe Σ_Γ lungo una curva analitica passante per P^+ e Q^+ , intersecante la Γ_P^+ ; ma per ogni punto di tale curva passa una Γ appartenente ad S_P e quindi si arriverebbe all'assurdo che S_P conterrebbe tutta una porzione di Σ_Γ attorno a P . Pertanto se la caratteristica S_P è quella che resta determinata associando alla coppia $u = \bar{u}$, $v = \bar{v}$ il punto P , il quadrante di caratteristica di S_P corrispondente ad $u > \bar{u}$, $v > \bar{v}$, taglierà una prima volta la Σ_Γ lungo una prima spirale di Γ compresa tra Γ_0 e la prima spirale di Γ_P^+ e così pure taglierà una prima volta la Σ_γ lungo una prima spirale di γ compresa tra γ_0 e la prima spirale di γ_P^+ . Il ragionamento si può ripetere; si riconosce così che l'anzidetto quadrante di S_P si avvolge infinite volte su sè stesso; se $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$, sono i punti in cui questo taglia successivamente PO , poichè $\overline{OP_1} > \overline{OP_2} > \dots > \overline{OP_n} > \dots$, la successione $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ converge a un punto $\bar{P}$. Se $\bar{P} \equiv O$, il detto quadrante ha S come ciclo-limite; se $\bar{P} \neq O$, con un ragiona-

mento simile a quello fatto nel 2° caso, si riconosce che la $S_{\bar{P}}$ è chiusa ed è ciclo-limite del quadrante.

Nello stesso ordine di idee dei due ultimi esempi riportati, consideriamo il sistema

$$d\eta = (\sinh \eta - \cosh \eta)(\cosh \eta - 2 \sinh \eta)d(u + v), \\ d\psi = du \quad , \quad d\xi = dv.$$

Le Γ sono spirali (intersezioni coi semipiani per l'asse x_3) che per $v \rightarrow -\infty$ approssimano le circonferenze sezioni di tali semipiani col ciclo S e per $v \rightarrow +\infty$ tendono ai punti intersezioni di tali semipiani con la caratteristica singolare.

Le γ sono della specie di eliche sferiche che per $u \rightarrow +\infty$ tendono alla caratteristica singolare e per $u \rightarrow -\infty$ tendono alle intersezioni delle sfere $\xi = \text{cost.}$ (corrispondenti ai fissati valori di v) con S . Pertanto, fissata una coppia u, v e il punto P , quella porzione della S_P che corrisponde ai valori $u < \bar{u}$, $v < \bar{v}$, tende asintoticamente ad S (ciclo-limite).

III. - Vogliamo ora provare che *entro un ciclo si trova almeno un punto singolare.*

Allo scopo cominciamo col dimostrare che:

Se entro un ciclo S non vi sono punti singolari, una caratteristica interna ad S o è chiusa oppure, se aperta, ammette almeno un ciclo-limite interno ad S .

Sia P un punto interno ad S ; le curve γ_P e Γ_P possono essere entrambe chiuse oppure una aperta e l'altra chiusa, oppure entrambe aperte.

1. caso. — γ_P e Γ_P sono entrambe chiuse. Allora S_P è chiusa.

Associamo a P un suo intorno $J(P)$; conduciamo la normale ad S_P in P e sia $P'P''$ la porzione di essa appartenente ad $J(P)$. Indichiamo con $\mathcal{S}_P$ l'elemento della superficie luogo delle Γ che si appoggiano ai punti di $P'P''$, appartenente ad $J(P)$. Potremo sempre prendere $J(P)$ così piccolo che $P'P''$ abbia il solo punto P in comune con S_P . Se prendiamo ora un punto P_1 sulla Γ_P , sufficientemente prossimo a P , la $\gamma_{P_1}^\perp$ è contenuta in un intorno della γ_P e incide una prima volta la $\mathcal{S}_P$ in un punto P_1+ ; con lo stesso ragionamento fatto al n. 2 in analoga occasione, si riconosce che $P_1+\equiv P$, e quindi γ_{P_1} è chiusa. Si viene in tal modo

a individuare attorno a P un arco di Γ_P , sia $\widehat{P_{-1}P_1}$, tale che le γ che escono dai suoi punti sono tutte chiuse. Sostituendo alla γ_P la γ_{P_1} , ci si ritrova nelle stesse condizioni di prima; da ciò l'esistenza di un arco $\widehat{P_1P_2}$ di Γ_P tale che le γ che escono dai suoi punti sono tutte chiuse, ecc.

