

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE COLOMBO

**Sulle oscillazioni forzate di un circuito comprendente
una bobina a nucleo di ferro**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 22 (1953), p. 380-398

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__380_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SULLE OSCILLAZIONI FORZATE DI UN CIRCUITO COMPRENDENTE UNA BOBINA A NUCLEO DI FERRO

Nota () di GIUSEPPE COLOMBO (a Padova)*

Una notevole ricerca di Schouten ed Heijn¹⁾, gentilmente indicatami dal prof. Graffi, ha richiamata la mia attenzione su un problema di meccanica non-lineare.

Si tratta dello studio delle oscillazioni sottoarmoniche che si presentano in un circuito elettrico, contenente una bobina di induzione a nucleo di ferro, quando si applica ai suoi capi una forza elettromotrice sinusoidale.

Queste oscillazioni sottoarmoniche si spiegano tenendo conto della forte non-linearità della dipendenza del flusso magnetico, Φ , relativo al nucleo di ferro, dalla intensità I di corrente che circola nella bobina.

Nella ricerca di Schouten ed Heijn già citata, che riguarda il circuito rappresentato in fig. 1, nel caso che la forza elettromotrice $E(t)$ sia di tipo sinusoidale, come in quelle di Elias ed associati²⁾ che ho trovate citate nel lavoro¹⁾, si dimostra la possibilità di costruire soluzioni periodiche, di periodo minimo triplo di quello della $E(t)$, per una certa equazione differenziale, che diremo lineare a tratti, ottenuta dalla equazione differenziale, che rappresenta il circuito, mediante

(*) Pervenuta in Redazione il 19 Agosto 1953.

¹⁾ I. P. SCHOUTEN ed H. J. HEIJN, *Subarmonic oscillations in electric circuits containing iron-core reactors*. Applied Scientific Research, Section B, vol. B. 2, N. 4, 1952, p. 301. (Olanda).

²⁾ G. J. ELIAS e H. MIEDEMA, *Tijdschr. Ned. Radio Gen.*, 11 (1946), 141; G. J. ELIAS, *Ibid.*, 13 (1948) 37; ELIAS ed S. DUINKER, *Ibid.*, 14 (1949), 163. Non ho avuto la possibilità di consultare questi ultimi lavori.

opportune schematizzazioni. Inoltre, per la difficoltà e le complessità dei calcoli che comporta una tale ricerca ci si limita, almeno per quanto mi consta, a considerare solamente qualche caso numerico. La schematizzazione più importante è quella, introdotta da Elias, consistente nel confondere la curva caratteristica $\Phi = f(I)$ con una spezzata, come si può vedere in fig. 2. Un'altra notevole semplificazione introdotta da Shouten è quella di trascurare la resistenza del circuito. Ciononostante la complessità dei calcoli è tale che Schouten stesso è costretto a trattare un particolare caso numerico, riducendosi a fare la discussione su un solo parametro (il mas-

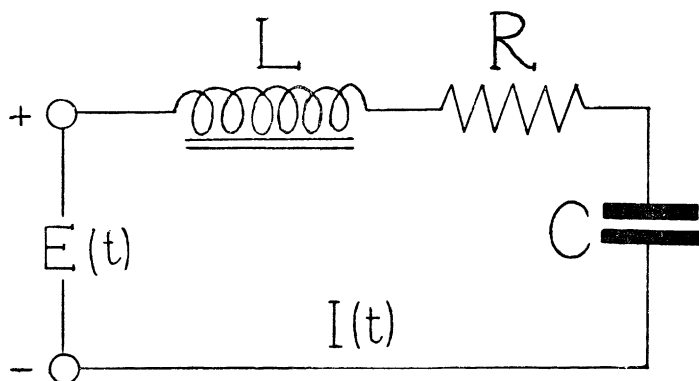


Fig. 1

simo di $E(t)$) e fissando numericamente a priori tutti gli altri. In questo caso Schouten ottiene risultati che sono in pieno accordo con l'esperienza, come appare da certi oscillogrammi riportati nel lavoro stesso.

Poichè è escluso che con i mezzi soliti della analisi non-lineare, che si usano per le piccole non-linearità, si possa pervenire a qualche risultato concreto, mi sono proposta la ricerca di un metodo adatto allo studio di questo tipo di fenomeno, che lasciasse un certo carattere di generalità alla discussione, che non comportasse schematizzazioni troppo restrittive, e che non richiedesse una quantità eccessiva di calcoli.

Con questi propositi, usando un metodo che mi risulta almeno in parte nuovo, ho potuto ottenere il risultato che espongo qui di seguito.

Nel circuito di fig. 1, la carica q del condensatore viene, come è noto a dipendere da t in modo tale che la funzione $q(t)$ soddisfi alla seguente equazione differenziale ($\dot{q} = I$).

$$(1) \quad f(\dot{q})\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = E(t)$$

ove la f è la già citata funzione caratteristica dell'induttanza, ed al solito, R è la resistenza, C la capacità del conden-

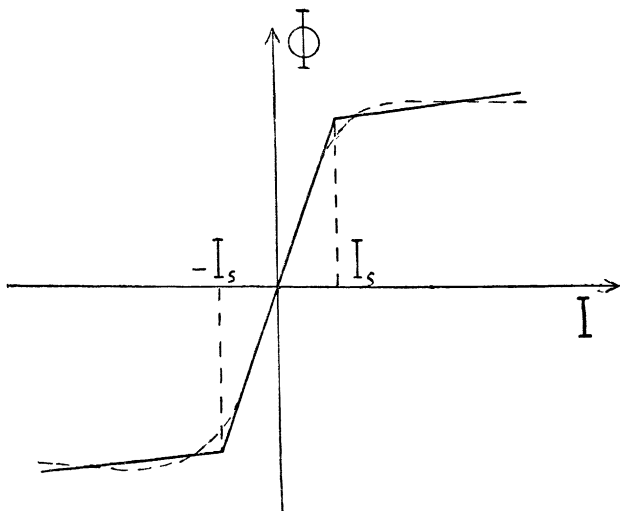


Fig. 2

satore, $E(t)$ è la forza elettromotrice che è supposta periodica di periodo $2T$.

