

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIORGIO TREVISAN

**Classificazione dei semplici ordinamenti di un gruppo
libero commutativo con N generatori**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 22 (1953), p. 143-156

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__143_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__143_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CLASSIFICAZIONE DEI SEMPLICI ORDINAMENTI DI UN GRUPPO LIBERO COMMUTATIVO CON N GENERATORI

Nota () di* GIORGIO TREVISAN *(a Padova)*

Dei vari problemi contenuti nel « Problem 102 » di BIRKHOFF ¹⁾ si risolve il seguente: *d*) Dato un gruppo G libero commutativo con n generatori determinare in quanti modi diversi G si può semplicemente ordinare.

In I) sono richiamate proprietà note dei gruppi liberi commutativi con n generatori.

Nei numeri 1, 2, 3 si ricordano proprietà di tali gruppi quando sono semplicemente ordinati e si stabiliscono alcuni semplici lemmi.

Nel n.ro 4 i gruppi son pensati senz'altro come archimedei e si dà un teorema che permette di classificarne i loro semplici ordinamenti. Nei numeri successivi si mostra come il problema *d*) per G si riconduca a dare i semplici ordinamenti di opportuni gruppi liberi commutativi archimedei ed i semplici ordinamenti di gruppi della stessa natura di G , ma con un numero minore di generatori.

Si ottiene così un procedimento di riduzione che porta alla soluzione del problema proposto perchè infine si giunge sempre a dover dare i semplici ordinamenti di gruppi archimedei (liberi, commutativi).

I. - Sia G un gruppo libero commutativo con n generatori ²⁾.

(*) Pervenuta in Redazione il 22 febbraio 1953.

¹⁾ G. BIRKHOFF, *Lattice Theory* [American Mat. Soc. Coll., vol. XXV 1948], pag. 227.

²⁾ I teoremi di questo numero sui gruppi con n generatori si possono ad esempio ricavare da quanto detto in proposito in LEFSCHETZ,

Un sottogruppo H di G si chiama *sottogruppo con divisione* se contiene elementi diversi dallo zero, e se per ogni $g \in G$ tale che $p \cdot g \in H$ con p intero non nullo, segue che $g \in H$.

Si ha che: *Ogni sottogruppo di G , diverso dall'identità, è un gruppo libero commutativo.*

TEOREMA: *Se H è un sottogruppo con divisione di G con r generatori il gruppo fattoriale $\frac{G}{H}$ è un gruppo libero commutativo con $n - r$ generatori.*

Sia ora G un gruppo commutativo con n generatori $g_1, \dots, g_n$ e tra questi restino verificate le condizioni $\sum_{i=1}^n \lambda_{is} g_s = 0$ ($i = 1, 2, \dots, r$) e sia r il rango della matrice $||\lambda_{is}||$.

Per poter semplicemente ordinare G è necessario, come noto e come richiamato in seguito, che tutti gli elementi di G diversi dallo zero siano aperiodici. Ma allora si vede facilmente che il problema *d*) per un gruppo di questo tipo si riconduce necessariamente a studiare il problema *d*) per il gruppo libero commutativo con $n - r$ generatori.

1. - Un gruppo G è detto *semplicemente ordinato* se tra i suoi elementi è stabilita una relazione d'ordine che di due elementi distinti di G dica quale è maggiore e quale minore ed è tale che se $a < b$ ($b > a$) risulti $a + x < b + x$ $x + a < x + b$ qualunque sia $x \in G$.

Condizione necessaria perchè G sia *semplicemente ordinato* è che G non contenga elementi diversi da 0 a periodo finito.

Se questa condizione necessaria è verificata ed inoltre G è commutativo, allora G si può semplicemente ordinare³⁾.

2. - Se $a \in G$, $b \in G$, $a > 0$, $b > 0$, si dice che a e b sono equivalenti dal punto di vista archimedeo e si scrive $a \asymp b$ se

Algebraic Topology [American Mat. Soc. Coll., Vol. XXVII, 1942] pagg. 49-54. La denominazione «sottogruppo con divisione» è quella usata da P. ALEXANDROFF e H. HOPF nel loro *Topologie* (vedere il capitolo sui moduli).

³⁾ *Loc. cit.* in ¹⁾ teor. 14, pag. 224.

per ogni multiplo ma di a esiste un multiplo nb di b tale che $ma < nb$ e se per ogni multiplo n_1b di b esiste un multiplo m_1a di a tale che $n_1b < m_1a$.