Si può perciò concludere come nel primo caso del n. 2.

2° caso. — γ_P è chiusa e Γ_P è aperta. Intanto, con lo stesso ragionamento fatto sopra si riconosce che tutte le γ che escono dai punti di Γ_P sono chiuse. Consideriamo ora la Γ_P^+ . Indichiamo con D il dominio che ha per frontiera la S . Supponiamo che, preso a piacere un punto di D , si possa trovarne un intorno in cui non cada alcun punto di Γ_P^+ oppure, se cadono punti di Γ_P^+ , questi siano quelli di un ben determinato arco passante per il punto; allora per il teorema di BOREL potremo trovare un numero finito di punti $P_1, P_2, \dots, P_n$ in D tali che i corrispondenti intorni $j(P_1), j(P_2), \dots, j(P_n)$ ricoprano D e in ciascuno di essi o non cadano punti di Γ_P^+ oppure cadano solo quelli di un ben determinato arco. Ma allora la Γ_P^+ dovrebbe o arrestarsi in un punto, e ciò è impossibile perchè tale punto sarebbe singolare, oppure essere chiusa, e ciò è escluso dall'ipotesi. Dunque esiste in D almeno un punto $\bar{P}$ tale che in ogni suo intorno cadono infiniti archi di Γ_P^+ . Mostriamo ora che $S_{\bar{P}}$ è chiusa. Allo scopo basta provare che $\gamma_{\bar{P}}$ e $\Gamma_{\bar{P}}$ sono chiuse. Sia $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ una successione di punti di Γ_P^+ convergente a $\bar{P}$; non appena P_n è sufficientemente prossimo a $\bar{P}$, in corrispondenza a γ_{P_n} si ha una spirale di $\gamma_{\bar{P}}^+$ tutta contenuta in un suo intorno. Sia $\bar{P}_+$ il termine di tale spirale sul piano normale in $\bar{P}$ alla $\gamma_{\bar{P}}$; se questa è aperta, è $\bar{P}_+ \equiv \bar{P}$, mentre, d'altra parte, fissato un numero $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere, potremmo sempre trovare un intero n_ε tale che l'anzidetta spirale di $\gamma_{\bar{P}}^+$ sia tutta contenuta nell'intorno di raggio ε della $\gamma_{P_{n_\varepsilon}}$. Perciò è assurdo supporre che la $\gamma_{\bar{P}}$ sia aperta. Mostriamo ora che la $\Gamma_{\bar{P}}$ è chiusa. Consideriamo gli archi $\widehat{P_1P_2}, \widehat{P_2P_3}, \dots, \widehat{P_{n-1}P_n}, \dots$ della Γ_P ; la prima spirale di Γ_P^+ limitata al piano normale in $\bar{P}$ a $\Gamma_{\bar{P}}$, avrà come termine un punto $\bar{P}_+$ e, se la $\Gamma_{\bar{P}}$ è aperta, sarà $\bar{P}_+ \equiv \bar{P}$. Con lo stesso ragionamento di sopra si riconosce che ciò è impossibile perchè tale spirale deve essere contenuta in un

intorno di raggio arbitrariamente piccolo dell'arco $\widehat{P_n P_{n+1}}$ non appena si prenda n opportunamente grande.

I ragionamenti fatti sulla Γ_P^+ possono ripetersi per la Γ_P^- . Perciò la γ_P spezza la S_P in due semicaratteristiche S_P^+ ed S_P^- ciascuna delle quali ha un proprio ciclo-limite, S^+ per la prima ed S^- per la seconda. Se uno di essi coincide con S , l'altro è certamente interno ad S ; infatti se è per esempio $S^+ \equiv S$, allora $\bar{P}$ è un punto di S e i punti $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ da uno di essi in poi sono contenuti in un intorno piccolo a piacere di $\bar{P}$; allora noi possiamo riferirci ai risultati conseguiti al n. 2.

