

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

CARLO BONATI SAVORGNAN

Sulla derivazione di funzioni composte

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 22 (1953), p. 258-264

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__258_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SULLA DERIVAZIONE DI FUNZIONI COMPOSTE

Nota () di CARLO BONATI SAVORGNA (a Padova)*

In questa nota mi propongo di estendere alle funzioni composte del tipo $f(x(t), y(t), z(t))$ un teorema di A. SCORZA TOSO sulla derivazione delle funzioni composte del tipo $f(x(t), y(t))$ ¹).

Le ipotesi di cui avrò bisogno sono più restrittive di quelle alla base di quest'ultimo teorema, precisamente dovrò supporre la $f(x, y, z)$ dotata di derivate prime, continue rispetto alle coppie di variabili, in tutti i punti di un parallelepipedo che contenga nel suo interno la curva $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$; e ciò al fine di potermi giovare di un risultato ottenuto da B. LODIGIANI nel corso di un suo lavoro²).

Comincerò a dimostrare un teorema relativo al caso che il parametro t coincida con la variabile x ³), indi, con ipotesi leggermente più restrittive, passerò a dimostrare il teorema nel caso generale.

1. - TEOREMA I. - *La funzione $f(x, y, z)$ definita nel parallelepipedo*

$$R: a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d, \quad e \leq z \leq g$$

(*) Pervenuta in Redazione il 20 Aprile 1953.

¹) A. SCORZA TOSO, *Sulla derivazione di una funzione composta*. [Rendiconti Sem. Matematico di Padova, Vol. XXI (1952), pagg. 198-201].

²) B. LODIGIANI, *Sulla differenziabilità asintotica regolare delle funzioni di più variabili*. Lavoro in corso di stampa in questo volume.

³) Il caso della funzione $f(x, y(x))$ è già stato studiato da G. SCORZA DRAGONI in *Un'osservazione sulla derivata di una funzione composta*. [Rendiconti Seminario Matematico di Padova, Vol. XX (1951), pagg. 462-467].

ammetta ivi: la derivata prima rispetto ad x ; la derivata prima rispetto ad y , continua rispetto alla coppia (x, y) ; la derivata prima rispetto a z , misurabile rispetto ad x e continua rispetto alla coppia (y, z) ⁴). Le funzioni $y = y(x)$, $z = z(x)$ risultino definite nell'intervallo

$$I: a \leq x \leq b,$$

vi soddisfacciano nell'interno alle

$$c < y(x) < d, \quad e < z(x) < g$$

e siano ivi quasi ovunque derivabili. Allora la funzione composta

$$F(x) = f(x, y(x), z(x))$$

è dotata di derivata asintotica quasi ovunque in I , e questa derivata è uguale quasi ovunque a

$$f'_x(x, y(x), z(x)) + f'_y(x, y(x), z(x))y'(x) + f'_z(x, y(x), z(x))z'(x);$$

di guisa che se $F(x)$ è quasi ovunque derivabile, sussiste quasi ovunque la solita formula di derivazione delle funzioni composte.

In virtù di un teorema di G. STAMPACCHIA⁵), preso un intero positivo n , possiamo determinare un insieme perfetto I_n contenuto in I , in guisa che sia $mI_n > mI - \varepsilon$ ⁶) e che la funzione $f'_z(x, y, z)$ risulti continua se considerata come definita soltanto nell'insieme H_n costituito dai punti di R aventi la prima coordinata in I_n .

Presi allora due punti $P(x, y, z)$ e $P_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$

⁴) Oppure si può supporre ad esempio che esistano in R : la derivata prima rispetto a z ; la derivata prima rispetto ad x continua rispetto alla coppia (x, z) ; la derivata prima rispetto ad y misurabile rispetto ad x e continua rispetto alla coppia (y, z) .

⁵) G. STAMPACCHIA, *Sopra una classe di funzioni in n variabili*. [Ricerche di matematica, Vol. I (1952), fascic. 1°, pagg. 27-54].

⁶) Denotando, come di consueto, con mE la misura, secondo Lebesgue, dell'insieme E .

appartenenti ad H_n , consideriamo ⁷⁾ la spezzata $PP'P_1$, essendo P' e P'' i punti di coordinate rispettivamente $(x + \Delta x, y, z)$ e $(x + \Delta x, y + \Delta y, z)$; possiamo allora scrivere

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z) = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \\ - f(x + \Delta x, y + \Delta y, z) + f(x + \Delta x, y + \Delta y, z) - f(x + \Delta x, y, z) + \\ + f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)$$

da cui, per il teorema di Lagrange e per quello del differenziale, si trae

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z) = \\ = f'_z(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \vartheta \Delta z) \Delta z + \\ + f'_y(x + \Delta x, y + \vartheta_1 \Delta y, z) \Delta y + f'_x(x, y, z) \Delta x + \gamma$$

con ϑ, ϑ_1 compresi tra 0 ed 1, e γ infinitesimo di ordine superiore rispetto a Δx .

