

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIOVANNI ZACHER

**Determinazione dei gruppi finiti strutturalmente
omomorfi ad un gruppo d'ordine 8 non ciclico**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 20 (1951), p. 315-328

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1951__20__315_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1951__20__315_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1951, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DETERMINAZIONE DEI GRUPPI FINITI STRUTTURALMENTE OMOMORFI AD UN GRUPPO D' ORDINE 8 NON CICLICO

Nota () di GIOVANNI ZACHER (a Padova) (1).*

PREFAZIONE : Nello studio della teoria dei gruppi è stato recentemente introdotto dal WHITMAN (2) il concetto di omomorfismo strutturale.

Tale concetto resta definito nel seguente modo :

Dati due gruppi G e G' , si dice che tra essi intercorre un omomorfismo strutturale quando è data una legge che faccia corrispondere ad ogni sottogruppo di G uno ed un solo sottogruppo di G' di modo che :

a) *Se ai sottogruppi A e B di G corrispondono i sottogruppi A' e B' di G' , all'intersezione $A \cap B$ di A e B corrisponde l'intersezione $A' \cap B'$ di A' e B' , ed all'unione $A \cup B$ corrisponde l'unione $A' \cup B'$.*

b) *Ogni sottogruppo di G' è il corrispondente di almeno un sottogruppo di G .*

(*) Pervenuta in Redazione il 2 aprile 1951.

(1) In questa nota sono esposti i risultati ottenuti nella mia tesi per la Laurea conseguita il 14 marzo 1951.

(2) *Groups with a cyclic group as lattice homomorph*; Annals of Mathematics, II s. vol. 48.

L'omomorfismo strutturale fu oggetto di alcune ricerche da parte di G. ZAPPA ⁽³⁾, ⁽⁴⁾ e di R. PERMUTTI ⁽⁵⁾.

Nelle seguenti pagine mi sono proposto di studiare i gruppi d'ordine finito strutturalmente omomorfi ad un gruppo G' d'ordine 8 non ciclico.

A tal fine ho portato l'attenzione sui sottogruppi di G' d'ordine 4 che, essendo ciclici o quadrimoni, furono già studiati rispettivamente dallo ZAPPA e dal PERMUTTI.

§ 1. - Preliminari.

1. - Per rendere più chiara ed espressiva l'esposizione converremo di usare i seguenti simboli.

Sia τ un omomorfismo strutturale tra un gruppo G e un gruppo G' . Se H è un sottogruppo qualsiasi del gruppo G e se H' è il trasformato di H mediante τ , denoteremo il gruppo H' pure col simbolo funzionale $f(H)$.

Se H' è un sottogruppo di G' e se $H_1, H_2 \dots H_i$ è l'insieme di tutti i sottogruppi di G che τ trasforma in H' , indicheremo con $f_{-1}(H')$ il sottogruppo intersezione $H_1 \cap H_2 \dots \cap H_i$ di $H_1, \dots H_i$ e con $f^{-1}(H')$ il sottogruppo unione $H_1 \cup \dots \cup H_i$ di $H_1 \dots H_i$ in G .

2. - Richiamiamo alcune proprietà già note e di facile dimostrazione utili per il nostro studio.

a) Se τ è un omomorfismo strutturale fra un gruppo G e un gruppo G' , se A e B sono due sottogruppi di G tali che $A > B$ allora $f(A) \geq f(B)$.

b) Se A', B' sono due sottogruppi di G' tali che $A' > B'$ allora $f_{-1}(A') > f_{-1}(B')$; $f^{-1}(A') > f^{-1}(B')$.

⁽³⁾ *Determinazione dei gruppi finiti in omomorfismo strutturale con un gruppo ciclico*; Rend. del Sem. Mat. Univ. Padova 18, pp. 140-162 (1949).

⁽⁴⁾ *Sulla condizione perchè un omomorfismo ordinario sia anche un omomorfismo strutturale*; Giornale di Matematiche di BATTAGLINI, vol. 78, pp. 182-192 (1948-49).