Se invece per ogni naturale m è $ma < b$, a è detto infinitamente minore di b e si scrive $a \ll b$.

La relazione ∞ è una relazione di equivalenza; nelle classi di equivalenza si possono distribuire anche gli elementi negativi di G , basta ovviamente collocare nella stessa classe un elemento ed il suo opposto.

Vale in proposito il Teorema ⁴⁾: *Se G è archimedeo esso è isomorfo ad un sottogruppo del gruppo additivo dei numeri reali, quindi è commutativo.*

Si espongono ora alcuni semplici lemmi utili per il seguito.

LEMMA I.: *Se $0 < a$, $0 < b$, $a \infty b$ ed m, n sono interi positivi allora $ma + nb \infty a$.*

LEMMA II.: *Se $0 \ll \alpha_1 \ll \alpha_2 \ll \dots \ll \alpha_r$ ed è $\lambda_r > 0$ allora qualunque siano gli interi $\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}$ risulta $0 < \sum_1^r \lambda_i \alpha_i \infty \alpha_r$,
 $0 < \sum_1^r \lambda_{r+1-i} \alpha_{r+1-i} \infty \alpha_r$.*

E' evidentemente $-\lambda_i \alpha_i \leq |\lambda_i| \alpha_{r-1}$ ($i: 1, \dots, r-1$), quindi
 $-\sum_1^{r-1} \lambda_i \alpha_i \leq \sum_1^{r-1} |\lambda_i| \alpha_{r-1} = p \alpha_{r-1} \ll \alpha_r < \lambda_r \alpha_r$ e perciò intanto $0 < \sum_1^r \lambda_i \alpha_i$.

Posto $\sigma = \sum_1^r \lambda_i \alpha_i$ riesce $\sigma \leq \sum_1^r |\lambda_i| \alpha_i \leq \sum_1^r |\lambda_i| \alpha_r$ da cui

$$(1) \quad h\sigma < h\left(\sum_1^r |\lambda_i| + 1\right)\alpha_r$$

per ogni h intero positivo.

Per quanto visto in precedenza se θ è un intero positivo si ha
 $-\theta \sum_1^{r-1} \lambda_i \alpha_i \leq \theta \sum_1^{r-1} |\lambda_i| \alpha_{r-1} \ll \alpha_r$ e quindi $0 < \alpha_r + \theta \sum_1^{r-1} \lambda_i \alpha_i$.

⁴⁾ Loc. cit. in ¹⁾ teor. 15, pag. 226.

Ora

$$h\alpha_r < h\alpha_r + \alpha_r + \theta \cdot \sum_1^{r-1} \lambda_i \alpha_i \leq (h+1)\lambda_r \cdot \alpha_r + \theta \sum_1^{r-1} \lambda_i \alpha_i$$

qualunque sia l'intero positivo h e posto $\theta = h+1$ riesce

$$h\alpha_r < (h+1)\sigma,$$

che assieme alla (1) termina la dimostrazione della prima relazione di cui parla il lemma; per la seconda relazione la dimostrazione consegue con considerazioni del tutto analoghe a quelle già svolte.

LEMMA III.: Se $0 < \alpha_1 \ll \alpha_2 \ll \dots \ll \alpha_r$ ed è $\sum_1^r \lambda_i \alpha_i = 0$, con λ_i ($i=1, \dots, r$) interi relativi, allora $\lambda_i = 0$ ($i=1, 2, \dots, r$).

Ragionando per assurdo sia $\alpha_j \neq 0$ e j sia massimo ($1 \leq j \leq r$) si ha perciò $\sum_1^j \lambda_i \alpha_i = 0$.

Ora o $\lambda_j > 0$, oppure basta moltiplicare la relazione precedente per -1 per trovarsi in tale eventualità, in ogni caso è applicabile il LEMMA II. Per esempio se $\lambda_j > 0$ per il LEMMA II risulterebbe $\sum \lambda_i \alpha_i \infty \alpha_i$ e quindi l'assurdo $0 \infty a_j$.

3. - Come prima applicazione dei lemmi precedenti si ottiene il

TEOREMA: Se G è un gruppo libero commutativo con n generatori, semplicemente ordinato, i suoi elementi si distribuiscono in un numero di classi di equivalenza non superiore ad n .