D'altronde, osservando che il segmento $P''P_1$ appartiene ad H_n (insieme in cui $f'_z(x, y, z)$ è continua nel complesso delle variabili) e ricordando le ipotesi fatte sulla funzione f'_y , si ricavano le relazioni

$$f'_z(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \vartheta \Delta z) = f'_z(x, y, z) + \alpha \\ f'_y(x + \Delta x, y + \vartheta_1 \Delta y, z) = f'_y(x, y, z) + \beta$$

dove α, β sono infinitesime con $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$; cosicchè si può in definitiva scrivere

$$(1) \quad f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z) = f'_x(x, y, z) \Delta x + \\ + f'_y(x, y, z) \Delta y + f'_z(x, y, z) \Delta z + \omega$$

con ω infinitesimo di ordine superiore rispetto a $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$.

Se ora indichiamo con $\bar{I}_n$ l'insieme dei punti (di I_n) di

⁷⁾ Per quanto riguarda il procedimento usato per dimostrare la successiva formula (1), che ho creduto qui opportuno esporre per maggiore chiarezza, cfr. loc. cit. in ²⁾.

Vedi anche J. CECCONI, *Sulla differenziabilità nel senso di Stolz di una funzione di più variabili*. [Ricerche di matematica, vol. I (1952), fascic. 2°, pagg. 317-324].

densità lineare 1 per I_n , posto

$$\bar{I} = \sum_n \bar{I}_n$$

risulta ovviamente $m\bar{I} = b - a$.

Premesso questo sia x_0 un punto di $\bar{I}$ nel quale le funzioni $y = y(x)$, $z = z(x)$ risultino derivabili: x_0 apparterrà ad uno (almeno), $\bar{I}_r$, degli insiemi $\bar{I}_n$ ($n = 1, 2, \dots$); e sia $x_0 + h$ un punto di I_r . La (1) porge allora

$$\begin{aligned} F(x_0 + h) - F(x_0) &= f(x_0 + h, y(x_0 + h), z(x_0 + h)) - \\ &- f(x_0, y(x_0), z(x_0)) = f'_x(x_0, y(x_0), z(x_0))h + \\ &+ f'_y(x_0, y(x_0), z(x_0))[y(x_0 + h) - y(x_0)] + \\ &+ f'_z(x_0, y(x_0), z(x_0))[z(x_0 + h) - z(x_0)] + \omega \end{aligned}$$

con ω infinitesimo di ordine superiore rispetto ad h ; se ora dividiamo per h e facciamo tendere h a zero (in guisa che $x_0 + h$ appartenga ad I_r ; si noti che allora h tende a zero mantenendosi in un insieme di densità lineare uno nell'origine) troviamo appunto che la derivata asintotica di $F(x)$ in x_0 vale

$$\begin{aligned} f'_x(x_0, y(x_0), z(x_0)) + f'_y(x_0, y(x_0), z(x_0))y'(x_0) + \\ + f'_z(x_0, y(x_0), z(x_0))z'(x_0). \end{aligned}$$

Ma, per quanto visto, x_0 può coincidere con quasi tutti i punti di I ; donde la conclusione.

OSSERVAZIONE. — Si può facilmente vedere come il teorema precedente rimanga valido anche nell'ipotesi meno restrittiva che la $f(x, y, z)$ ammetta in R le derivate prime (con le condizioni già viste) al di fuori di un insieme avente la proiezione sull'asse x di misura (lineare) nulla^{s)}.

2. — Passando al caso generale dimostrerò ora il seguente

TEOREMA II. - *La funzione $f(x, y, z)$ definita nel parallelepipedo*

^{s)} Si noti infine come il teorema sia vero anche supponendo la $f'_x(x, y, z)$ esistente soltanto nei punti della curva $y = y(x)$, $z = z(x)$.

$$R: a \leq x \leq b \quad , \quad c \leq y \leq d \quad , \quad e \leq z \leq g$$

ammetta ivi le derivate prime continue rispetto alle coppie di variabili. Le funzioni $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ siano assolutamente continue nell'intervallo

$$I: \alpha \leq t \leq \beta$$

risultando ivi quasi ovunque

$$(2) \quad x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) > 0.$$

Inoltre il punto $[x(t), y(t), z(t)]$ sia interno ad R per quasi tutti i t di I . Allora la funzione composta

$$F(t) = f(x(t), y(t), z(t))$$

è dotata di derivata asintotica quasi ovunque in I e questa derivata è uguale quasi ovunque a

$$f'_x(x(t), y(t), z(t))x'(t) + f'_y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + \\ + f'_z(x(t), y(t), z(t))z'(t);$$

di guisa che se $F(t)$ è quasi ovunque derivabile, sussiste quasi ovunque la solita formula di derivazione delle funzioni composte.