⁽⁵⁾ *Determinazione dei gruppi finiti in omomorfismo strutturale con un gruppo quadrimonio*; Rend. di Mat. e delle sue appl., serie V., vol. 9, fasc. 3-4, pp. 237-246 (Roma 1950).

c) Se A è un sottogruppo di G , la corrispondenza subordinata fra i sottogruppi di A ed $f(A)$ da τ è un omomorfismo strutturale.

d) Se U e U' sono rispettivamente i sottogruppi identici di G e G' , allora $f(U) = U'$, $f(G) = G'$.

e) Oltre il gruppo ciclico d'ordine 8 esistono in tutto ⁽⁶⁾, almeno di relazioni di isomorfismo, 4 diversi gruppi d'ordine 8 e precisamente:

- 1) Il gruppo dei quaternioni;
- 2) Il gruppo abeliano di tipo $(1, 1, 1)$;
- 3) Il gruppo abeliano di tipo $(2, 1)$;
- 4) Il gruppo diedrale (è un gruppo non abeliano generabile mediante due elementi g'_1, g'_2 legati dalle relazioni $g_1'^4 = g_2'^2 = u', g_1' g_2' = g_2' g_1'^3$).

§ 2. - Determinazione dei gruppi finiti strutturalmente omomorfi ad un gruppo G' isomorfo al gruppo dei quaternioni.

3. - Lo studio si potrebbe condurre portando l'attenzione sui tre sottogruppi d'ordine 4, che sono tutti e tre ciclici.

Una via più breve per giungere al risultato si ottiene facendo ricorso al lavoro del PERMUTTI (7). In questo studio il PERMUTTI perviene al seguente risultato conclusivo:

Condizione necessaria e sufficiente perchè un gruppo finito G sia in omomorfismo di struttura con un gruppo quadrinomio è che sia: $G = R \times S$, ove R è un gruppo d'ordine dispari ed S è un gruppo appartenente ad uno dei tipi seguenti:

- 1) *Quadrinomio*;
- 2) *Isomorfo al gruppo dei quaternioni*.

Da qui si vede intanto che fra un gruppo isomorfo al gruppo dei quaternioni ed un gruppo quadrinomio si può sempre porre un omomorfismo strutturale ω .

Sia allora τ un omomorfismo strutturale fra un gruppo finito G ed un gruppo G' isomorfo al gruppo dei quaternioni e

⁽⁶⁾ *Theory of groups of finite order* di Burnside, II^a ed. pag. 145.

⁽⁷⁾ Vedasi nota ⁽⁵⁾.

sia ω un omomorfismo strutturale fra il gruppo G' e un gruppo quadrimorfio G'' .

Allora il prodotto $\tau\omega$ è un omomorfismo strutturale fra G e G'' .

Pertanto, se un gruppo finito G è strutturalmente omomorfo ad un gruppo G' isomorfo al gruppo dei quaternioni, G è necessariamente anche strutturalmente omomorfo ad un gruppo quadrimorfio e quindi G rientra nella classe dei gruppi determinati dal PERMUTTI, vale a dire: $G = R \times S$, con R gruppo d'ordine dispari ed S gruppo appartenente ad uno dei due tipi:

α) un gruppo quadrimorfio;

β) isomorfo al gruppo dei quaternioni.

Dimostriamo che: *Se il gruppo G è dato da: $G = R \times S$, con R gruppo d'ordine dispari ed S soddisfacente alla condizione α), G non può essere strutturalmente omomorfo a G' .*

Infatti supponiamo che esista un gruppo $G = R \times S$, con R gruppo d'ordine dispari (anche identico) opportuno ed S un gruppo quadrimorfio, strutturalmente omomorfo a G' . Poichè l'omomorfismo strutturale prodotto $\tau\omega$ muta il gruppo S in G'' , $f(S) = G''$ ed R nel sottogruppo identico U'' di G'' , $f(R) = U''$, l'omomorfismo strutturale τ muterà R in un sottogruppo di G' contenuto nel gruppo unione dei sottogruppi di G' che ω muta in U'' . Tale gruppo coincide col sottogruppo d'ordine 2 di G' ⁽⁸⁾.

Se allora indico con $\varphi(S)$ il trasformato di S mediante τ , poichè si deve avere $\varphi(G) = \varphi(R \times S) = \varphi(R) \cup \varphi(S) = G'$, per la natura del gruppo $\varphi(R)$ e di G' si conclude che dev'essere $\varphi(S) = G'$, ossia S è strutturalmente omomorfo a G' ; ciò è però assurdo, avendo G' un numero di sottogruppi maggiore a quello di S .

Pertanto se il gruppo G è strutturalmente omomorfo a G' , il gruppo G deve soddisfare necessariamente alla relazione: $G = R \times S$ con R gruppo d'ordine dispari ed S isomorfo a G' .

Viceversa se tale condizione è soddisfatta, per un teorema dimostrato dallo ZAPPA ⁽⁹⁾, G è strutturalmente omomorfo a G' .

⁽⁸⁾ Vedasi il lavoro citato alla nota ⁽⁵⁾.