Sia $g_1, g_2, \dots, g_n$ una base di generatori di G . Ogni generatore può essere pensato come positivo perchè se ad esempio fosse $g_1 < 0$ basterebbe al suo posto considerare $-g_1$ e $-g_1, g_2, \dots, g_n$ costituirebbe ancora una base per G .

E' pure evidentemente non restrittivo supporre $0 < g_1 < g_2 < \dots < g_n$.

Ogni elemento di G è della forma $\sum_1^n \lambda_i g_i$ e perciò per i

LEMMI I, e II esso o è equivalente a g_n od infinitamente minore di g^n .

Ragionando per assurdo si supponga che esistano $n+1$ elementi positivi di G , $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \omega_{n+1} = g_n$ tali che $\omega_1 \ll \omega_2 \ll \dots \ll \omega_{n+1}$.

Sarà intanto

$$(2) \quad \omega_i = \sum_1^n h_{i,j} g_j \quad (i = 1, 2 \dots n).$$

Sia H il determinante della matrice formata con gli interi $h_{i,j}$. Se $H = 0$ si possono determinare gli interi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tutti nulli, tali che

$$(3) \quad h_{1j}\lambda_1 + \dots + h_{nj}\lambda_n = 0 \quad (j = 1, \dots, n)$$

ed allora dalle (2) moltiplicando per λ_i e sommando si ottiene tenendo conto delle (3) $\sum_1^n \lambda_i \omega_i = 0$ con $\sum_1^n \lambda_i^2 \neq 0$ il che è assurdo per il LEMMA III. Sia dunque $H \neq 0$. In tal caso indicato con H_{in} il complemento algebrico di $h_{i,n}$, moltiplicata la (2) per H_{in} e sommato rispetto ad i si ottiene $\sum_1^n H_{i,n} \omega_i = H g_n = H \omega_{n+1}$, cioè ancora un assurdo per il LEMMA III.

4. - Un sottogruppo del gruppo additivo dei numeri reali isomorfo ad un gruppo libero commutativo con n generatori, necessariamente archimedeo, è costituito di tutti i numeri reali $\sum_1^n \lambda_i g_i$, dove λ_i percorre l'insieme dei numeri interi relativi (e dello zero), e i g_i sono numeri reali fissati, diversi dallo zero, a due a due diversi tra loro e tali ancora che se $\sum_1^n \lambda_i g_i = 0$ risulta di conseguenza $\lambda_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

L'insieme di tali sottogruppi sarà indicato nel seguito con I_n . La costruzione di elementi di I_n è banale.

Si indicherà ancora con J_n l'insieme delle classi in cui si distribuiscono gli elementi di I_n quando si collochino in una stessa classe elementi di I_n isomorfi (cioè gruppi isomorfi che nell'isomorfismo conservano le relazioni d'ordine). In proposito si ha il

TEOREMA: *Condizione necessaria e sufficiente perchè gli elementi S_1 ed S_2 di I_n siano tra loro isomorfi è che detta g^i*

($i = 1, \dots, n$) una base di S_1 si riescano a determinare in S_2 n numeri g_i'' tali che:

$$(4) \quad \frac{g_1'}{g_1''} = \frac{g_2'}{g_2''} = \dots = \frac{g_n'}{g_n''} = k > 0.$$

La condizione è necessaria. Infatti se S_1 ed S_2 sono isomorfi siano g_i'' i numeri di S_2 che corrispondono a g_i' .

Per l'isomorfismo g_i' e g_i'' avranno lo stesso segno quindi il loro rapporto sarà positivo.

Per fissare le idee si supponga $g_1' > 0$, $g_2' > 0$ e $g_1' < g_2'$.

Scelto un intero positivo h risulterà univocamente determinato l'intero positivo m_h tale che

$$(5) \quad m_h g_1' < h g_2' \leq (m_h + 1) g_1'$$

e da questa si trae

$$(6) \quad \frac{m_h}{h} < \frac{g_2'}{g_1'} \leq \frac{m_h}{h} + \frac{1}{h}$$

e quindi passando al limite

$$(7) \quad \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{m_h}{h} = \frac{g_2'}{g_1'}.$$

Ma per l'isomorfismo dalla (5) si deduce

$$m_h g_1'' < h g_2'' \leq (m_h + 1) g_1''$$

e quindi da questa una relazione analoga alla (6) e con ulteriore passaggio al limite

$$(8) \quad \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{m_h}{h} = \frac{g_2''}{g_1''}.$$

Dal confronto delle (7), (8) risulta $\frac{g_2'}{g_1'} = \frac{g_2''}{g_1''}$ e di qua facilmente la prima delle (4).