Preso un intero positivo n , possiamo determinare (in virtù del teorema già citato nel n. 1) tre insiemi perfetti J_n^x , J_n^y , J_n^z contenuti rispettivamente nei segmenti

$$a \leq x \leq b \quad , \quad y = 0 \quad , \quad z = 0 \\ x = 0 \quad , \quad c \leq y \leq d \quad , \quad z = 0 \\ x = 0 \quad , \quad y = 0 \quad , \quad e \leq z \leq g$$

in guisa che sia

$$mJ_n^x > (b - a) - \frac{1}{n} \quad ; \quad mJ_n^y > (d - c) - \frac{1}{n} \quad ; \quad mJ_n^z > (g - e) - \frac{1}{n}$$

e che le funzioni f'_x , f'_y , f'_z siano tutte e tre continue (se considerate come definite soltanto) in ciascuno degli insiemi H_n^x , H_n^y , H_n^z costituiti nell'ordine da quei punti di R che hanno rispettivamente la x in J_n^x , la y in J_n^y e la z in J_n^z . Indi-

chiamo ancora con I_n^x l'insieme dei punti di I trasformati dalla $x = x(t)$ in punti appartenenti a J_n^x e con $\bar{I}_n^x$ l'insieme dei punti di I_n^x che sono di densità lineare uno per I_n^x ; in maniera analoga si definiscano gli insiemi $I_n^y, \bar{I}_n^y, I_n^z, \bar{I}_n^z$.

Posto

$$I' = \sum_n (I_n^x + I_n^y + I_n^z) \quad ; \quad \bar{I}' = \sum_n (\bar{I}_n^x + \bar{I}_n^y + \bar{I}_n^z)$$

è facile vedere come la misura (secondo Lebesgue) dell'insieme I' (e quindi anche dell'insieme $\bar{I}'$, essendo ovviamente $mI' = m\bar{I}'$) sia uguale a $(\beta - \alpha)$; infatti, nell'insieme $I - I'$, in virtù di un noto teorema⁹⁾, risultano verificate le

$$x'(t) = 0 \quad , \quad y'(t) = 0 \quad , \quad z'(t) = 0 \quad ,$$

donde, per la (2), l'asserto.

Sia ora t_0 un punto di $\bar{I}'$ nel quale le funzioni $x(t), y(t), z(t)$ siano derivabili, e tale inoltre che in esso sia verificata la (2) e che il punto $[x(t_0), y(t_0), z(t_0)]$ risulti interno ad R (di guisa che t_0 può assumere quasi tutte le posizioni in I); esso apparterrà ad uno (almeno) degli insiemi $\bar{I}_n^x, \bar{I}_n^y, \bar{I}_n^z$ ($n = 1, 2, \dots$), e sia ad es. $\bar{I}_r^x$ tale insieme. Allora indicato con h un numero tale che $t_0 + h$ appartenga ad I_r^x , di guisa che h si può far tendere a zero mantenendolo in un insieme di densità lineare uno nell'origine, in base alla formula (1) del n. 1 (che risulta verificata per ogni coppia di punti appartenenti ad uno degli insiemi I_n^x, I_n^y, I_n^z ($n = 1, 2, \dots$)), risulta

$$\begin{aligned} F(t_0 + h) - F(t_0) &= f(x(t_0 + h), y(t_0 + h), z(t_0 + h)) - \\ &- f(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) = f'_x(x(t_0), y(t_0), z(t_0))[x(t_0 + h) - x(t_0)] + \\ &+ f'_y(x(t_0), y(t_0), z(t_0))[y(t_0 + h) - y(t_0)] + \\ &+ f'_z(x(t_0), y(t_0), z(t_0))[z(t_0 + h) - z(t_0)] + \omega \end{aligned}$$

con ω infinitesimo di ordine superiore rispetto ad h ; se adesso dividiamo per h e facciamo tendere h a zero, troviamo

⁹⁾ Vedi L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle variazioni*. [Zanichelli, Bologna, 1922], vol. I, N. 62, b.

che la derivata asintotica di $F(t)$ in t_0 (esiste e) vale appunto

$$f'_x(x(t_0), y(t_0), z(t_0))x'(t_0) + f'_y(x(t_0), y(t_0), z(t_0))y'(t_0) + \\ + f'_z(x(t_0), y(t_0), z(t_0))z'(t_0).$$

OSSERVAZIONE. — In analogia a quanto detto nell'osservazione finale del n. 1, anche ora facciamo notare (e la cosa risulta pressochè immediata) come il teorema precedente rimanga valido anche nell'ipotesi meno restrittiva che la $f(x, y, z)$ ammetta in R le derivate prime al di fuori di un insieme avente di misura lineare nulla le sue proiezioni sugli assi coordinati.

OSSERVAZIONE. — Per finire farò notare come, dai ragionamenti usati per dimostrarli, segua immediatamente la possibilità di estendere i due precedenti teoremi, previa un'ovvia generalizzazione delle ipotesi iniziali, alle funzioni composte, rispettivamente del tipo

$$f(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) \quad , \quad f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) ;$$

per le dimostrazioni basterà ricalcare le orme delle precedenti.