⁽⁹⁾ Vedasi nota ⁽⁴⁾.

Quindi abbiamo il teorema :

Condizione necessaria e sufficiente perchè un gruppo finito G sia strutturalmente omomorfo ad un gruppo G' isomorfo al gruppo dei quaternioni è che sia: $G = R \times S$ con R gruppo d'ordine dispari ed S isomorfo a G' .

§ 3. - Determinazione dei gruppi finiti strutturalmente omomorfi ad un gruppo d'ordine 8 non ciclico nè isomorfo al gruppo dei quaternioni.

4. - Prendiamo a considerare i 3 ultimi gruppi elencati al n. 3. Indichiamoli rispettivamente con G'_2, G'_3, G'_4 .

Indichiamo con G_i un gruppo strutturalmente omomorfo al gruppo G'_i ($i = 2, 3, 4$). Poichè ognuno dei gruppi G'_2, G'_3, G'_4 contiene come sottogruppo almeno un gruppo quadrimio, il gruppo G_i contiene in base alla proprietà c) almeno un sottogruppo A strutturalmente omomorfo ad un gruppo quadrimio. Tale gruppo non può essere ciclico, come stabili il PERMUTTI ⁽¹⁰⁾.

Pertanto non lo sarà neppure il gruppo G_i e abbiamo così il teorema: *Se G è un gruppo finito strutturalmente omomorfo ad un gruppo d'ordine 8 abeliano o diedrale, il gruppo G non può essere ciclico.*

5. - A questo punto ricordiamo il teorema seguente dimostrato dallo SCORZA ⁽¹¹⁾: Condizione necessaria e sufficiente perchè un gruppo G possa pensarsi come somma di tre suoi sottogruppi, nessuno dei quali coincide con esso, è che G ammetta un sottogruppo normale N il cui corrispondente gruppo fattoriale sia un gruppo quadrimio. Inoltre detto sottogruppo N è dato dall'intersezione dei tre sottogruppi di cui G è la somma.

Esaminando allora la struttura dei tre gruppi G'_2, G'_3, G'_4 , si vede facilmente che ognuno di questi tre gruppi è somma di 3 sottogruppi propri d'ordine 4. Indichiamoli rispettivamente

⁽¹⁰⁾ Vedasi nota ⁽⁵⁾.

⁽¹¹⁾ *I gruppi che possono pensarsi come somma di tre loro sottogruppi*, Boll. U. M. I., pp. 216-218 (1926).

con $I'_{i,1}, I'_{i,2}, I'_{i,3}$ dove l'indice i ($i = 2, 3, 4$) mette in evidenza il gruppo G'_i cui essi appartengono.

Consideriamo poi i tre gruppi $f^{-1}(I'_{i,1}), f^{-1}(I'_{i,2}), f^{-1}(I'_{i,3})$ di G'_i .

Essi sono, in virtù delle proposizioni b) e d) del n. 2, tre sottogruppi propri di G_i , e inoltre distinti data la univocità della corrispondenza τ .

Posto per brevità di scrittura $I_{i,j} = f^{-1}(I'_{i,j})$ dimostriamo il teorema: *Il gruppo G_i ($i = 2, 3, 4$) è somma dei tre sottogruppi propri distinti $I_{i,1}, I_{i,2}, I_{i,3}$; $G_i = I_{i,1} + I_{i,2} + I_{i,3}$.*

Invero sia g_i un generico elemento di G_i . Il trasformato del gruppo ciclico $\{g_i\}$ mediante τ , vale a dire il gruppo $f(\{g_i\})$, deve essere ciclico. Infatti, pel teorema del n. 4, non può essere $f(\{g_i\}) = G'_i$, nè può essere $f(\{g_i\}) = H'_i$ sottogruppo proprio non ciclico di G'_i , perchè H'_i avrebbe allora ordine 4 e sarebbe quadrinomio, mentre nel lavoro di PERMUTTI, è provato che tra un gruppo ciclico e un gruppo quadrinomio non può essere un omomorfismo strutturale. Pertanto $f(\{g_i\})$ è ciclico. Sia g'_i un suo elemento generatore.

Poichè g'_i deve essere in uno dei 3 sottogruppi $I'_{i,1}, I'_{i,2}, I'_{i,3}$, il gruppo $f(\{g_i\}) = \{g'_i\}$ sarà contenuto in uno almeno dei tre gruppi $I'_{i,1}, I'_{i,2}, I'_{i,3}$.