Analoghe considerazioni se g_1' e g_2' non sono entrambi positivi. Stabilita la prima delle (4) le altre si deducono col procedimento precedente confrontando g_1' con g_i' ($i = 3, 4, \dots, n$).

La condizione è sufficiente. Esisteranno quindi in S_2 i numeri g_i'' per cui sono vere le (4). Si consideri tra S_1 ed S_2 la

corrispondenza che associa all'elemento $\sum_1^n \lambda_i g'_i$ di S_1 l'elemento $\sum_1^n \lambda_i g''_i$ di S_2 . Tale corrispondenza associa alla somma di elementi la somma dei corrispondenti ed è biunivoca. Infatti poichè per le (4) $g''_i = k g'_i$ si ha che all'elemento $\sum_1^n \lambda_i g'_i$ di S_1 viene a corrispondere in S_2 l'elemento $k \cdot \sum_1^n \lambda_i g'_i$ e viceversa. Dunque ad elementi distinti corrispondono elementi distinti poichè $k \neq 0$ e ad elementi positivi elementi positivi poichè $k > 0$. La corrispondenza considerata è dunque un isomorfismo.

5. - Per il TEOREMA dimostrato nel n.º 3. se G è un gruppo libero commutativo con n generatori, semplicemente ordinato, i suoi elementi positivi si distribuiscono in i ($i \leq n$) classi di equivalenza archimedea. Siano $A_1, A_2, \dots, A_i$ tali classi. Si potrà supporre che se $a_j \in A_j, a_k \in A_k$ sia $a_j \ll a_k$ se $j < k$. A_1 si può chiamare la *minima* classe di equivalenza archimedea di G .

Si consideri ora l'insieme A_1^* formato dagli elementi di A_1 , dai loro opposti e dallo zero, orbene si ha il

TEOREMA: A_1^* è un sottogruppo con divisione di G , archimedeo quando lo si ordini per induzione da G .

Siano α e β due elementi di A_1^* . Si deve intanto far vedere che $\alpha + \beta \in A_1^*$. Se in G $\alpha + \beta > 0$ può essere $0 < \alpha < \beta$, quindi $\alpha + \beta < 2\beta \in A_1$ e poichè $\beta < \alpha + \beta$ ne segue $\alpha + \beta \in A_1$.

Se α e β hanno segni contrari, ad esempio $\alpha < 0, \beta > 0$, è $\alpha + \beta < -\alpha + \beta < 2\beta$ se per fissare le idee si è supposto $-\alpha < \beta$; si procede poi come sopra tenendo conto che A_1 è la *minima* classe di equivalenza.

Se almeno uno degli elementi α e β è nullo la cosa è banale.

Se $\alpha + \beta < 0$ è $-\alpha - \beta > 0$ (G è commutativo) e poichè $-\alpha$ e $-\beta$ appartengono ad A_1^* vi appartiene per quanto già visto $-\alpha - \beta$ e quindi sempre per la costruzione di A_1^* anche il suo opposto $\alpha + \beta$.

A_1^* è dunque un sottogruppo di G , che risulterà semplicemente ordinato per induzione da G .

D'altra parte A_1^* è archimedeo perchè se gli elementi positivi di A_1^* appartenessero ad almeno due classi distinte di equivalenza archimedeo ciò accadrebbe anche per gli elementi di A_1 , contro l'ipotesi.

Sia ora $p \cdot \alpha \in A_1^*$ con p intero. Si può supporre $\alpha > 0$ e $p > 0$ previo passaggio agli opposti. Si ha per il LEMMA I $\alpha \infty p\alpha$ e quindi $\alpha \in A_1$ cioè $\alpha \in A_1^*$ ed A_1^* è dunque un sottogruppo con divisione di G .

6. - Si mantengono i significati dati alle notazioni nel n.º precedente e si considera il gruppo fattoriale $G_1 = \frac{G}{A_1^*}$. Ha interesse mostrare come G induca un semplice ordinamento in G_1 nel modo che segue.

Siano h e k due elementi di G_1 diversi tra loro.