Si facciano le seguenti ipotesi:

t) Le funzioni $f(\dot{q})$, $E(t)$ sono funzioni continue, con le loro derivate prime, pari la prima, dispari la seconda, delle rispettive variabili $\dot{q}$, ed $E(t)$ è periodica di periodo $2T$.

b) Denotati con E^* , $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, σ e δ delle costanti positive con I_s l'intensità di saturazione e con ε_1 ed ε_2 , delle funzioni pari di $\dot{q}$ e con η_1 , η_2 delle funzioni di t , tali che $\eta_2(t+T) = \eta_1(t)$, si ponga

$$(2) \quad \begin{aligned} f(\dot{q}) &= \begin{cases} \mathcal{L}_1 + k\varepsilon_1 & \text{per } |\dot{q}| \geq I_s + \sigma, \\ \mathcal{L}_2 + k\varepsilon_2 & \text{per } |\dot{q}| \leq I_s - \sigma; \end{cases} \\ E(t) &= \begin{cases} -E^* + k\eta_1 & \text{per } \delta \leq t \leq T - \delta, \\ E^* + k\eta_2 & \text{per } T + \delta \leq t \leq 2T - \delta \end{cases} \end{aligned}$$

e siano $|k|$, R , σ , δ sufficientemente piccoli mentre E^* , L_2 , L_1 , C , I_s , soddisfino ad opportune condizioni di *carattere qualitativo*.

Inoltre $f(\dot{q})$ sia monotona in $(I_s - \sigma, I_s + \sigma)$ ed in $(-I_s - \sigma, -I_s + \sigma)$, $E(t)$ lo sia in $(T - \delta, T + \delta)$ ed in $(2T - \delta, 2T + \delta)$.

Si dimostra allora che esiste, e si costruisce in prima approssimazione, una soluzione periodica di minimo periodo $6T$. Questa soluzione è poi stabile in un senso che sarà precisato nel corso della nota ³⁾.

Il metodo seguito consiste nello studio di una certa equazione approssimante la (1). Si determina nel n. 1 una soluzione periodica, dell'equazione approssimante, di periodo minimo $6T$ e nel n. 2 se ne dimostra la stabilità. Dopo di che, nel n. 3, un semplice ragionamento di carattere topologico permette di concludere come asserito.

Si considera parallelamente il caso in cui, fissate restando per il resto le ipotesi fatte nell'enunciato del teorema, R e T siano invece sufficientemente elevati per far notare la sostanziale differenza dei due casi. Si proverà cioè che per la stessa equazione, in questa seconda eventualità, esiste una soluzione periodica di periodo $2T$ che è poi stabile nello stesso senso in cui è stabile la soluzione sottoarmonica del teorema enunciato più sopra.

³⁾ L'esistenza di una soluzione periodica di periodo $2T$ si dimostra abbastanza agevolmente. Infatti il sistema descritto da ¹⁾ rientra in sostanza in quelli che N. Levinson definisce *dissipativi per grandi spostamenti*. Cioè, si può definire nel piano, in cui q , $\dot{q}$ siano coordinate cartesiane, una regione R delimitata da una curva semplice chiusa C ed un certo t^* siffatti, che per ogni soluzione il cui punto rappresentativo $P(t)$ appartenga ad R per $t=0$, lo stesso punto $P(t)$ appartiene ad R per ogni $t \geq t^*$. Un ragionamento di carattere topologico dovuto allo stesso autore (cfr. N. LEVINSON, *Annals of Math.*, 45, (1944) 723-737) permette di concludere che esiste una soluzione periodica di periodo $2T$. Tale soluzione non ha molto spesso interesse fisico perchè è instabile.

1. - Determinazione di una soluzione periodica di una certa equazione approssimante la (1).

Si consideri dapprima la seguente equazione differenziale

$$(3) \quad \mathcal{L}(\dot{x})\ddot{x} + \frac{1}{C}x = E(t),$$

ove $\mathcal{L}(\dot{x})$ è una funzione discontinua definita dalle seguenti uguaglianze

$$(4) \quad \begin{cases} \mathcal{L} = \mathcal{L}_1 & \text{per } |\dot{x}| \geq I^4) \\ \mathcal{L} = \mathcal{L}_2 & \text{per } |\dot{x}| < I \end{cases}$$

essendo $L_1 \ll L_2$, ed $E(t)$ è una funzione, pure discontinua definita come segue

$$(5) \quad \begin{cases} E(t) = -E^* & 0 \leq t < T^5), \\ E(t) = +E^* & T \leq t < 2T. \end{cases}$$

Osservato che non si fanno restrizioni di sorta supponendo $\mathcal{L}_1$ ed $\frac{1}{C}$ uguali all'unità (il che comporta una opportuna scelta dell'unità di misura dei tempi) scriveremo la (3) nella forma:

$$(6) \quad \begin{cases} \ddot{x} + x = E(t) & |\dot{x}| \geq I, \\ \ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 E(t) & |\dot{x}| < I, \end{cases}$$

continuando ad indicare con T il semiperiodo della $E(t)$.