Ma allora, in virtù della b) del n. 2, il gruppo $\{g_i\}$ e quindi anche l'elemento g_i è contenuto in uno almeno dei gruppi $I_{i,1}, I_{i,2}, I_{i,3}$.

Data la genericità dell'elemento g_i scelto in G_i , si conclude coll'asserto.

Ne segue che: $G_i = I_{i,1} \cup I_{i,2} \cup I_{i,3}$.

Per il citato teorema dello SCORZA abbiamo che il gruppo $I_{i,1} \cap I_{i,2} \cap I_{i,3}$ è un sottogruppo normale di G_i , mentre il gruppo fattoriale $\frac{G_i}{I_{i,1} \cap I_{i,2} \cap I_{i,3}}$ è un gruppo quadrinomio.

Al gruppo $I_{i,1} \cap I_{i,2} \cap I_{i,3}$ corrisponde in G'_i mediante l'omomorfismo strutturale τ il gruppo $I'_{i,1} \cap I'_{i,2} \cap I'_{i,3}$. Consideriamo poi il gruppo $f^{-1}(I'_{i,1} \cap I'_{i,2} \cap I'_{i,3})$.

In virtù della prop. b) del n. 2, il gruppo $f^{-1}(I'_{i,1} \cap I'_{i,2} \cap I'_{i,3})$, che indichiamo semplicemente con H_i , contiene il gruppo $I_{i,1} \cap I_{i,2} \cap I_{i,3}$; $H_i \geq I_{i,1} \cap I_{i,2} \cap I_{i,3}$ (1).

Viceversa, poichè il gruppo $I'_{i,1} \cap I'_{i,2} \cap I'_{i,3}$ è un sottogruppo comune ai 3 gruppi $I'_{i,1}$, $I'_{i,2}$, $I'_{i,3}$, il gruppo H_i è contenuto sia in $I_{i,1}$, sia in $I_{i,2}$, sia in $I_{i,3}$, e quindi sussiste pure la relazione $H_i \leq I_{i,1} \cap I_{i,2} \cap I_{i,3}$ (2).

Confrontando la (1) con la (2) concludiamo con la relazione $H_i = I_{i,1} \cap I_{i,2} \cap I_{i,3}$.

Indicato con h_i l'ordine di H_i , messo in evidenza il fattore potenza di 2: $h_i = 2^{\alpha_i} q_i$, l'ordine g_i di G_i risulta allora in virtù del teorema dello SCORZA $g_i = 4 h_i = 2^{\alpha_i+2} q_i$; poichè $G_i > I_{i,j} > H_i$ l'ordine r_i di $I_{i,j}$ è $r_i = 2 h_i = 2^{\alpha_i+1} q_i$ e quindi H_i è d'indice 2 in $I_{i,j}$ e $I_{i,j}$ è d'indice 2 in G_i .

6. - Teniamo ora presente che i gruppi $I'_{i,1}$, $I'_{i,2}$, $I'_{i,3}$ sono tutti e tre gruppi quadrimoni, oppure due ciclici e uno quadrimonio, o uno ciclico e due quadrimoni a seconda che i è rispettivamente uguale ad 2, 3, 4.

In virtù degli studi dello ZAPPA e del PERMUTTI⁽¹²⁾ possiamo dire che il gruppo $I_{i,j}$ è rappresentabile in uno dei seguenti modi:

I) Se $I'_{i,j}$ è ciclico, $I_{i,j} = R_{i,j} \cup S_{i,j}$ con $R_{i,j}$ sottogruppo normale di $I_{i,j}$, $S_{i,j}$ sottogruppo di SYLOW di $I_{i,j}$ ciclico e d'ordine primo con quello di $R_{i,j}$. Inoltre il gruppo $S_{i,j}$ contiene il gruppo $P_{i,j} = f_{-1}(I'_{i,j})$; $P_{i,j}$ appartiene al centro di $I_{i,j}$ e $f(R_{i,j}) = U'_i$ (sottogruppo identico di G'_i).

II) Se $I'_{i,j}$ è un gruppo quadrimonio, $I_{i,j} = R_{i,j} \times S_{i,j}$, dove $S_{i,j}$ è un gruppo quadrimonio o isomorfo al gruppo dei quaternioni mentre l'ordine di $R_{i,j}$ è dispari. Inoltre $S_{i,j} = f_{-1}(I'_{i,j})$, $f(R_{i,j}) = U'_i$.

Ricordati questi risultati, siamo in grado di dimostrare che i tre gruppi $S_{i,1}$, $S_{i,2}$, $S_{i,3}$ sono p-gruppi d'ordine pari.

