

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE SCORZA DRAGONI

**Un criterio di convergenza in lunghezza e
la derivazione per serie**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 22 (1953), p. 177-180

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__177_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__177_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

UN CRITERIO DI CONVERGENZA IN LUNGHEZZA E LA DERIVAZIONE PER SERIE

Nota () di GIUSEPPE SCORZA DRAGONI (a Padova)*

In una Nota recente ¹⁾, BAIADA ha dimostrato che:

Se le funzioni ²⁾

$$f_1(x), f_2(x), \dots \quad (a \leq x \leq b; a < b)$$

sono assolutamente continue nell'intervallo chiuso $a \dashv \vdash b$ e verificano la condizione

$$(1) \quad \int_a^{b-h} |f'_n(x+h) - f'_n(x)| dx \leq \varepsilon_n(h) \quad (0 < h < b-a; n=1, 2, \dots),$$

con gli $\varepsilon_n(h)$ infinitesimi, per h infinitesimo, e soddisfacenti alla

$$(2) \quad \sum_1^{+\infty} \varepsilon_n\left(\frac{h}{2^r}\right) \leq \sigma(h) \quad (n=1, 2, \dots),$$

$\sigma(h)$ essendo a sua volta infinitesimo con h , e se la successione

$$(3) \quad f_1(x), f_2(x), \dots$$

converge uniformemente in $a \dashv \vdash b$ verso una funzione (continua e) a variazione limitata $f(x)$, la successione $l_1, l_2, \dots$ delle

(*) Pervenuta in Redazione il 23 gennaio 1953.

¹⁾ E. BAIADA, *Un criterio di convergenza in lunghezza e la derivazione per serie* [«Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa», serie III, vol. VI (1952), pagg. 59-68].

²⁾ Consideriamo funzioni reali di variabile reale. Intendiamo l'integrazione nel senso di LEBESGUE; e se $g(x)$ è una funzione data in un certo intervallo, indichiamo con $g'(x)$ la derivata di g nei punti in cui g è derivabile e lo zero nei punti in cui g non è derivabile.

lunghezze delle curve $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots$, rappresentate dalle equazioni

$$y = f_1(x), y = f_2(x), \dots \quad (a \leq x \leq b),$$

converge verso la lunghezza l della curva $\mathcal{C}$, rappresentata dall'equazione

$$y = f(x) \quad (a \leq x \leq b);$$

e quindi ³⁾ la successione $f'_1(x), f'_2(x), \dots$ converge approssimativamente verso $f'(x)$.

Atteso l'interesse del teorema, non mi sembra inopportuno far vedere che la dimostrazione stessa di BAIADA si può atteggiare in guisa da riuscire assai rapida e semplice.

Poniamo

$$h_r = (b - a)/2^r \quad (r = 1, 2, \dots)$$

e dividiamo l'intervallo $a \text{---} b$ in 2^r parti uguali mediante i punti

$$a_{r,0} = a, \quad a_{r,1} = a + h_r, \dots, \\ a_{r,s} = a + sh_r, \dots, \quad a_{r,2^r} = a + 2^r h_r = b.$$

Indichiamo con $P_{n,r,s}$ il punto $(a_{r,s}, f_n(a_{r,s}))$ della curva $\mathcal{C}_n$ e con $P_{r,s}$ il punto $(a_{r,s}, f(a_{r,s}))$ della curva $\mathcal{C}$; con $\pi_{n,r}$ la poligonale di vertici successivi $P_{n,r,0}, P_{n,r,1}, \dots, P_{n,r,2^r}$, iscritta a $\mathcal{C}_n$, e con π_r quella di vertici successivi $P_{r,0}, P_{r,1}, \dots, P_{r,2^r}$, iscritta a $\mathcal{C}$; con $\lambda_{n,r}$ e λ_r le lunghezze rispettive di $\pi_{n,r}$ e di π_r .