Siccome $\mathcal{L}_1 \ll \mathcal{L}_2$ sarà $\omega^2 \ll 1$. Supponiamo inoltre che sia

$$(7) \quad \frac{\pi}{2} < T < \pi.$$

In queste ipotesi dimostreremo che, almeno se I ed ω^2 sono sufficientemente piccoli, esiste una soluzione di (6), continua con la derivata prima, periodica di periodo minimo $6T$, e la determineremo.

Siano $x, y = \dot{x}$ coordinate cartesiane ortogonali in un piano ed A un punto della semiretta $y = I, x \leq -2E$. Si consi-

4) Abbiamo posto ovviamente per semplicità I al posto di I_s .

5) Denoteremo per semplicità nel seguito E^* con E .

deri, se esiste, la soluzione $(\bar{y}, \bar{x})$ di (6_1) che esce per $t = \tau$ da A con $0 \leq \tau < T$ e tale che risulti

$$(8) \quad \lim_{t \rightarrow T-0} \bar{x}(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow T-0} \bar{y}(t) = y^* > I.$$

Denotata con $-(a + E)$ l'ascissa di A (onde risulterà $a > E$) ed osservato che la traiettoria γ , relativa alla soluzione $\bar{x}, \bar{y}$, è per $\tau \leq t < T$ un arco di cerchio, sarà anche (vedi fig. 3)

$$(9) \quad \cos(T - \tau) = \frac{Iy^* - Ea}{a^2 + I^2},$$

essendo

$$(10) \quad y^* = (a^2 + I^2 - E^2)^{\frac{1}{2}}.$$

certamente maggiore di I , poichè è $a > E$ per ipotesi.

La (9) poi non è assurda se si tien conto della (7), per a

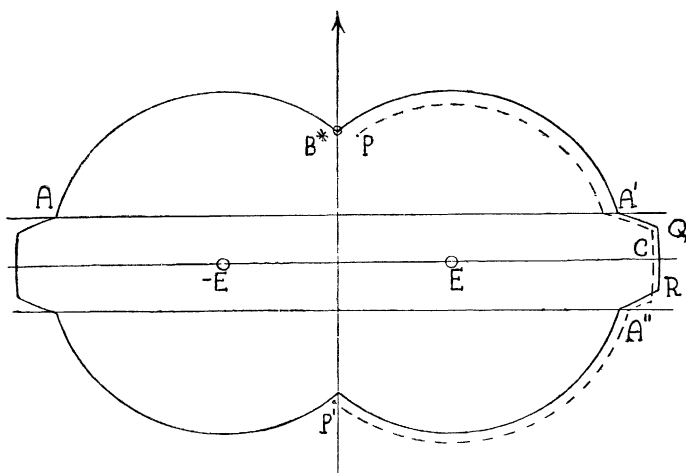


Fig. 3

sufficientemente grande e per un opportuno τ scelto in relazione ad a .

La soluzione di (6_1) che per $t = T$ esce dal punto $B = (0, y^*)$ e rappresentata, per $T \leq t < 2T - \tau$, da un arco di cerchio BA_1 simmetrico, rispetto all'asse y , dell'arco AB . Risulta quindi $x_{A_1} = a + E$, $y_{A_1} = I$.

Si consideri ora la soluzione di (4₂) che per $t = 2T - \tau$ esce dal punto A_1 , ovvero la soluzione $x'(t)$, $y'(t)$ soddisfacente alle

$$(11) \quad \lim_{t \rightarrow 2T - \tau + 0} x'(t) = E + a, \quad \lim_{t \rightarrow 2T - \tau + 0} y'(t) = I.$$

Questa soluzione sarà ovviamente, nell'intervallo aperto a sinistra $2T - \tau$, $2T$, del tipo

$$(12) \quad \begin{cases} x' = E + h \cos(\omega t + \varphi), \\ y' = -h\omega \sin(\omega t + \varphi), \end{cases}$$

ove, tenuto conto di (9), sarà

$$(13) \quad \begin{cases} a + E = E + h \cos(\omega(2T - \tau) + \varphi), \\ I = -h\omega \sin(\omega(2T - \tau) + \varphi). \end{cases}$$

In definitiva a calcoli eseguiti si trova

$$(14) \quad \begin{cases} x_Q = \lim_{t \rightarrow 2T - 0} x'(t) = E + a \cos \omega \tau + \frac{I}{\omega} \sin \omega \tau \\ y_Q = \lim_{t \rightarrow 2T - 0} y'(t) = -\omega \left(a \sin \omega \tau - \frac{I}{\omega} \cos \omega \tau \right). \end{cases}$$

Si osservi che da (14) appare evidente che, per ω sufficientemente piccolo, Q è certamente interno alla striscia $0 < y < I$.

Consideriamo ora la soluzione (x'', y'') di (6₂) che soddisfa alla

$$(15) \quad \lim_{t \rightarrow 0+} x''(t) = x_Q, \quad \lim_{t \rightarrow 0+} y''(t) = y_Q.$$

Essa sarà del tipo

$$(16) \quad x'' = -E + h \cos(\omega t + \varphi), \quad y'' = -\omega h \sin(\omega t + \varphi),$$

e, per le condizioni iniziali (15), risulterà

$$(17) \quad \begin{cases} h \cos \varphi = 2E + a \cos \omega \tau + \frac{I}{\omega} \sin \omega \tau \\ h \sin \varphi = a \sin \omega \tau - \frac{I}{\omega} \cos \omega \tau. \end{cases}$$

Imponiamo ora che per $t = \frac{T}{2}$ risulti

$$(18) \quad y''\left(\frac{T}{2}\right) = 0.$$

La (18) si esplicita senz'altro, tenendo conto di (17), (18), nella

$$(19) \quad 2E \sin \omega \frac{T}{2} + a \sin \omega \left(\tau + \frac{T}{2}\right) - \frac{I}{\omega} \cos \omega \left(\tau + \frac{T}{2}\right) = 0.$$

Si supponga che sia possibile determinare a e τ in maniera da soddisfare a (9), (19) in relazione a determinati valori di T (nei limiti prefissati), di E , di I , e di ω^2 .