La cosa è evidente nel caso di $i = 2$, perchè allora i tre gruppi $I'_{2,1}$, $I'_{2,2}$, $I'_{2,3}$ sono quadrimoni. Per $i = 3$ oppure $i = 4$, ricordiamo invece che il gruppo $I'_{i,j} \cap I'_{i,k}$ è un sottogruppo d'ordine 2 di G'_i ($i = 3, 4$), (j, k indica una disposizione semplice degli indici 1, 2, 3).

Pertanto il gruppo non identico $f_{-1}(I'_{i,j} \cap I'_{i,k})$ è contenuto nei tre p-gruppi $S_{i,1}$, $S_{i,2}$, $S_{i,3}$ che saranno pertanto d'ordine

(12) Vedasi nota (3) e (5).

pari, essendo tale almeno uno di essi. Se teniamo allora presente la relazione $r_i = 2^{2i+1} q_i$ e il fatto che $S_{i,j}$ è un sottogruppo di SYLOW di $I_{i,j}$, abbiamo che l'ordine di $S_{i,j}$ è precisamente 2^{2i+1} . Da qui e da quanto detto sopra segue che l'ordine di R_i è in ogni caso un numero dispari.

TEOREMA. *I tre gruppi $R_{i,1}, R_{i,2}, R_{i,3}$ coincidono.*

Invero, poichè $R_{i,j}$ è un sottogruppo proprio normale di G_i d'indice pari, gli ordini di $R_{i,1}, R_{i,2}, R_{i,3}$ sono primi coll'indice di uno qualsiasi di essi in G_i . Preso allora ad es. il gruppo $R_{i,1}$, esso è normale in G_i e contiene quindi ogni gruppo di G_i il cui ordine è primo coll'indice di $R_{i,1}$ in G_i ⁽¹³⁾.

Ora, per quanto visto, i gruppi $R_{i,2}, R_{i,3}$ soddisfano alla condizione richiesta e perciò risulta $R_{i,1} \geq R_{i,2}, R_{i,1} \geq R_{i,3}$.

Analogamente si vedrebbe che $R_{i,1} \leq R_{i,2}, R_{i,1} \leq R_{i,3}$ e quindi infine si conclude che $R_{i,1} = R_{i,2} = R_{i,3}$, c. v. d.

Porremo allora per brevità di scrittura $R_i = R_{i,1} = R_{i,2} = R_{i,3}$.

7. - Abbiamo visto nel n. 6 che qualora il gruppo $I'_{i,j}$ fosse ciclico, il gruppo $I_{i,j}$ è dato come unione di 2 gruppi $I_{i,j} = R_i \cup S_{i,j}$ con R_i sottogruppo normale di $I_{i,j}$ d'ordine dispari ed $S_{i,j}$ sottogruppo di SYLOW d'ordine pari, ciclico e contenente il gruppo $P_{i,j} = f_{-1}(I'_{i,j})$, gruppo che appartiene al centro di $I_{i,j}$.

Vogliamo qui precisare che il gruppo $P_{i,j}$ coincide addirittura col gruppo $S_{i,j}$.

Invero, poichè $S_{i,j}$ è un gruppo di SYLOW di $I_{i,j}$ ciclico d'ordine pari tali saranno pure i suoi coniugati, ossia tutti i sottogruppi di SYLOW di $I_{i,j}$ d'ordine pari. Inoltre $P_{i,j}$, come appartenente al centro di $I_{i,j}$, appartiene a tutti i sottogruppi di SYLOW di $I_{i,j}$ d'ordine pari.

Se allora $P_{i,j}$ fosse un sottogruppo proprio di $S_{i,j}$, tutti i sottogruppi di SYLOW di H_i d'ordine pari dovrebbero pure contenere il gruppo $P_{i,j}$ essendo H_i d'indice 2 in $I_{i,j}$. Ma allora sussisterebbe l'assurda relazione: $f(H_i) \geq I'_{i,j}$ perchè $P_{i,j} \leq H_i$; dunque $P_{i,j} = S_{i,j}$ c. v. d.

Visto così che il gruppo $S_{i,j}$, coincide col gruppo $P_{i,j}$, tenuto

(13) G. SCORZA: *Gruppi Astratti*; pag. 27 (nota).

conto che $P_{i,j}$ appartiene al centro di $I_{i,j}$ e che l'ordine di $P_{i,j}$ è primo con quello di R_i , risulta: $I_{i,j} = R_i \times S_{i,j}$.