3° caso. — γ_P e Γ_P sono entrambe aperte. Consideriamo allora la Γ_P^+ ; con lo stesso ragionamento fatto nel 2° caso si riconosce l'esistenza di un punto P_1 tale che in ogni suo intorno cadono infiniti archi di Γ_P^+ ; da ciò segue, con lo stesso ragionamento fatto sopra, che Γ_{P_1} è chiusa. Allora, se anche la γ_{P_1} è chiusa, la S_{P_1} è chiusa e quindi i due quadranti della caratteristica S_P che hanno origine in Γ_P^+ e in γ_P^+ e γ_P^- , rispettivamente, hanno un medesimo ciclo-limite. Se invece la γ_{P_1} è aperta allora la S_{P_1} ha due cicli-limiti i quali poi sono cicli-limiti dei due quadranti anzidetti. Stessi ragionamenti se si prende in considerazione la Γ_P^- anzichè la Γ_P^+ .

Ciò premesso, per mostrare che nell'interno di un ciclo vi è almeno un punto singolare, basta ripetere un ragionamento di BENDIXSON ⁹⁾.

Supponiamo che entro il ciclo S non vi siano punti singolari. Indicato come sopra con D il solido limitato da S , indichiamo con V il volume di D . Consideriamo la funzione $f(P)$ definita nei punti di D al modo seguente: se S_P è chiusa, $f(P)$ è eguale al volume del solido limitato da S ; se S_P è aperta, $f(P) = V$. Sia P_0 un punto di WEIERSTRASS relativo all'estr. inf. $f(P)$. Poichè P_0 è un punto regolare, per esso passa una ben determinata caratteristica S_{P_0} . Se questa è aperta, allora tutte le caratteristiche uscenti dai punti di un certo intorno di P_0 sono aperte e quindi in tale intorno è $f(P) = V$, mentre invece la S_{P_0} ammette almeno un ciclo-limite interno ad S e nei pun-

⁹⁾ Cfr. l. c. in ⁷⁾.

ti di questo è $f(P) < V$. Se poi S_{P_0} è chiusa, allora entro essa vi sarà certamente una caratteristica chiusa onde la $f(P)$ relativa ai punti di questa sarà $< f(P_0)$, mentre invece possiamo racchiudere P_0 con un intorno opportuno in modo che, nei punti di questo, $f(P)$ sia eguale a V oppure differisca da $f(P_0)$ di tanto poco quanto si vuole.

A chiusura di questo n. 3 vogliamo esplicitamente rilevare come i ragionamenti fatti sopra si possano ripetere se si fa l'ipotesi che in tutto un intorno della caratteristica in esame non vi siano punti singolari. E' facile d'altra parte dare degli esempi che illustrano le eventualità contemplate sopra.

Così il sistema

$$\begin{aligned} d\eta &= (2 \sinh \eta - \cosh \eta)(3 \sinh \eta - \cosh \eta) du, \\ d\psi &= du, \quad d\xi = -\sinh^2 \eta dv, \end{aligned}$$

(η, ψ, ξ coordinate toroidali) ha tra le sue caratteristiche delle superfici tubolari dotate di un ciclo-limite interno e di un ciclo-limite esterno.

Si ha

$$\operatorname{tgh} \eta = \frac{1 + c_1 \exp u}{2 + 3 c_1 \exp u}, \quad \psi = u + c_2, \quad \cotg \xi = v + c_3.$$

Le caratteristiche corrispondenti a valori positivi di c_1 sono tutte interne al ciclo $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1)^2 = 36(x_1^2 + x_2^2)$. Si consideri ad esempio la caratteristica corrispondente a $c_1 = 1$, $c_2 = c_3 = 0$; la Γ corrispondente ad $u = 0$ è una circonferenza sul piano $x_2 = 0$; facendo crescere u da 0 a $+\infty$ la Γ che si appoggia alla γ^+ descrive una semicaratteristica che è una superficie tubolare che si avvolge infinite volte su sè stessa convergendo al ciclo-limite $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1)^2 = 36(x_1^2 + x_2^2)$, mentre facendo decrescere u da 0 a $-\infty$ la Γ che si appoggia a γ^- descrive una semicaratteristica che è anch'essa una superficie canale che penetra infinite volte entro sè stessa convergendo al ciclo-limite $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1)^2 = 16(x_1^2 + x_2^2)$.