Si indichino con H e K gli insiemi di elementi di G che nell'omomorfismo che porta G su G_1 si trasformano rispettivamente in h e k .

Se a ed a_1 sono elementi di H e b e b_1 elementi di K ed è ad esempio, $a < b$ allora è anche $a_1 < b_1$.

Infatti sarà $a_1 = a + \sigma$ con $\sigma \in A_1^*$ e $b_1 = b + \eta$ con $\eta \in A_1^*$ e se fosse $a_1 - b_1 \geq 0$ dalla $a_1 - b_1 = a - b + \sigma - \eta$ seguirebbe, poichè $a - b < 0$, $0 \leq a_1 - b_1 < \sigma - \eta \in A_1^*$ e per la proprietà di minimo goduta da A_1 , $a_1 - b_1 \in A_1^*$, ciò che è assurdo poichè a_1 e b_1 appartengono a due classi diverse modulo A_1^* . Ne segue che le classi di G modulo A_1^* costituiscono una catena e si intenderà che $h < k$, se e solo se, $H < K$; in tal modo G_1 risulta semplicemente ordinato.

Le considerazioni svolte si possono invertire. Sia A_1^* un sottogruppo con divisione di G ; allora per i teoremi del n.º I. sui gruppi, A_1^* e $G_1 = \frac{G}{A_1^*}$ sono gruppi liberi commutativi, quindi semplicemente ordinabili.

Si sia stabilito un semplice ordinamento per A_1^* ed uno per G_1 , si mostra ora come questi ordinamenti inducano un semplice ordinamento su G .

Siano p e q due elementi di G , se essi appartengono ad A_1^* si stabilisca tra loro in G la stessa relazione d'ordine che pos-

seggono in A_1^* ; se $p \in A_1^*$ e q nell'omomorfismo di G su G_1 si trasforma nell'elemento q' di G_1 si ponga $p < q$ se $q' > 0$ in G_1 e $p < q$ se $q' < 0$ in G_1 ; se p e q si trasformano nell'omomorfismo nello stesso elemento h di G_1 ciò vuol dire che $p - q = \tau \in A_1^*$ e si ponga $p < q$ o $p > q$ a seconda che in A_1^* è $\tau < 0$ o $\tau > 0$; se infine i trasformati di p e q in G_1 sono i due elementi distinti di G_1 p' e q' si stabilisca tra p e q in G la stessa relazione d'ordine che hanno p' e q' in G_1 .

E' immediato verificare che G risulta in tal modo semplicemente ordinato e che l'insieme A_1 degli elementi positivi di A_1^* costituisce la classe minima di equivalenza archimedeo di G .

Ritornando al caso che G sia semplicemente ordinato e dei semplici ordinamenti che da G vengono indotti in A_1^* ed in $G_1 = \frac{G}{A_1^*}$, si vede subito che se le classi di equivalenza archimedeo di G sono in numero di i ($i \leq n$), quelle di G_1 sono in numero di $i - 1$.

7. - Sia ancora G semplicemente ordinato; A_1^* (n.º I.) sarà anch'esso un gruppo libero commutativo con $r \leq n$ generatori; orbene è di decisiva importanza per questa ricerca il seguente:

TEOREMA: *Se G è semplicemente ordinato e il suo sottogruppo A_1^* risulta generato da r generatori, scelto un qualsiasi sottogruppo con divisione di G con r generatori A_2^* , è possibile determinare un semplice ordinamento in A_2^* ed un ordinamento in $\frac{G}{A_2^*}$ per modo che per induzione si riproduca in G , a meno di automorfismi il semplice ordinamento di partenza.*

Sia $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r$ una base di generatori di A_1^* , $h_1, h_2, \dots, h_{n-r}$ una base di $G_1 = \frac{G}{A_1^*}$ così sia $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$ una base di A_2^* e $k_1, k_2, \dots, k_{n-r}$ una base di $G_2 = \frac{G}{A_2^*}$. Si consideri la corrispondenza tra A_1^* ed A_2^* che associa ad ogni elemento $\sum_{i=1}^r \lambda_i \omega_i$ di A_1^* l'elemento $\sum_{i=1}^r \lambda_i \eta_i$ e così la corrispondenza tra G_1 e G_2 che asso-