Si potrà allora dire di aver determinata una soluzione di (6) periodica di periodo $6T$.

Infatti se, partendo dal punto $C \equiv \left(x''\left(\frac{T}{2}\right), 0\right)$, si continua la costruzione della traiettoria, si osserva facilmente che, nella striscia $-I < y < 0$, essa si sviluppa secondo una spezzata curvilinea CRA'' , simmetrica rispetto all'asse x della spezzata $A'QS$. Basta ora osservare che A'' è simmetrico di A rispetto all'origine O degli assi e che il tempo impiegato dal punto corrente su γ per passare da A ad A'' è $3T$, per concludere come asserito.

Il problema è quindi ridotto alla ricerca di soluzioni a^* , τ^* del sistema (9), (19).

Cominciamo a considerare le (9) e pensiamo esplicitata la funzione $\tau = \varphi(a)$. In un piano cartesiano, in cui siano a , τ coordinate, rappresentiamo la funzione $\varphi(a)$ per $t \geq E$. Si riconosce abbastanza facilmente che per $a \geq E$ la funzione $\varphi(a)$ è crescente ed ha un ramo asintotico alla retta $\tau = T - \frac{\pi}{2} > 0$ (vedi fig. 4) inoltre per $a = E$ si ha

$$\tau = T - \arccos \frac{I^2 - E^2}{E^2 + I^2} = \tau_E$$

che può essere positivo o negativo. Se τ_E è negativo (il che succede per I sufficientemente piccolo), si ha $\tau = 0$ in un punto

M tale che risulta

$$(20) \quad \lim_{I \rightarrow 0} a_M = -\frac{E}{\cos T} > E.$$

Passiamo ora a considerare la funzione $\tau = \psi(a)$ definita implicitamente dalla (19) e, supposto ω^2 sufficientemente pic-

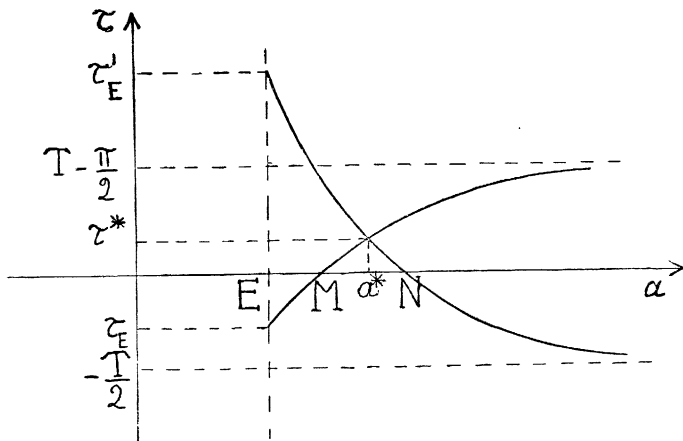


Fig. 4

colo, confondiamo $\sin \omega \left(\frac{T}{2} + \tau \right)$ con $\omega \left(\frac{T}{2} + \tau \right)$ e $\cos \omega \left(\frac{T}{2} + \tau \right)$ con $1 - \frac{\omega^2}{2} \left(\frac{T}{2} + \tau \right)$. La (19) in conseguenza porge

$$(21) \quad \tau = \left(\frac{a^2}{I^2} + \frac{2}{\omega^2} - \frac{2ET}{I} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{T}{2} - \frac{a}{I}.$$

Nel piano a, τ la (21) rappresenta una iperbole avente un asintoto orizzontale di equazione $\tau = -\frac{T}{2}$. Quello dei due rami dell'iperbole che sta sopra l'asintoto incontra l'asse $\tau = 0$ in un punto N di ascissa a_N data da

$$(22) \quad a_N = \frac{2I}{\omega^2 T} - 2E - \frac{TI}{4}.$$

Si osservi ora che per $\omega^2 E$ sufficientemente piccolo rispetto ad I risulta certamente $a_N > a_M$. Inoltre si osservi anche che

il considerato ramo dell'iperbole taglia la retta $a = E$ in un punto τ' di ordinata data da

$$(23) \quad \tau'_E = \left(\frac{E^2}{I^2} + \frac{2}{\omega^2} - \frac{2ET}{I} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{T}{2} - \frac{E}{I}$$

e quindi che risulta per ω^2 sufficientemente piccolo $\tau'_E > 0$.

Si può quindi concludere (vedi fig. 4) che il sistema $\tau = \psi(a)$, $\tau = \varphi(a)$ ammette una soluzione (sola) a^* , τ^* , con τ^* positivo e minore di $T - \frac{\pi}{2}$ e con a^* maggiore di E e tale che risulta inoltre $a_M < a^* < a_N$.

OSSERVAZIONE I. — Si osservi che

$$\lim_{I \rightarrow 0} \left(\frac{d\varphi}{da} \right)_{a = -\frac{E}{\cos T}} = \frac{\cos^2 T}{E \sin T},$$

e che la concavità della curva $\tau = \varphi(a)$ è rivolta verso il basso.