Riassumendo abbiamo:

Se $I'_{i,j}$ indica un sottogruppo d'ordine 4 del gruppo G'_i , dove G'_i è un gruppo d'ordine 8 non ciclico nè isomorfo al gruppo dei quaternioni, e se G_i è un gruppo strutturalmente omomorfo a G'_i , il gruppo $I_{i,j} = f^{-1}(I'_{i,j})$ è del tipo: $I_{i,j} = R_i \times S_{i,j}$ dove R_i è un sottogruppo d'ordine dispari ed $S_{i,j}$ è un p -gruppo d'ordine pari ciclico se tale è $I'_{i,j}$; se $I'_{i,j}$ è invece un gruppo quadrimio, $S_{i,j}$ è un gruppo quadrimio o isomorfo al gruppo dei quaternioni.

L'ordine dei tre gruppi $S_{i,1}$, $S_{i,2}$, $S_{i,3}$ è o per tutti e tre uguale a 4 o per tutti e tre uguale a 8. Inoltre $S_{i,j} = f_{-1}(I'_{i,j})$.

8. - A questo punto possiamo ad esaminare separatamente i tre casi:

- I. caso: G' gruppo abeliano d'ordine 8 e tipo $(I, 1, 1)$;
- II. caso: G' gruppo abeliano d'ordine 8 e tipo $(2, 1)$;
- III. caso: G' gruppo diedrale d'ordine 8.

Nel I. caso i tre sottogruppi d'ordine 4 di G' , I'_1 , I'_2 , I'_3 sono gruppi quadrimio. Pertanto se G è un gruppo strutturalmente omomorfo a G' , posto, come al solito, $I_i = f^{-1}(I'_i)$ valgono le relazioni:

$$I_1 = R \times S_1, \quad I_2 = R \times S_2, \quad I_3 = R \times S_3$$

con R sottogruppo d'ordine dispari ed S_1 , S_2 , S_3 tutti e tre quadrimio o tutti e tre isomorfi al gruppo dei quaternioni.

Inoltre $S_i = f_{-1}(I'_i) \quad (3)$.

Poichè il gruppo I_i è d'indice 2 in G , se S è un sottogruppo di SYLOW di G d'ordine pari, S non risulta contenuto in nessuno dei sottogruppi I_1 , I_2 , I_3 e quindi $f(S) = G'$. S contiene allora in virtù della (3) i gruppi distinti S_1 , S_2 , S_3 che sono d'indice 2 in S (n. 6). Ne segue che $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$. Visto che $G = I_1 + I_2 + I_3 = I_1 \cup I_2 \cup I_3$, riesce $G = R \cup (S_1 \cup S_2 \cup S_3) =$

$= R \cup S$. Poichè ogni elemento di R era permutabile con ogni elemento di S_i e poichè l'ordine di R è primo con l'ordine di S , riesce $G = R \times S$.

Siano i tre gruppi S_1, S_2, S_3 gruppi quadrimoni.

Essendo l'indice 2 di S_i in S , l'ordine di S in questo caso sarà 8. Esso contiene tre gruppi quadrimoni distinti e ciò basta per concludere che S è un gruppo abeliano d'ordine 8 e tipo $(1, 1, 1)^{(14)}$.

Siano invece i gruppi S_1, S_2, S_3 isomorfi al gruppo dei quaternioni. L'ordine di S risulta allora $2 \cdot 8 = 16$.

Poichè $f(S_i \cap S_j) = I'_i \cap I'_j$ è un gruppo non identico, i gruppi S_1, S_2, S_3 si tagliano a due a due secondo un gruppo non identico. Ma un gruppo isomorfo al gruppo dei quaternioni possiede un solo sottogruppo d'ordine 2 e perciò i tre gruppi S_1, S_2, S_3 hanno lo stesso gruppo d'ordine 2, che indichiamo con N . Consideriamo poi un altro gruppo M d'ordine 2 di G . Essendo $f(M) \neq G'$, M è contenuto in uno dei gruppi I_1, I_2, I_3 ad es. per fissare le idee in I_1 . Poichè M è un p-gruppo d'ordine pari esso sarà contenuto nell'unico sottogruppo di SYLOW di I_1 d'ordine pari: S_1 . Pertanto $M < S_1$. Essendo S_1 per ipotesi isomorfo al gruppo dei quaternioni, esso contiene il solo sottogruppo N d'ordine 2 e quindi $M = N$. Dunque il gruppo S ha un solo gruppo d'ordine 2 e non essendo S ciclico, esso risulta un gruppo generalizzato dei quaternioni d'ordine 16.