cia a $\sum_1^{n-r} \mu_i h_i$ l'elemento $\sum_1^{n-r} \mu_i k_i$. Si tratta evidentemente di due isomorfismi di gruppo. Ora A_1^* e G_1 risultano semplicemente ordinati per induzione dal semplice ordinamento originario di G . Si considerino come elementi positivi di A_2^* e G_2 quelli che negli isomorfismi precedenti sono corrispondenti di elementi positivi di A_1^* e G_1 . Si vede subito che in tal modo A_2^* e G_2 sono stati semplicemente ordinati. Ad esempio se a, b, c sono elementi di A_2^* ed è $a > b, b > c$ cioè $a - b > 0$ e $b - c > 0$ questo è perchè in A_1^* i corrispondenti a', b', c' verificano analoghe disuguaglianze, ma è allora $a' > c'$ perchè A_1^* è semplicemente ordinato; d'altra parte il corrispondente di $a' - c' > 0$ è $a - c$ e quindi per la convenzione fatta $a - c > 0, a > c$.

Ora i semplici ordinamenti di A_2^* e G_2 inducono (n.º 6) un semplice ordinamento su G ed il teorema resterà provato se si fa vedere che esiste un automorfismo di G che ad elementi positivi nel primo ordinamento fa corrispondere elementi positivi nel secondo ordinamento e viceversa.

Siano $a_1, a_2, \dots, a_{n-r}$ elementi di G che corrispondono in G_1 ad $h_1, h_2, \dots, h_{n-r}$ e $b_1, b_2, \dots, b_{n-r}$ elementi di G che corrispondono in G_2 a $k_1, \dots, k_{n-r}$. Si ha che tanto $\omega_1, \dots, \omega_r, a_1, \dots, a_{n-r}$ quanto $\eta_1, \dots, \eta_r, b_1, \dots, b_{n-r}$ costituiscono una base di G . Si consideri la corrispondenza che associa ad ogni ω_i, η_i e ad ogni a_j, b_j , cioè tale che all'elemento $\sum_1^r \lambda_i \omega_i + \sum_1^{n-r} \mu_j a_j$ fa corrispondere l'elemento $\sum_1^r \lambda_i \eta_i + \sum_1^{n-r} \mu_j b_j$ e viceversa. E' evidente che la corrispondenza è un automorfismo di G , bisogna mostrare che conserva le relazioni d'ordine.

Sia $v = \sum_1^r \lambda_i \omega_i + \sum_1^{n-r} \mu_j a_j > 0$, se $\mu_j = 0$ ($j = 1, \dots, n-r$) il suo corrispondente $\sum_1^r \lambda_i \eta_i$ è positivo per come si è ordinato A_2^* ; se qualche μ_j è diverso da zero, v non appartiene ad A_1^* e si trasformerà quindi nell'omomorfismo di G su G_1 nell'elemento $w = \sum_1^{n-r} \mu_j h_j$ che risulterà positivo per induzione (n.º 6). D'altra parte nell'isomorfismo considerato poco sopra tra G_1 e G_2 a w

corrisponde $\sum_1^{n-r} \mu_j k_j$, positivo per come si ordina G_2 ed ancora per il n.^{ro} 6 l'elemento $\sum_1^r \lambda_i \eta_i + \sum_1^{n-r} \mu_i b_j$, in quanto nell'omomorfismo di G su G_2 corrisponde all'elemento positivo $\sum_1^{n-r} \mu_j k_j$ di G_2 , è positivo.

8. - Il complesso delle proprietà messe in evidenza nei numeri precedenti permette ora agevolmente di risolvere il problema, scopo del presente lavoro, cioè di determinare i semplici ordinamenti distinti di un gruppo G libero commutativo con n generatori $g_1, g_2, \dots, g_n$.

Se $A_1, A_2, \dots, A_i$ sono le classi di equivalenza archimedea di G in un semplice ordinamento esse costituiscono una catena sicchè con manifesto significato del simbolo si potrà scrivere $A_1 < A_2 < \dots < A_i$ ($i \leq n$).

Siano $B_1 < B_2 < \dots < B_j$ le classi di un altro semplice ordinamento di G .

Perchè i due semplici ordinamenti di G siano effettivamente distinti occorre e basta che sia o $i \neq j$ o se $i = j$ almeno una delle classi A_h non isomorfa alla classe B_h .