Così pure il sistema

$$\begin{aligned} d\eta &= (2 \sinh \eta - \cosh \eta)(3 \sinh \eta - \cosh \eta) d(u + v), \\ d\psi &= du, \quad d\xi = dv, \end{aligned}$$

ha le caratteristiche

$$\operatorname{tgh} \eta = \frac{1 + c_1 \exp(u + v)}{2 + 3 c_1 \exp(u + v)}, \quad \psi = u + c_2, \quad \xi = v + c_3.$$

che per $c_1 > 0$ sono tutte interne al ciclo $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1)^2 = 36(x_1^2 + x_2^2)$. Si consideri ad esempio la caratteristica corrispondente a $c_1 = 1$, $c_2 = c_3 = 0$. Le Γ_0 e γ_0 corrispondenti a $u = 0$ e $v = 0$ rispettivamente, sono la prima una spirale nel piano $x_2 = 0$ e l'altra una certa spirale sferica. Facendo crescere u da 0 a $+\infty$ e poi facendo decrescere u da 0 a $-\infty$, si vede che i due quadranti di caratteristica $u \geq 0$, $v \geq 0$ e $u \leq 0$, $v \geq 0$ generati dalle semispirali T^+ che si appoggiano rispettivamente a γ_0^+ e a γ_0^- , hanno per ciclo-limite comune il toro $(x_1^2 + x_1^2 + x_3^2 + 1)^2 = 36(x_1^2 + x_2^2)$, mentre i due quadranti di caratteristica $u \geq 0$, $v \leq 0$ e $u \leq 0$, $v \leq 0$ hanno per ciclo-limite comune il toro $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1)^2 = 16(x_1^2 + x_2^2)$.

IV. - Vogliamo ora studiare la distribuzione dei punti singolari entro un ciclo. Assodata l'esistenza di un punto singolare entro un ciclo, facciamo vedere che, nelle ulteriori ipotesi indicate all'inizio del lavoro:

Nell'interno di un ciclo vi sono infiniti punti singolari; questi sono tutti e soli i punti di una o più caratteristiche singolari semplici chiuse oppure di archi di caratteristiche singolari congiungenti punti singolari di seconda specie.

Possiamo supporre che il punto singolare, di cui si è assodata l'esistenza entro il ciclo S , sia di prima specie perchè se fosse di seconda specie da esso uscirebbero due oppure sei archi di punti singolari di prima specie¹⁰⁾. Possiamo supporre che esso sia il punto $(0, 0, 0)$. Allora, mediante una opportuna trasformazione affine il sistema (1) si può scrivere¹¹⁾

$$\begin{aligned} dy_1 &= (1 + \lambda_1 y_1 + P_1) du + (\mu_1 / \lambda_1 + \mu_1 y_1 + Q_1) dv \\ (4) \quad dy_2 &= (\lambda_2 y_2 + P_2) du + (\mu_2 y_2 + Q_2) dv \\ dy_3 &= (\lambda_3 y_3 + P_3) du + (\mu_3 y_3 + Q_3) dv \end{aligned}$$

¹⁰⁾ Cfr. l. c. in ¹⁾.

¹¹⁾ Cfr. l. c. in ¹⁾.

se le matrici $\left\| \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right\|$ e $\left\| \frac{\partial b_i}{\partial x_j} \right\|$ hanno tutti gli autovalori reali, oppure

$$\begin{aligned} dy_1 &= (1 + \lambda_1 y_1 + P_1) du + (\mu_1/\lambda_1 + \mu_1 y_1 + Q_1) dv \\ (5) \quad dy_2 &= (\lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 + P_2) du + (\mu_2 y_2 + \mu_3 y_3 + Q_2) dv \\ dy_3 &= (-\lambda_3 y_2 + \lambda_2 y_3 + P_3) du + (-\mu_3 y_2 + \mu_2 y_3 + Q_3) dv \end{aligned}$$

se tali matrici hanno anche autovalori complessi; le P_i e Q_i stanno ad indicare serie intere nelle y_1, y_2, y_3 inizianti con termini di grado ≥ 2 .