OSSERVAZIONE II. — Si consideri, anziché la 3); l'equazione

$$(3') \quad \mathfrak{L}(\dot{x})\dot{x} + R\dot{x} + \frac{1}{C}x = E(t)$$

ove $\mathfrak{L}(\dot{x})$ ed $E(t)$ soddisfino ancora alle (4) e (5), mentre T ed R sono sufficientemente elevati. Si dimostra allora abbastanza facilmente che esiste un intorno $\mathfrak{J}$, per fissare le idee circolare, del punto $(E, 0)$, tale che per una generica soluzione di (3'), il cui punto rappresentativo $P(t)$ appartenga per $t=0$ ad $\mathfrak{J}$, si ha che $P(T)$ appartiene ad un intorno $\mathfrak{J}'$ del punto $(-E, 0)$, tutto interno all'intorno $\mathfrak{J}_1$ simmetrico di $\mathfrak{J}$ rispetto ad O , e che $P(2T)$ appartiene ad un intorno $\mathfrak{J}''$ del punto $(E, 0)$ tutto interno ad $\mathfrak{J}$. Tanto basta per assicurare l'esistenza di una soluzione periodica di periodo $2T$, in base al noto teorema di Brouwer.

In sostanza si può dire che se T è sufficientemente elevato il sistema riesce *praticamente* a raggiungere nell'intervallo $(0, T)$ la posizione di equilibrio $(-E, 0)$ e nell'intervallo $(T, 2T)$ la posizione di equilibrio $(E, 0)$. Il moto oscillatorio è costituito quindi *praticamente* dai successivi passaggi da una posizione di equilibrio all'altra.

2. - Stabilità della soluzione periodica sottoarmonica.

In questo paragrafo studieremo la stabilità della soluzione sottoarmonica trovata nel n. precedente.

Si consideri un punto P prossimo al punto $B^* \equiv (0, y^*)$, punto in cui il ciclo γ^* determinato più sopra interseca l'asse y (vedi fig. 3). Denoteremo con $(\xi, y^* + \eta)$ le coordinate del generico P di un intorno di B^* , trattando nel seguito ξ , ed η come infinitesimi principali, e con $S(t)$ il punto che descrive la generica traiettoria γ_p , relativa al sistema (6), che allo istante $t = T$ esce da P .

Poichè τ^* è positivo se P è molto prossimo a B^* la traiettoria γ incontra la semiretta $y = I$ in un punto A' di coordinate $x_{A'}$, I , all'istante $T - \tau$, essendo

$$(24) \quad \begin{cases} x_{A'} = a + E = E + \{(E - \xi)^2 + (y^* + \eta)^2 - I^2\}^{\frac{1}{2}}. \\ \cos(T - \tau) = 1 - \frac{(a_{A'} - \xi)^2 + (y^* - I + \eta)^2}{2\{(E - \xi)^2 + (y^* + \eta)^2\}}. \end{cases}$$

Con una costruzione analoga a quella del n. precedente si determinano $Q = S(2T)$, $R = S(3T)$ ove ora però Q ed R non sono più necessariamente simmetrici rispetto all'asse x .

Si trova con facili calcoli successivamente

$$(25) \quad \begin{cases} x(2T) = E + a \cos \tau + \frac{I}{\omega} \sin \omega \tau, \\ y(2T) = -\omega \left(a \sin \omega \tau - \frac{I}{\omega} \cos \omega \tau \right), \\ x(3T) = 2E \left(\cos \omega T - \frac{1}{2} \right) + a \cos \omega(T + \tau) + \\ \quad + \frac{I}{\omega} \sin \omega(T + \tau), \\ y(3T) = -2E\omega \sin \omega T - \omega a \sin \omega(T + \tau) + \\ \quad + I \cos \omega(T + \tau). \end{cases}$$

Proseguendo, questa traiettoria, γ_p , incontra la retta $y = -I$ in un punto A'' all'istante $3T + \tau'$ ove τ' soddisfa alla relazione

$$(26) \quad \begin{aligned} -I &= -2E\omega \sin \omega(T + \tau') + 2E\omega \sin \omega \tau' - \\ &- \omega a \sin \omega(T + \tau + \tau') + I \cos \omega(T + \tau' + \tau), \end{aligned}$$

e l'ascissa di A'' è data da

$$(27) \quad x(3T + \tau') = E(1 - 2 \cos \omega \tau') + 2E \cos \omega(T + \tau') + \\ + a \cos \omega(T + \tau + \tau') + \frac{I}{\omega} \sin \omega(T + \tau + \tau').$$

In definitiva sempre per P sufficientemente prossima a B^* il punto $P' = S(4T)$ ha coordinate date da

$$(28) \quad \begin{cases} x(4T) = E + (x_{A''} - E) \cos(T - \tau') - I \sin(T - \tau'), \\ y(4T) = - (x_{A''} - E) \sin(T - \tau') - I \cos(T - \tau'). \end{cases}$$

Ora da (24₁), trascurando infinitesimi di ordine superiore rispetto a ξ ed η , si ha

$$(29) \quad a = a^* - \frac{E}{a^*} \xi + \frac{y^*}{a^*} \eta + 0_2$$

mentre da (24₂) si trae analogamente

$$(30) \quad \tau = \tau^* + A\xi + B\eta + 0_2 = \tau^* + \frac{A'}{x(T - \tau^*)} \xi + \frac{B'}{x(T - \tau^*)} \eta + 0_2$$

ove

$$(31) \quad \begin{cases} A' = - \frac{(a^{*2} + I^2)(a^* + E^2) - 2Ea^*(a^*E - y^*I)}{a^*(a^{*2} + I^2)^2} \\ B' = - \frac{y^*E(a^* - I^2) + a^*I(2E^2 - a^{*2} - I^2)}{a^*(a^{*2} + I^2)^2} \end{cases}.$$