Per il teorema del n.^{ro} 7 la questione può essere vista in questo altro modo. Scelto un qualunque sottogruppo con divisione di G con r generatori e quindi si può prendere il sottogruppo A_1^* generato proprio da g_1, g_r si ordini semplicemente A_1^* ed anche $G_1 = \frac{G}{A_1^*}$, per induzione si ottiene un semplice ordinamento di G .

Un semplice ordinamento di G distinto dal precedente si ottiene in questi modi: 1) considerando al posto di A_1^* un sottogruppo con un numero di generatori diverso da r , 2) considerando per A_1^* , che deve essere un gruppo archimedeo con r generatori un semplice ordinamento diverso dal precedente e tali ordinamenti sono dati dall'insieme J_r considerato al numero 4, 3) lasciando per A_1^* lo stesso semplice ordinamento, ma mutando il semplice ordinamento di G_1 .

Ora G_1 è un gruppo libero con $n - r$ generatori e come suoi

generatori si possono prendere proprio i corrispondenti $g'_{r+1}, \dots, g'_n$ di $g_{r+1}, \dots, g_n$ nell'omomorfismo che porta G su G_1 . Si è così ricondotti a risolvere il problema iniziale per un gruppo libero commutativo con $n - r < n$ generatori.

Così procedendo si arriverà a dover determinare gli ordinamenti di un gruppo archimedeo con $s \geq 1$ generatori e questi come si sa già sono individuati dall'insieme J_s .

9. - A titolo di esempio verranno in questo numero trattati direttamente i casi di un gruppo commutativo libero con 1, 2, 3 generatori. Come preliminare si rammenti che se G è un gruppo commutativo con n generatori $g_1, \dots, g_n$ ed $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ è una base di un sottogruppo H libero con n generatori del gruppo additivo reale, per imporre a G un semplice ordinamento in modo che G risulti isomorfo ad H basta convenire che $\sum \lambda_i g_i$ è positivo se e solo se $\sum \lambda_i \alpha_i$ è positivo. Se $g'_1, \dots, g'_n$ è un'altra base per G il semplice ordinamento di G ottenuto con la convenzione $\sum \lambda_i g'_i$ è positivo se e solo se $\sum \lambda_i \alpha_i$ è positivo, è a meno di un automorfismo quello considerato in precedenza. Infatti la corrispondenza $g_i \leftrightarrow g'_i$ è un automorfismo di G che muta elementi positivi in elementi positivi.

In G si impone un ordinamento diverso dal precedente se si sostituisce ad H nelle considerazioni svolte un sottogruppo del gruppo additivo reale con n generatori non isomorfo ad H . Perciò la scelta della base nei sottogruppi come H che servono ad ordinare G non ha influenza in questo ordinamento e si potrà quindi supporre che i numeri $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ siano tutti positivi.

Ed ancora si potrà sempre supporre che $\alpha_1 = 1$ in quanto, per il teorema del n. 4, moltiplicando i numeri della base per uno stesso numero positivo si ottiene la base di un gruppo isomorfo al precedente.

I.) GRUPPO CON 1 GENERATORE g_1 . — Il gruppo è necessariamente archimedeo. Vi è un solo sottogruppo H da considerare, quello generato da $\alpha_1 = 1$ e $\lambda_1 g_1$ è positivo se e solo se λ_1 è positivo.

II.) GRUPPO CON 2 GENERATORI g_1, g_2 .

a) G non sia archimedeo allora per il Teorema del n.^{ro} 3 i suoi elementi devono distribuirsi in 2 classi di equivalenza archimedeo A_1, A_2 ($A_1 < A_2$).

Per il n. 7 si può prendere come generatore di A_1^* proprio g_1 e per I.) vi è, a meno di automorfismi, un solo semplice ordinamento di A_1^* quello per cui $\lambda_1 g_1 > 0$ se e solo se $\lambda_1 > 0$.

Così $\frac{G}{A_1^*}$ è un gruppo libero con 1 generatore e come tale può essere scelto l'omomorfo g'_2 di g_2 e per analoghe considerazioni delle precedenti $\lambda_2 g'_2 > 0$ se e solo se $\lambda_2 > 0$.

In conclusione $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 > 0$ se $\lambda_2 > 0$ o se $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_1 > 0$ e per G , a meno d'automorfismi, è possibile questo solo semplice ordinamento.

b) G sia archimedeo, allora esso è isomorfo ad un sottogruppo libero con due generatori del gruppo addittivo reale. Si rammenti che due siffatti sottogruppi sono tra loro isomorfi quando appartengono ad una stessa classe elemento di J_2 . Si può anche dire che i semplici ordinamenti di G sono in corrispondenza biunivoca con gli elementi di J_2 ⁵⁾.