Nel primo caso si ha

$$\left[\frac{\partial(\Delta_{12}, \Delta_{13})}{\partial(y_2, y_3)} \right]_0 = \frac{1}{\lambda_1^2} (\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1)(\lambda_1 \mu_3 - \lambda_3 \mu_1)$$

e nel secondo

$$\left[\frac{\partial(\Delta_{12}, \Delta_{13})}{\partial(y_2, y_3)} \right]_0 = \frac{1}{\lambda_1^2} [(\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1)^2 + (\lambda_1 \mu_3 - \lambda_3 \mu_1)^2]$$

dove, se il sistema (4) o (5) s'intende scritto nella forma vettoriale $d\mathbf{y} = \mathbf{a}^*(y_1, y_2, y_3) du + \mathbf{b}^*(y_1, y_2, y_3) dv$, è $\Delta_{ij} = \left\| \begin{smallmatrix} a_i^* & a_j^* \\ b_i^* & b_j^* \end{smallmatrix} \right\|$. Quindi nelle ipotesi, in cui ci siamo posti, che la matrice $\left\| \begin{smallmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{smallmatrix} \right\|$ abbia tutti i minori di second'ordine $\neq 0$, si ha

$$\left[\frac{\partial(\Delta_{12}, \Delta_{13})}{\partial(y_2, y_3)} \right]_0 \neq 0.$$

Perciò, per il teorema di DINI sulle funzioni implicite, le $\Delta_{12} = 0, \Delta_{13} = 0$ definiscono in un intorno di $(0, 0, 0)$ un arco di punti singolari. Questo arco si potrà prolungare da una parte e dall'altra; ragioniamo da una parte. Procedendo al prolungamento si presentano due alternative: o non si arriva mai a un punto singolare di seconda specie, oppure si va a terminare in un punto singolare di seconda specie. Nel primo caso si ottiene una curva chiusa. Supponiamo infatti che sia aperta e indichiamola con $\mathcal{C}$; essa non può nè terminare in un punto di S nè avvicinarsi indefinitamente ad S perchè esiste uno strato attorno ad S , sia J , ove non si trovano punti singolari. Ora l'ipotesi che le matrici $\left\| \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right\|$ e $\left\| \frac{\partial b_i}{\partial x_j} \right\|$ siano sempre invertibili porta di

conseguenza che gli eventuali punti singolari di seconda specie interni ad S sono isolati; in caso contrario le superfici analitiche $a_i(x_1, x_2, x_3) = 0$, $i = 1, 2, 3$, dovrebbero avere in comune

almeno una curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, onde si avrebbe $\sum_1^3 \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right)_{\mathbf{x}(t)} \cdot x_j'(t) \equiv 0$,

il che contraddice l'ipotesi dell'invertibilità di $\left\| \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right\|$. Isoliamo

allora questi punti singolari con opportuni intornoi $J_1, J_2, \dots, J_\nu$ e consideriamo l'insieme chiuso, $\mathfrak{D}$, che si ottiene togliendo dai punti interni ad S quelli che appartengono ad J e agli intornoi J_k . Se questi intornoi si prendono abbastanza piccoli, la $\mathcal{C}$ sarà tutta contenuta in $\mathfrak{D}$. Ragionando allora come è stato fatto più volte, si viene a provare l'esistenza di un punto tale che in ogni suo intorno cadono infiniti archi appartenenti a $\mathcal{C}$. Ciò è manifestamente impossibile perchè questo punto deve essere singolare di prima specie e quindi, poichè Δ_{ij} è una funzione analitica, tutti e soli i punti comuni alle superfici $\Delta_{ij} = 0$ (che in particolare sono dotate di piano tangente e curvature continue) in un intorno di tale punto sono quelli di un ben determinato arco uscente da detto punto.

Nella seconda alternativa, si arriverà a un punto singolare di seconda specie; da questo uscirà allora un altro arco opposto al precedente se ivi si ha una configurazione a fuoco o a centro, oppure altri cinque archi di cui uno opposto al precedente, se ivi si ha una configurazione a nodo o a colle. Su ciascuno di questi archi si ripeterà il ragionamento fatto sopra.

Come applicazione di quest'ultimo risultato mostriamo che:

Un sistema (1), se lineare, non ha tra le sue caratteristiche alcun ciclo.