Analogamente proseguendo sempre nella solita approssimazione si trova la (26), tenuto conto di (29), (30),

$$(32) \quad \tau' = \tau^* + A_1\xi + B_1\eta + 0_2$$

ove si sia posto

$$3) \quad \begin{cases} A_1 = \frac{\omega \alpha \sin \omega(T + 2\tau^*) + \omega^2 a^* A \cos \omega(T + 2\tau^*) + I \omega A \sin \omega(T + 2\tau^*)}{4E\omega^2 \sin \omega \frac{T}{2} \sin \omega \left(\frac{T}{2} + \tau^* \right) - \omega^2 a^* \cos \omega(T + 2\tau^*) - I \omega \sin \omega(T + 2\tau^*)}, \\ B_1 = \frac{\omega \beta \sin \omega(T + 2\tau^*) + \omega^2 a^* B \cos \omega(T + 2\tau^*) + I \omega B \sin \omega(T + 2\tau^*)}{4E\omega^2 \sin \omega \frac{T}{2} \sin \omega \left(\frac{T}{2} + \tau^* \right) - \omega^2 a^* \cos \omega(T + 2\tau^*) - I \omega \sin \omega(T + 2\tau^*)}. \end{cases}$$

Inoltre, qualora si ponga

$$(34) \quad x_{A''} = a' + E = E + a^* + \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta + 0_2;$$

tenendo conto di (27), (29), (30), (32), si ottiene

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = -4E\omega A_1 \cos \omega \left(\frac{T}{2} + \tau^* \right) \operatorname{sen} \omega \frac{T}{2} - \\ - \omega a^* (A + A_1) \operatorname{sen} \omega (T + 2\tau^*) + I(A + A_1) \cos \omega (T + 2\tau^*), \\ \beta_1 = -4E\omega B_1 \cos \omega \left(\frac{T}{2} + \tau^* \right) \operatorname{sen} \omega \frac{T}{2} - \\ - \omega a^* (B + B_1) \operatorname{sen} \omega (T + 2\tau^*) + I(B + B_1) \cos \omega (T + 2\tau^*). \end{array} \right.$$

Infine ricordando che $P' = S(4T)$ si ha da (28)

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{P'} = [(\alpha_1 + IA_1) \cos (T - \tau^*) + a^* A_1 \operatorname{sen} (T - \tau^*)] \xi + \\ + [(\beta_1 + IB_1) \cos (T - \tau^*) + B_1 \operatorname{sen} (T - \tau^*)] \eta + 0_2, \\ y_{P'} = -y^* - [(\alpha_1 + IA_1) \operatorname{sen} (T - \tau^*) + a^* A_1 \cos (T - \tau^*)] \xi + \\ + [(\beta_1 + IB_1) \operatorname{sen} (T - \tau^*) + B_1 \cos (T - \tau^*)] \eta + 0_2. \end{array} \right.$$

Si consideri ora il punto $\mathcal{T}(P)$ simmetrico di P' rispetto all'origine O , indicando ovviamente con $\mathcal{T}$ la trasformazione che fa passare da P a $\mathcal{T}(P)$. In $\mathcal{T} B^*$ è un punto unito. Si tratta di vedere se è un punto unito *stabile*.

L'equazione della trasformazione affine, equivalente in prima approssimazione alla $\mathcal{T}$ nell'intorno di B^* , qualora si tenga conto di (36), e si denotino con ξ' e $y^* + \eta'$ le coordinate di $\mathcal{T}(P)$, si può scrivere nella forma

$$(37) \quad \xi = a_{11} \xi + a_{12} \eta, \quad \eta' = a_{21} \xi + a_{22} \eta,$$

ove si è posto

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11} = -[(\alpha_1 + IA_1) \cos (T - \tau^*) + a^* A_1 \operatorname{sen} (T - \tau^*)], \\ a_{12} = -[(\beta_1 + IB_1) \cos (T - \tau^*) + a^* B_1 \operatorname{sen} (T - \tau^*)], \\ a_{21} = (\alpha_1 + IA_1) \operatorname{sen} (T - \tau^*) + a^* A_1 \cos (T - \tau^*), \\ a_{22} = (\beta_1 + IB_1) \operatorname{sen} (T - \tau^*) + a^* B_1 \cos (T - \tau^*). \end{array} \right.$$

Affinchè B^* sia un punto unito stabile occorre e basta che le radici reali o complesse S_1, S_2 dell'equazione in S

$$(39) \quad S^2 - (a_{11} + a_{22})S + (a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}) = 0$$

siano tutte e due in modulo minori di 1 ⁶⁾.

Una discussione generale è certamente molto complicata se non impossibile. Ci limiteremo a determinare una condizione sufficiente per la stabilità.

Da (38) intanto si ha

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11} + a_{22} = (\beta_1 + IB_1 - a^*A_1) \operatorname{sen}(T - \tau^*) - \\ \quad - (\alpha_1 + IA_1 - a^*B_1) \cos(T - \tau^*), \\ a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = (\cos^2(T - \tau^*) - \\ \quad - \operatorname{sen}^2(T - \tau^*))a^*(\beta_1A_1 - \alpha_1B_1). \end{array} \right.$$

Supporremo nel seguito I ed ω^2 infinitesimi dello stesso ordine. Al limite per I ed ω^2 tendenti simultaneamente a zero in modo però che risulti finito e maggiore di a_N il limite di a_M , si constata facilmente da (40₂) e (35) che $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ tende a zero.