La convergenza uniforme della (3) verso $f(x)$, porta che, oltre alle

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \lambda_{n,r} = l_n, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \lambda_r = l,$$

vere le prime per ogni valore fissato di n , sussiste anche, per ogni valore fisso di r , la

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_{n,r} = \lambda_r.$$

Quindi, per concludere nel senso voluto basta dimostrare

³⁾ L. TONELLI, *Fondamenti di calcolo delle variazioni* [Zanichelli, Bologna, (1921)], vol. I, n. 28.

che è

$$(5) \quad l_n - \lambda_{n,r} \leq \sigma(h_r).$$

Allora infatti risulta

$$\begin{aligned} |l - l_n| &\leq l - \lambda_r + |\lambda_r - \lambda_{n,r}| + |\lambda_{n,r} - l_n| \leq \\ &\leq l - \lambda_r + |\lambda_r - \lambda_{n,r}| + \sigma(h_r); \end{aligned}$$

dato il numero positivo η , si può scegliere il numero naturale t in guisa da aversi $\sigma(h_t) < \eta/3$ e $l - \lambda_t < \eta/3$; fissato t in tal guisa, se n è abbastanza grande, risulta $|\lambda_t - \lambda_{n,t}| < \eta/3$, vista la (4). E in definitiva si ottiene

$$|l - l_n| \leq l - \lambda_t + |\lambda_t - \lambda_{n,t}| + \sigma(h_t) < \eta,$$

almeno se il numero naturale n è abbastanza grande. Donde appunto la convergenza della successione $l_1, l_2, \dots$ verso l .

Quanto alla (5), fissato il numero naturale n , si considerino due vertici consecutivi, $P_{n,r,s}$ e $P_{n,r,s+1}$, di $\pi_{n,r}$. Essi sono anche vertici di $\pi_{n,r+1}$, separati mediante $P_{n,r+1,2s+1}$, che ha come ascissa la media aritmetica, $a_{r,s} + h_r/2$, delle ascisse di $P_{n,r,s}$ e $P_{n,r,s+1}$. Allora il punto medio, $Q_{n,r+1,2s+1}$, del segmento $P_{n,r,s} P_{n,r,s+1}$ ha la stessa ascissa di $P_{n,r+1,2s+1}$ e l'ordinata uguale alla media aritmetica

$$\{f_n(a_{r,s} + h_r) + f_n(a_{r,s})\}/2.$$

Dal teorema del triangolo e dalla assoluta continuità di $f_n(x)$ si trae

$$\begin{aligned} &| \overline{P_{n,r,s} P_{n,r+1,2s+1}} + \overline{P_{n,r+1,2s+1} P_{n,r,s+1}} - \overline{P_{n,r,s} P_{n,r,s+1}} | \leq \\ &\leq 2 \cdot \overline{P_{n,r+1,2s+1} Q_{n,r+1,2s+1}} = |f_n(a_{r,s} + h_r) + f_n(a_{r,s}) - \\ &- 2f_n(a_{r,s} + h_r/2)| = \left| \int_{a_{r,s} + h_r/2}^{a_{r,s} + h_r} f'_n(x) dx - \int_{a_{r,s}}^{a_{r,s} + h_r/2} f'_n(x) dx \right| = \\ &= \left| \int_{a_{r,s}}^{a_{r,s} + h_r/2} \{f'_n(x + h_r/2) - f'_n(x)\} dx \right| \leq \int_{a_{r,s}}^{a_{r,s} + h_r/2} |f'_n(x + h_r/2) - f'_n(x)| dx; \end{aligned}$$

e da qui, sommando rispetto all'indice s , variabile da 0 a

$2^r - 1$, si deduce

$$\lambda_{n, r+1} - \lambda_{n, r} \leq \int_a^{b-h_r/2} |f'_n(x + h_r/2) - f'_n(x)| dx \leq \varepsilon_n(h_r/2);$$

epperò

$$\begin{aligned} l_n - \lambda_{n, r} &= (\lambda_{n, r+1} - \lambda_{n, r}) + (\lambda_{n, r+2} - \lambda_{n, r+1}) + \dots \leq \\ &\leq \varepsilon_n(h_r/2) + \varepsilon_n(h_{r+1}/2) + \dots = \varepsilon_n(h_r/2) + \\ &+ \varepsilon_n(h_r/2^2) + \dots \leq \sigma(h_r), \end{aligned}$$

come si voleva. Donde la conclusione.