Sia

$$d\mathbf{x} = (\mathbf{a} + A\mathbf{x}) du + (\mathbf{b} + B\mathbf{x}) dv$$

con le condizioni di passività $A\mathbf{b} = B\mathbf{a}$, $AB = BA$. Supponiamo, come si è detto all'inizio, che A e B siano invertibili e che, supposti tutti reali i loro autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e μ_1, μ_2, μ_3 , la matrice $\left\| \begin{smallmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{smallmatrix} \right\|$ abbia tutti i minori di second'ordine $\neq 0$.

Sia

$$T^{-1}AT = \text{diag.}(\lambda_i) \quad , \quad T^{-1}BT = \text{diag.}(\mu_i);$$

posto $\mathbf{x} = T\mathbf{y}$, $T^{-1}\mathbf{a} = \mathbf{p}$, $T^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{q}$, si ha

$$dy_i = (p_i + \lambda_i y_i)du + (q_i + \mu_i y_i)dv, \quad i = 1, 2, 3.$$

Riesce $p_i \mu_i = q_i \lambda_i$, $i = 1, 2, 3$; le $\Delta_{ij} = 0$ diventano $(p_i + \lambda_i y_i)(p_j + \lambda_j y_j) = 0$. Quindi i punti singolari son tutti e soli quelli delle tre rette intersezioni dei tre piani $p_i + \lambda_i y_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, presi due a due. Ciò esclude ovviamente l'esistenza di cicli.

Se invece le matrici A e B hanno anche autovalori complessi, il sistema trasformato si può scrivere

$$\begin{aligned} dy_1 &= (p_1 + \lambda_1 y_1)du + (q_1 + \mu_1 y_1)dv \\ dy_2 &= (p_2 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3)du + (q_2 + \mu_2 y_2 + \mu_3 y_3)dv \\ dy_3 &= (p_3 - \lambda_3 y_2 + \lambda_2 y_3)du + (q_3 - \mu_3 y_2 + \mu_2 y_3)dv \end{aligned}$$

con $\lambda_1 q_1 = \mu_1 p_1$, $\lambda_2 q_2 + \lambda_3 q_3 = \mu_2 p_2 + \mu_3 p_3$, $-\lambda_3 q_2 + \lambda_2 q_3 = -\mu_3 p_2 + \mu_2 p_3$; si riconosce che tutti e soli i punti singolari sono quelli della retta $p_2 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 = 0$, $p_3 - \lambda_3 y_2 + \lambda_2 y_3 = 0$.

La conclusione è la medesima di quella relativa al caso degli autovalori tutti reali.

Le caratteristiche singolari interne a un ciclo possono essere ulteriormente precisate. Ad evitare confusione, diremo che in un punto singolare di seconda specie si ha una configurazione a nodo (C_n), a colle (C_{co}), a fuoco (C_f) e a centro (C_{ce}), mentre un punto singolare di prima specie si dirà senz'altro un nodo, colle, fuoco o centro secondochè le traccie delle caratteristiche sui piani, incidenti in tale punto la caratteristica singolare che passa per esso, hanno l'andamento del nodo, colle, fuoco o centro nel senso usuale. Ciò posto si ha che:

I punti singolari interni a un ciclo sono tutti e soli quelli di un numero finito di curve chiuse ciascuna delle quali costituita tutta di colli o nodi o fuochi o centri; su una curva luogo di nodi o fuochi o centri potranno esservi solo punti singolari di seconda specie ove si ha rispettivamente una C_n , C_f , C_{ce} , mentre su una curva luogo di colli possono esservi punti singolari di seconda specie ove si ha una C_n oppure una C_{co} .