Per vedere cosa succede di $a_{11} + a_{22}$ cominciamo intanto ad osservare che si ha, da (30) e (31),

$$(41) \quad \lim_{I \rightarrow 0} A = A^{(l)} = \frac{E^2 - a^{*2}}{a^{*3} \operatorname{sen}(T - \tau^*)}, \quad \lim_{I \rightarrow 0} B = B^{(l)} = -\frac{E\sqrt{a^2 - E^2}}{a^{*3} \operatorname{sen}(T - \tau^*)}.$$

Inoltre si riconosce da (35) che α_1, β_1 tendono a zero per $I \rightarrow 0$ ed $\omega^2 \rightarrow 0$, sempre nel modo suddetto, e che risulta da (33)

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{\substack{I \rightarrow 0 \\ \omega^2 \rightarrow 0}} A_1 = -\frac{\alpha(T + 2\tau^*) + a^*A^{(l)}}{a^*} = A_1^{(l)}, \\ \lim_{\substack{I \rightarrow 0 \\ \omega^2 \rightarrow 0}} B_1 = -\frac{\beta(T + 2\tau^*) + a^*B^{(l)}}{a^*} = B_1^{(l)} \end{array} \right.$$

⁶⁾ Vedi per es. N. MINORSKY, *Introduction to non-linear mechanics*, 1947, Ann. Arbor, p. 329.

ovvero tenuto conto di (29)

$$(43) \quad A^{(l)} = -A^{(l)} + \frac{E(T + 2\tau^*)}{a^{*2}},$$

$$B^{(l)} = -B^{(l)} - \frac{\sqrt{a^{*2} - E^2} E^2 (T + 2\tau^*)}{a^{*2}}.$$

Quindi da (40₁) si ha

$$(44) \quad \lim_{\substack{I \rightarrow 0 \\ \omega^2 \rightarrow 0}} (a_{11} + a_{22}) = \left(a^* A^{(l)} - \frac{E a^* (T + 2\tau^*)}{a^{*2}} \right) \sin (T - \tau^*) -$$

$$- \left(a^* B^{(l)} + a^* \frac{\sqrt{a^{*2} - E^2}}{a^{*2}} (T + 2\tau^*) \right) \cos (T - \tau^*),$$

ovvero, tenuto conto di (41),

$$(45) \quad \lim_{\substack{I \rightarrow 0 \\ \omega^2 \rightarrow 0}} (a_{11} + a_{22}) = \Phi(a^*, \tau^*, E, T) =$$

$$= -1 + \frac{E^2}{a^{*2}} - \frac{E(T + 2\tau^*)}{a^*} \sin (T - \tau) +$$

$$+ \frac{\sqrt{a^{*2} - E^2}}{a^*} \cot (T - \tau^*) \left(\frac{E}{a^*} - (T + 2\tau^*) \sin (T - \tau^*) \right).$$

Si supponga ora di scegliere I , ω^2 qualsiasi, sempre nei limiti di validità delle considerazioni svolte più sopra, ma in modo che la soluzione periodica, costruita nel n. precedente, corrisponda a valori a^* , τ^* prossimi (e necessariamente maggiori) rispettivamente a $-\frac{E}{\cos T}$, 0. Ciò sarà sempre possibile fare come risulta dalle considerazioni svolte alla fine del n. precedente.

Si osservi ora che risulta

$$(46) \quad \Phi\left(-\frac{E}{\cos T}, 0, E, T\right) = -1.$$

Se, come subito faremo, dimostriamo ora, che per $a^* \rightarrow -\frac{E}{\cos T} + 0$ e $\tau^* \rightarrow +0$, essendo sempre a^* , τ^* soluzioni

del sistema (9), (19), l'espressione suddetta tende a -1 per valori maggiori di -1 , potremo concludere che almeno per valori di E , T , I , ω^2 soddisfacenti ad opportune condizioni qualitative la φ sarà certamente in modulo minore di 1.

Ciò significherà che, per I ed ω^2 sufficientemente piccoli ma in modo che il loro rapporto I/ω^2 , T ed E soddisfacciano opportune condizioni qualitative, le radici dell'equazione (39) saranno ambedue in modulo minori di 1, e questo perchè per I ed ω^2 tendenti a zero comunque, l'espressione $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ tende a zero, come abbiamo visto più sopra.

Risulterà così provato, in questi casi, la stabilità della soluzione periodica.

Si ha, intanto

$$(47) \quad \begin{cases} \Phi'_{\alpha*} \left(-\frac{E}{\cos T}, 0, E, T \right) = \frac{\cos^2 T}{E \sin T} (\cot T + T) \\ \Phi'_{\tau*} \left(-\frac{E}{\cos T}, 0, E, T \right) = -\cot T - T. \end{cases}$$

Essendo $T > \frac{\pi}{2}$, l'espressione a secondo membro di (47₁) è positiva se

$$(48) \quad \cot T + T > 0,$$

per il che basta che sia, per esempio,

$$(49) \quad \frac{\pi}{2} < T < \frac{5\pi}{6}.$$

Consideriamo la funzione Φ nell'intorno del punto M del piano (a, τ) (vedi fig. 4), per un generico E , e T soddisfacente a (49).

Poichè in M è $\Phi'_{\alpha*} > 0$ e $\Phi'_{\tau*} < 0$ ((47), (48)) da (47) si trae che Φ crescerà quando, partendo da N , fissi restando E e T , ci si muova nelle direzioni orientate che stanno internamente all'angolo acuto θ formato dalla direzione positiva dell'asse a e da quella che forma con questa un angolo acuto la cui tangente è $\frac{\cos^2 T}{E \sin T}$.