III.) GRUPPO CON 3 GENERATORI g_1, g_2, g_3 .

a) G sia non archimedeo ed i suoi elementi si distribui-

⁵⁾ Volendo determinare un elemento per ogni classe elemento di J_2 si può procedere come segue. Per generatori di un sottogruppo con due generatori del gruppo addittivo reale si possono prendere due numeri positivi ed anzi per il teorema del n. 4 si può supporre che uno di essi sia l'unità. Detti dunque 1 e ξ tali due generatori deve essere $\lambda \cdot 1 + \mu \xi \neq 0$ se $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$ qualunque siano gli interi relativi λ e μ e per questo è necessario e basta che ξ sia irrazionale. Per ottenere un sottogruppo H del gruppo addittivo reale non isomorfo al precedente, sempre per il teorema del n. 4 è necessario e basta determinare la base 1, ξ' di H per modo che non sia $\frac{1}{\lambda + \mu \xi'} = \frac{\xi}{\lambda_1 + \mu_1 \xi'}$ con $\lambda, \mu, \lambda_1, \mu_1$ interi o zero. I numeri ξ' verificanti una relazione del tipo soprascritto sono tutti e soli quelli della forma $\xi' = \frac{\alpha + \beta \xi}{\gamma + \delta \xi} > 0$ con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ interi o nulli. Come conseguenza si ha che l'insieme degli elementi di J_2 ha la potenza del continuo. Analoghe considerazioni si potrebbero svolgere per J_n .

scano in 3 classi di equivalenza $A_1 < A_2 < A_3$. Per il n.^{ro} 7 si può prendere come generatore di A_1^* , g_1 e vi è dunque a considerare un solo ordinamento di A_1^* .

$G_1 = \frac{G}{A_1^*}$ è un gruppo libero con 2 generatori e per questi si possono prendere gli omomorfi g_2', g_3' di g_2 e g_3 . Gli elementi di G_1 si distribuiranno in due classi di equivalenza $\bar{A}_2 < \bar{A}_3$ (rispettivamente omomorfe di A_2 e A_3 nell'omomorfismo $G \rightarrow G_1$).

Come generatore di $\bar{A}_2^*$ si può prendere g_2' e vi è un solo semplice ordinamento di $\bar{A}_2^*$. Così per generatore di $\frac{\bar{G}_1}{\bar{A}_2^*}$ si può prendere l'omomorfo g_3'' di g_3' e si ha ancora un solo semplice ordinamento da considerare.

Dunque, a meno di automorfismi, esiste un solo semplice ordinamento di G che si può realizzare come segue: $h = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3 > 0$ se $\lambda_3 > 0$; oppure $h > 0$ se $\lambda_3 = 0$ e $\lambda_2 > 0$; oppure $h > 0$ se $\lambda_3 = \lambda_2 = 0$ e $\lambda_1 > 0$.

b) Gli elementi di G si distribuiscono in 2 classi $A_1 < A_2$ ed A_1^* ha un generatore e sia g_1 , allora $\frac{G}{A_1^*}$ è archimedeo con due generatori g_2', g_3' omomorfi di g_2 e g_3 .

I semplici ordinamenti di $\frac{G}{A_1^*}$ si realizzano come in II.), b).

Ordinato $\frac{G}{A_1^*}$ si pone $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3 > 0$ se $\lambda_2 g_2' + \lambda_3 g_3' > 0$ in $\frac{G}{A_1^*}$ e se $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ quando $\lambda_1 > 0$.

c) Gli elementi di G si distribuiscono in due classi $A_1 < A_2$ e A_1^* ha due generatori e $\frac{G}{A_1^*}$ un generatore. Allora $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3 > 0$ se $\lambda_3 > 0$ e se $\lambda_3 = 0$ quando $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 > 0$ in A_1^* (g_1, g_2 sono i generatori di A_1^*).

Sia nel caso b) come in questo caso c) i semplici ordinamenti di G si possono mettere in corrispondenza biunivoca con gli elementi di J_2 .

d) G è archimedeo, i suoi semplici ordinamenti sono in corrispondenza biunivoca con gli elementi di J_3 .