Facciamo vedere che il gruppo S non può essere strutturalmente omomorfo a G' .

Infatti il gruppo G conterrebbe allora un gruppo $\{g\}$ ciclico d'ordine 8 non contenuto nè in I_1 nè in I_2 nè in I_3 , e quindi dovrebbe essere $f(\{g\}) = G'$, ciò che è assurdo.

Concludiamo dunque che *condizione necessaria perchè un gruppo d'ordine finito G sia strutturalmente omomorfo al gruppo abeliano G' d'ordine 8 e tipo $(1, 1, 1)$, è che sia: $G = R \times S$ con R gruppo d'ordine dispari ed S isomorfo al gruppo G' .*

(14) Vedasi nota (6).

Nel II. caso il gruppo G' contiene un gruppo quadrimio che indichiamo con I'_1 e due gruppi ciclici d'ordine 4: I'_2, I'_3 .

Se G è un gruppo strutturalmente omomorfo a G' per i tre gruppi $I_1 = f^{-1}(I'_1), I_2 = f^{-1}(I'_2), I_3 = f^{-1}(I'_3)$ si hanno le relazioni:

$$(4) \quad I_1 = R \times S_1 \quad I_2 = R \times S_2 \quad I_3 = R \times S_3$$

dove R è un gruppo d'ordine dispari ed S_1 è un gruppo quadrimio oppure isomorfo al gruppo dei quaternioni, mentre S_2, S_3 sono gruppi ciclici d'ordine uguale all'ordine di S_1 .

Indichiamo con S un sottogruppo di SYLOW di G d'ordine pari.

Come nel primo caso si vede che valgono le relazioni:

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \quad G = R \times S.$$

Se S_1 è un gruppo quadrimio, gli ordini dei gruppi S_1, S_2, S_3 saranno uguali a 4. L'ordine di S sarà 8 e poichè contiene due gruppi ciclici d'ordine 4 e un gruppo quadrimio, possiamo dire che il gruppo S d'ordine 8 è abeliano del tipo $(1, 2)^{(15)}$.

Se S_1 è invece un gruppo isomorfo al gruppo dei quaternioni, il gruppo S avrà l'ordine uguale a $2 \cdot 8 = 16$.

Proviamo che S contiene un solo sottogruppo d'ordine 2.

Indichiamo con M_i l'unico sottogruppo d'ordine 2 di S_i . Essendo $S_i > T$ con $T = f_{-1}(I'_1 \cap I'_2 \cap I'_3)$ poichè $I'_1 \cap I'_2 \cap I'_3 > U', T$ è ciclico d'ordine una potenza di 2 e quindi $M_1 = M_2 = M_3$. Poniamo $M_i = M$. Sia poi N un altro sottogruppo ciclico d'ordine 2 di S . Poichè non può essere $f(N) = G'$, il gruppo N sarà contenuto in almeno uno dei gruppi I_i e quindi per le (4) in almeno uno dei gruppi S_1, S_2, S_3 . Ma allora $N = M$ e quindi S ha un solo sottogruppo d'ordine 2. Poichè d'altra parte esso contiene più di un sottogruppo ciclico d'indice 2 (S_1, S_2), in virtù di un teorema sui p-gruppi d'ordine pari,

⁽¹⁵⁾ Vedasi nota ⁽⁶⁾.

si conclude che S è isomorfo al gruppo dei quaternioni. Ma ciò è assurdo essendo l'ordine S uguale a 16.

L'ipotesi che S_1 sia isomorfo al gruppo dei quaternioni va dunque scartata.

Concludiamo che: *Condizione necessaria perchè un gruppo finito G sia strutturalmente omomorfo al gruppo abeliano G' d'ordine 8 e tipo (1, 2) è che sia: $G = R \times S$ con R gruppo d'ordine dispari ed S isomorfo a G' .*

Nel III. caso il gruppo G' contiene un gruppo ciclico I'_1 d'ordine 4 e due gruppi quadrimomi I'_2, I'_3 . Se G è un gruppo strutturalmente omomorfo a G' , posto $I_i = f^{-1}(I'_i)$, sussistono le relazioni:

$$G = I_1 + I_2 + I_3 = I_1 \cup I_2 \cup I_3;$$

$$I_1 = R \times S_1, \quad I_2 = R \times S_2, \quad I_3 = R \times S_3$$

con R gruppo d'ordine dispari ed S_2, S_3 tutti e due gruppi quadrimomi o tutti e due isomorfi al gruppo dei quaternioni mentre S_1 è un gruppo ciclico dello stesso ordine di S_i ($i = 2, 3$). Inoltre $S_i = f_{-1}(I'_i)$.