Ricordiamo ora l'osservazione I fatta alla fine del n. 1. Per I tendente a zero la curva $\tau = \varphi(a)$ tende a passare per il punto di ascissa $\frac{-E}{\cos T}$ ed il suo coefficiente angolare tende ivi ad avere proprio il valore $\frac{\cos^2 T}{E \sin T}$; inoltre in quel punto (ed anzi ovunque) la curva è concava verso il basso.

Dato l'andamento delle due curve (vedi ancora fig. 4) si riconosce quindi che per I ed ω^2 tendenti a zero in modo che N sia molto prossimo a M , il punto a^* , τ^* apparterrà a quella parte di un intorno di M che appartiene anche a θ .

Quindi ivi sarà $\Phi > -1$, cioè infine

$$(50) \quad \lim_{\substack{I \rightarrow 0 \\ \omega^2 \rightarrow 0}} (a_{11} + a_{22}) > -1,$$

sempre che, ripetiamo, T soddisfi a (49) ed I , ω^2 tendano a zero in maniera che il punto N cada a destra di N e sia sufficientemente prossimo ad M .

In base a (22), concluderemo quindi dicendo che per $\frac{\pi}{2} < T < 5\frac{\pi}{6}$, I ed ω^2 sufficientemente piccoli e tali che risulti $\frac{2I}{\omega^2 T} - 2E - \frac{TI}{4} - a_M > 0$, ma sufficientemente piccolo, l'equazione (3) ha una soluzione periodica di periodo minimo $6T$, stabile.

3. - Conclusione.

Premettiamo il seguente richiamo.

Allorchè le due radici S_1, S_2 dell'equazione (39) sono tutte e due in modulo minori di 1 si può senz'altro dire che, considerato un intorno completo $\mathfrak{T}$ di B^* sufficientemente piccolo, delimitato da un cerchio γ , il trasformato $\mathfrak{T}(\gamma)$ è tutto contenuto in γ .

Denoteremo con ρ la minima distanza di $\mathfrak{T}(\gamma)$ da γ .

Consideriamo ora l'equazione differenziale

$$(51) \quad f'(\dot{x})\ddot{x} + R\dot{x} + \frac{1}{C}x = E(t)$$

ove $E(t)$ ed $f'(\dot{x})$ godano delle proprietà ammesse per la $E(t)$ stessa e per la $f'(q)$ nella prefazione. Si supponga inoltre che

$\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \frac{1}{C}, E, T$ siano tali che in corrispondenza ad essi valga il teorema di esistenza e stabilità dimostrato nei numeri precedenti.

Eseguiti su (51) gli stessi cambiamenti di variabile che portano da (3) a (6), confrontiamo le soluzioni di (6) con quelle di (51). Cioè, accanto alle soluzioni dell'equazione (6) che escono per $t = T$ da un generico P dell'intorno di B^* , si considerino le analoghe soluzioni di (51), che nello stesso istante escono dallo stesso P . Denotiamo con x, y la generica soluzione di (6), e con $x^{(v)}, y^{(v)}$ la corrispondente di (51).

Sarà certamente

$$(x^{(v)}(4T) - x(4T))^2 + (y^{(v)}(4T) - y(4T))^2 \leq \varepsilon^2$$

con ε tendente a zero al tendere simultaneamente a zero di k, σ, δ, R ⁷⁾.

Si scelgano allora $|k|, \sigma, \delta, R$ tanto piccoli che risulti $\varepsilon < \rho$. Nella trasformazione $\mathcal{T}^{(v)}$ dell'intorno di B^* , relativa all'equazione (51), sarà ancora $\mathcal{T}^{(v)}(\gamma)$ tutto contenuto in γ . Tanto basta per dire che in $\mathcal{I}$ c'è almeno un punto unito rispetto alla $\mathcal{T}^{(v)}$, cioè che esiste, anche per l'equazione (51), una soluzione periodica di periodo minimo $6T$.

Si può anche dire che tutte le soluzioni di (51), che escono per $t = T$ dai punti di $\mathcal{I}$ passano per un punto interno all'intorno $\mathcal{I}'$, simmetrico di $\mathcal{I}$ rispetto all'origine, in ogni istante $(6n + 4)T$, per un punto interno ad $\mathcal{I}$ in ogni istante $(6n + 1)T$, qualunque sia n .

Possiamo concludere che la soluzione periodica di cui abbiamo dimostrata l'esistenza è stabile nel senso che le soluzioni di (51), relative a condizioni iniziali sufficientemente prossime a quella della soluzione periodica, si scostano, per ogni t , da essa, meno di una quantità dello stesso ordine dell'ampiezza di $\mathcal{I}$.

⁷⁾ Questa proprietà non è del tutto immediata, anzi la dimostrazione, pur non presentando eccessive difficoltà di carattere concettuale, è risultata laboriosa. Non la esponiamo qui per ragioni di brevità.

OSSERVAZIONE. — In base a quanto è stato detto nella Osservazione II, e con un ragionamento analogo a quello svolto quì sopra, fondato però ora non sulle stabilità della soluzione periodica di periodo $2T$, stabilità che non è facile provare, ma nel fatto che $\mathcal{J}''$ è completamente contenuto in $\mathcal{J}$ ed $\mathcal{J}'$ in $\mathcal{J}_1$, si prova che, se $|k|$ è sufficientemente piccolo ed R e T sufficientemente elevati, esiste una soluzione periodica che gode delle stesse proprietà della soluzione dell'equazione approssimante rilevate nella suddetta Osservazione II. Questa soluzione è poi stabile nello stesso senso della soluzione sottoarmonica di più sopra.