Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Enrico Magenes

Sulle estremanti dei polinomiali nella sfera di Hilbert

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 20 (1951), p. 24-47

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1951__20__24_0>

SULLE ESTREMANTI DEI POLINOMIALI NELLA SFERA DI HILBERT

Memoria (*) *di* Enrico Magenes (*a Padova*).

Siano A un insieme di misura finita o infinita dello spazio euclideo S_p a p dimensioni, $f(t)$ una funzione reale di quadrato sommabile in A, $K_i(t_1, t_2, \ldots, t_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ fissate funzioni reali di quadrato sommabile rispettivamente negli insiemi (degli spazi euclidei S_{pi} a pi dimensioni) $A^{(i)} = \underset{1}{A} \times \underset{2}{A} \times \ldots \ldots \times \underset{i}{A} \cdot (i = 1, 2, \ldots, n)$.

Il funzionale

$$P(f) = \sum_{i=1}^{n} P_i(f) \tag{1}$$

con $$P_i(f) = \int_{A^{(i)}} K_i(t_1, t_2, \ldots, t_i)\, f(t_1)\, f(t_2) \ldots f(t_i)\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_i$$

risulta definito nell'insieme Γ delle funzioni reali $f(t)$ di quadrato sommabile in A e si dice *polinomiale di grado* n, se K_n non è quasi-ovunque nullo in $A^{(n)}$.

È noto che, se consideriamo un sistema di funzioni $\{\varphi_s(t)\}$ $(s = 1, 2, \ldots)$ ortonormale e completo in A (per l'approssimazione lineare in media), possiamo rappresentare $f(t)$ mediante le sue coordinate di Fourier rispetto al sistema $\{\varphi_s(t)\}$:

$$f(t) \equiv \left\{ x_s = \int_A f(t)\, \varphi_s(t)\, dt,\ s = 1, 2, \ldots \right\}$$

(*) Pervenuta in Redazione il 5 agosto 1950.

e $K_i(t_1, \ldots, t_i)$ mediante le sue coordinate di FOURIER rispetto al sistema $\{\varphi_{s_1}(t_1) \cdot \varphi_{s_2}(t_2) \ldots \varphi_{s_i}(t_i)\}$ ortonormale e completo in $A^{(i)}$:

$$K_i(t_1, \ldots, t_i) \equiv \Big\{ a_{s_1, s_2, \ldots, s_i} =$$

$$= \int_{A^{(i)}} K_i(t_1, \ldots, t_i)\, \varphi_{s_1}(t_1) \ldots \varphi_{s_i}(t_i)\, dt_1 \ldots dt_i \,,\ s_1, \ldots, s_i = 1, 2, \ldots \Big\}$$

cosicchè risulta:

$$P_i(f) = \sum_{s_1 \ldots s_i = 1}^{\infty} a_{s_1 \ldots s_i} x_{s_1} \ldots x_{s_i} . \tag{2}$$

È pure noto (si vedano i nn. 62, 127, 134 delle *Lezioni di Analisi Funzionale* Roma, 1947 - del Prof. M. PICONE) che con la metrica di FRÉCHET [1] la sfera di HILBERT Γ_δ di raggio δ, cioè l'insieme delle funzioni $f(t)$ di Γ per cui è $\int_A f^2(t)\, dt \leq \delta^2$, è un insieme chiuso e compatto e che in Γ_δ il funzionale $P(f)$ è uniformemente continuo, sicchè ammette ivi un massimo e un minimo.

Da un recente teorema di G. FICHERA [2], sui funzionali continui con la metrica di FRÉCHET, risulta il fatto notevole che *questo massimo e questo minimo sono anche rispettivamente estremo superiore ed estremo inferiore di $P(f)$ sulla frontiera $F\Gamma_\delta$* di Γ_δ, cioè sull'insieme delle $f(t)$ di Γ per cui $\int_A f^2(t)\, dt = \delta^2$.

Un problema interessante, sopratutto per le sue relazioni con le equazioni integrali lineari e non lineari (sul quale ha at-

(1) La distanza di due funzioni di Γ, $f \equiv \{x_s\}$ e $f^* \equiv \{x_s^*\}$ è definita come somma della serie $\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \frac{|x_s - x_s^*|}{1 + |x_s - x_s^*|}$.

(2) *Sui funzionali continui con la metrica di Fréchet* [Rend. Acc. Lincei (8) - vol. II - 1947 - pp. 174 177].

tirato la mia attenzione lo stesso Prof. FICHERA) è quello di studiare l'*ubicazione* delle estremanti di $P(f)$ in Γ_δ e in particolare di *determinare in quali casi gli estremi sono assunti su* $F\Gamma_\delta$.