Consideriamo un arco $\mathcal{C}$ di punti singolari di prima specie avente per origine e termine due punti singolari di seconda

specie, oppure una curva semplice chiusa tutta costituita di punti singolari di prima specie, e supponiamo che $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ sia una sua rappresentazione analitica, $0 \leq t \leq L$. Secondo una convenzione già adottata, indicheremo con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ oppure con $\lambda_1, \lambda_2 \pm \lambda_3$ gli autovalori di $\left\| \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right\|$ secondochè essi sono tutti reali oppure se tra essi ve ne sono di complessi, e analogamente con μ_1, μ_2, μ_3 oppure $\mu_1, \mu_2 \pm \mu_3$ gli autovalori di $\left\| \frac{\partial b_i}{\partial x_j} \right\|$. Cominciamo col provare che se in un punto di $\mathcal{C}$ gli autovalori λ e μ sono tutti reali, essi sono tutti reali in ogni altro punto di $\mathcal{C}$ e quindi se in un punto ve ne sono di complessi, allora in ogni altro punto di $\mathcal{C}$ ve ne saranno di complessi. Allo scopo osserviamo dapprima che se in infiniti punti di $\mathcal{C}$ due o più delle λ coincidono, allora lo stesso fatto si verifica in tutti i punti di $\mathcal{C}$; ciò è immediata conseguenza dell'analiticità perchè la superficie $\Delta_\lambda(x_1, x_2, x_3) = 0$, ove Δ_λ indica il discriminante dell'equazione $\det. \left(\left\| \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right\| - \lambda E \right) = 0$, nelle ipotesi dette, deve contenere tutto l'arco analitico $\mathcal{C}$. Ora se in un punto t_1 le λ e le μ sono tutte reali e per esempio $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$, in nessun altro punto possono esservi due μ complesse; supponiamo che ciò avvenga in t_2 ; allora in t_2 si avrà $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$ oppure $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$; nel primo caso a λ_1 corrisponde un autovalore reale μ_1 mentre a $\lambda_2 = \lambda_3$ corrisponderà la coppia complessa $\mu_2 \pm i\mu_3$. Ora il discriminante $\Delta_\mu(x_1, x_2, x_3)$ relativo all'equazione $\det. \left(\left\| \frac{\partial b_i}{\partial x_j} \right\| - \mu E \right) = 0$, poichè in t_1 e in t_2 ha segni opposti, deve annullarsi in un certo t^* compreso tra t_1 e t_2 e ivi gli autovalori μ saranno μ_1 e $\mu_2 = \mu_3$, ciò ch'è incompatibile con l'ipotesi che la matrice $\left\| \begin{smallmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{smallmatrix} \right\|$ abbia tutti i minori di second'ordine $\neq 0$. E' chiaro che lo stesso ragionamento si può fare se in t_2 è $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ e a più forte ragione se su tutta la $\mathcal{C}$ coincidono, anzichè due, tutte tre le λ .

Supponiamo ora che solo in punti isolati su $\mathcal{C}$ due λ (o due μ) possano coincidere. In t_1 le λ e le μ siano tutte reali; nell'intervallo $t_1 \leq t \leq t_2$ le λ siano tutte reali mentre in $t_2 < t \leq t_3$

tra le λ ve ne siano di complesse: $\lambda_1, \lambda_2 \pm i\lambda_3$; allora in t_2 si avrà $\lambda_1, \lambda_2 = \lambda_3$. In $t_2 < t \leq t_3$ delle μ o due saranno eguali oppure due saranno complesse coniugate: $\mu_1, \mu_2 \pm i\mu_3$; ora per $t_1 \leq t \leq t_2$ le λ sono tutte reali e quindi non vi è incompatibilità a patto che sia sempre $\lambda_2 = \lambda_2$, ciò che si è escluso. Con ciò è provato che se gli autovalori λ e μ sono tutti reali in un punto di $\mathcal{C}$, allora essi sono tutti reali in ogni altro punto di $\mathcal{C}$.

Supponiamo ora che $\mathcal{C}$ sia limitato da due punti singolari di seconda specie: P_1 e P_2 (eventualmente $P_1 \equiv P_2$). Supponiamo che in P_1 si abbia una C_n ; allora da P_1 escono sei archi che si possono distribuire in tre coppie in modo che quelli di ciascuna coppia siano opposti tra loro in P_1 . Si sa che la caratteristica passante per un punto a piacere di un intorno di P_1 e non appartenente a tali archi, va a terminare nei punti di due tra i sei archi anzidetti. Supponiamo che $\mathcal{C}$ contenga uno di questi archi; allora, causa l'analiticità delle caratteristiche e di $\mathcal{C}$, ogni caratteristica che contiene un arco di $\mathcal{C}$, contiene tutta la $\mathcal{C}$; di qui segue che tutti i punti di $\mathcal{C}$ sono nodi e quindi anche in P_1 si ha una C_n . Se ora seguiamo i due archi opposti a $\mathcal{C}$ in P_1 e P_2 , si verranno a determinare altri due archi che, se non coincidono, dovranno anch'essi terminare in due punti (eventualmente coincidenti) ove si presenta una C_n ; ecc. Si può allora senz'altro concludere che se entro un ciclo vi è un punto P_1 ove si presenta una C_n oppure una C_{co} , allora per esso passa una caratteristica singolare chiusa tutta costituita di nodi oppure di colli e quindi se su essa vi sono altri punti singolari di seconda specie, in essi si avrà necessariamente una C_n oppure una C_n o C_{co} .