Studiamo il gruppo unione $S_1 \cup S_2 \cup S_3$.

Se S indica un sottogruppo di SYLOW di G d'ordine pari, essendo $f(S) = G'$, esso contiene i tre gruppi distinti S_1, S_2, S_3 che sono d'indice 2 in S e quindi $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$.

Distinguiamo due casi:

I) S_i un gruppo quadrimomio ($i = 2, 3$)

II) S_i isomorfo al gruppo dei quaternioni.

Nel I caso l'ordine di S_i è 4 e perciò il gruppo S è d'ordine $2 \cdot 4 = 8$; contiene due gruppi quadrimomi ed un gruppo ciclico d'ordine 4.

Ciò basta per concludere che S sia isomorfo G' ⁽¹⁶⁾.

Nel secondo caso, l'ordine di S è $2 \cdot 8 = 16$. Con un ragionamento simile a quello che si è fatto nel caso che G' era un gruppo abeliano d'ordine 8 e tipo (1, 2), si vedrebbe che S è un gruppo generalizzato dei quaternioni d'ordine 16.

(¹⁶) Vedasi nota (⁶).

Dunque: *Condizione necessaria perchè un gruppo finito G sia strutturalmente omomorfo al gruppo diedrale d'ordine 8, è che sia: $G = R \times S$ con R gruppo d'ordine dispari ed S gruppo o isomorfo al gruppo G' o isomorfo al gruppo generalizzato dei quaternioni d'ordine 16.*

9. - In questo numero vogliamo invertire i risultati del n. 8.

Sia dunque G_i un gruppo prodotto diretto di due gruppi: $G_i = R_i \times S_i$ con R_i sottogruppo d'ordine dispari ed S_i isomorfo al gruppo G'_i , dove G'_i indica rispettivamente il gruppo abeliano d'ordine 8 e tipo $(1, 1, 1)$, il gruppo abeliano d'ordine 8 e tipo $(2, 1)$, il gruppo diedrale d'ordine 8 a seconda che i è uguale ad 2, 3, 4.

In virtù di un teorema dello ZAPPA ⁽¹⁷⁾ l'omomorfismo ordinario che si ottiene tra il gruppo G_i e il $\frac{G_i}{R_i}$ associando ad ogni elemento di G_i quel sistema laterale di G_i rispetto R_i che lo contiene, è pure un omomorfismo strutturale. D'altra parte, poichè i gruppi $\frac{G_i}{R_i}$ ed G'_i sono isomorfi ⁽¹⁸⁾ e poichè un isomorfismo tra due gruppi è anche un omomorfismo strutturale concludiamo che G_i è strutturalmente omomorfo a G'_i .

Sia infine G_4 un gruppo dato come prodotto diretto di un gruppo R_4 d'ordine dispari e di un gruppo S_4 generalizzato dei quaternioni d'ordine 16: $G_4 = R_4 \times S_4$.

Per un teorema dello ZAPPA il gruppo G_4 risulta strutturalmente omomorfo al gruppo S_4 ⁽¹⁹⁾. Se riusciamo a far vedere che a sua volta il gruppo S_4 è strutturalmente omomorfo al gruppo diedrale G'_4 d'ordine 8, allora G_4 è pure strutturalmente omomorfo a G'_4 .

Perciò osserviamo che se C è il centro di S_4 , il gruppo $\frac{S_4}{C}$ è un gruppo diedrale d'ordine 8 e perciò isomorfo al gruppo G'_4 . D'altra parte l'omomorfismo ordinario tra il gruppo S_4 e

⁽¹⁷⁾ Vedasi nota (4).

⁽¹⁸⁾ G. SCORZA, *Gruppi Astratti*, n. 66.

⁽¹⁹⁾ Vedasi nota (4).

il gruppo $\frac{S_4}{C}$ in virtù di un teorema dello ZAPPA ⁽¹⁰⁾ è anche un omomorfismo strutturale, sicchè S_4 è strutturalmente omomorfo a G_4 .

11. — TEOREMA CONCLUSIVO. — *Condizione necessaria e sufficiente perchè un gruppo finito G sia strutturalmente omomorfo ad un gruppo G' d'ordine 8 non ciclico, è che sia: $G = R \times S$ con R gruppo d'ordine dispari ed S , se G' non è il gruppo diedrale, isomorfo a G' . Se G' è il gruppo diedrale, S può essere isomorfo a G' oppure un gruppo generalizzato dei quaternioni d'ordine 16.*