In modo analogo se in P_1 si ha una C_f oppure una C_{ce} , allora per P_1 passa una caratteristica singolare chiusa tutta costituita di fuochi o centri e quindi se su essa vi sono altri punti singolari di seconda specie, in questi si avrà necessariamente una C_f o, rispettivamente, una C_{ce} .

Supponiamo ora che su $\mathcal{C}$ non vi siano punti singolari di seconda specie. Supponiamo che in un punto P di $\mathcal{C}$ gli autovalori λ e μ siano tutti reali. Prendendo P come origine ed effettuando una conveniente trasformazione affine, il sistema (1) si può scrivere nella forma (4). Se nella prima delle (4)

poniamo $y_1 = 0$, si ha

$$\frac{du}{dv} = - \frac{(\mu_1/\lambda_1)y_1 + \dots}{1 + \lambda_1 y_1 + \dots} = - \frac{\mu_1}{\lambda_1} + \dots$$

e quindi dalle ultime due

$$\frac{dy_2}{dv} = \frac{\delta_{12}}{\lambda_1} y_2 + \dots, \quad \frac{dy_3}{dv} = - \frac{\delta_{31}}{\lambda_1} y_3 + \dots \quad \left(\delta_{ij} = \begin{vmatrix} \lambda_i & \lambda_j \\ \mu_i & \mu_j \end{vmatrix} \right)$$

ove i punti stanno ad indicare serie intere in y_2 e y_3 inizianti coi termini di grado ≥ 2 . Supponiamo che sia $\delta_{12}\delta_{31} < 0$; allora le traccie sul piano $y_1 = 0$ delle caratteristiche di (4) presentano l'andamento a nodo nel senso usuale, relativamente al punto $y_2 = y_3 = 0$.

Se ora prendiamo un punto P' di $\mathcal{C}$ in un intorno di P e assumiamo questo come nuova origine ed effettuiamo la trasformazione analoga a quella per cui si è passati da (1) a (4), il sistema (1) si trasforma in un altro del tipo (4) e se il detto intorno di P è abbastanza piccolo, ancora δ_{12} e δ_{31} saranno di segni opposti e quindi P' sarà un nodo. Ma allora le caratteristiche di (1) che passano pei punti di un intorno di P e che non appartengono a $\mathcal{C}$, contenendo tutti i punti di $\mathcal{C}$ di un intorno di P , conterranno l'intera $\mathcal{C}$. Pertanto se un punto di $\mathcal{C}$ è un nodo o un colle, tutti i punti di $\mathcal{C}$ sono nodi o, rispettivamente, colli.

Se invece in P si hanno anche autovalori complessi, allora, ponendo in P l'origine ed effettuando una conveniente trasformazione affine, il sistema (1) si trasforma in (5), da cui procedendo come prima, si ottiene

$$\frac{dy_2}{dv} = \frac{\delta_{12}}{\lambda_1} y_2 - \frac{\delta_{31}}{\lambda_1} y_3 + \dots, \quad \frac{dy_3}{dv} = \frac{\delta_{31}}{\lambda_1} y_2 + \frac{\delta_{12}}{\lambda_1} y_3 + \dots$$

ove i punti stanno ad indicare serie intere in y_2 e y_3 inizianti coi termini di grado ≥ 2 . Allora con ragionamenti analoghi a quelli che precedono si può concludere che se un punto di $\mathcal{C}$ è un fuoco o un centro, tali sono tutti i punti di $\mathcal{C}$.