Il caso del polinomiale quadratico ($n = 2$) è ormai stato studiato in modo esauriente e definitivo con i lavori di M. PICONE e L. TONELLI del 1939 e di G. FICHERA del 1942 (3); da essi, e in particolare da quello di FICHERA, risulta tra l'altro che *una almeno delle estremanti è certamente sempre su* $F\Gamma_\delta$; questo risultato vale anche per i polinomiali *omogenei* di grado n qualunque, cioè del tipo $P(f) = P_n(f)$ (4).

Si tratta ora di studiare il problema dell'*ubicazione* delle estremanti in Γ_δ in generale per un qualsiasi polimoniale. Ed è di esso che mi occupo brevemente in questo lavoro.

Mi sembra opportuno osservare anzitutto che si può dare una *risposta negativa alla domanda se una almeno delle estremanti sia sempre su* $F\Gamma_\delta$; in realtà le estremanti possono anche essere *tutte interne*.

Costruiamo all'uopo il seguente esempio. Si consideri nella sfera Γ_1 il polinomiale $P(f) = P_1(f) + P_3(f) + P_5(f)$ dove

$$P_1(f) = -x_1\,, \quad P_3(f) = x_1^3 + \frac{x_1 x_2^2}{2^2} + \dots + \frac{x_1 x_s^2}{2^s} + \dots$$

$$P_5(f) = -\frac{x_1^3 x_2^2}{2^2} - \frac{x_1^3 x_3^2}{2^3} - \dots - \frac{x_1^3 x_s^2}{2^s} - \dots$$

Le serie scritte rappresentano effettivamente dei polinomiali, se $x_1, \dots x_s \dots$ si interpretano come coordinate di FOURIER di una funzione di quadrato sommabile in A rispetto al sistema $\{\varphi_s(t)\}$,

(3) M. PICONE: *Sopra un problema di Calcolo funzionale* [Rend. Acc. Lincei (6) - vol. XXIX - 1939 - pp. 155-159]; L. TONELLI: *Su alcuni funzionali* [Ann. Mat. pura e appl. (4) - t. XIII - 1939 - pp. 1-21]; G. FICHERA: *Sull'ubicazione e l'unicità delle estremanti del polinomiale quadratico nella sfera di Hilbert* [Pubbl. Ist. Naz. Appl. Calcolo, n. 160 - 1944].

(4) Ved. M. PICONE: *Lezioni* ..... n. 139.

in quanto sono convergenti le serie $\sum_{s=1}^{\infty} a_s^2$, $\sum_{s_1 s_2, s_3=1}^{\infty} a^2_{s_1 s_2 s_3}$, $\sum_{s_1, \dots s_5=1}^{\infty} a^2_{s_1 \dots s_5}$ dei quadrati dei coefficienti, che possono dunque interpretarsi come coefficienti di Fourier di 3 funzioni $K_1(t_1)$, $K_3(t_1, t_2, t_3)$, $K_5(t_1, \dots, t_5)$ rispetto ai sistemi $\{\varphi_s(t_1)\}$, $\{\varphi_{s_1}(t_1) \cdot \varphi_{s_2}(t_2) \cdot \varphi_{s_3}(t_3)\}$, $\{\varphi_{s_1}(t_1) \dots \varphi_{s_5}(t_5)\}$. Possiamo evidentemente scrivere anche

$$P(f) = (x_1^3 - x_1)\left[1 - \frac{x_2^2}{2^2} - \frac{x_3^2}{2^3} - \dots - \frac{x_s^2}{2^s} - \dots\right] =$$

$$= (x_1^3 - x_1)\, Q(x_2, \dots, x_s, \dots)$$

dove $Q(x_2, \dots, x_s, \dots)$ è una funzione delle coordinate $x_2, \dots, x_s, \dots$ di $f(t)$, la quale, poichè $x_1, x_2, \dots, x_s, \dots$ sono in Γ_1 soggette alla limitazione $\sum_{s=1}^{\infty} x_s^2 \leq 1$, risulta in Γ_1 compresa tra $\frac{1}{2}$ e 1; ed è $Q(x_2, \dots, x_s \dots) = 1$ solo se $x_s = 0$ $(s = 2, 3 \dots)$. Risulta dunque in Γ_1:

$$\begin{array}{lcr} 0 < P(f) \leq x_1^3 - x_1 \,, & \text{se} & -1 < x_1 < 0 \\ x_1^3 - x_1 \leq P(f) < 0 & \text{»} & 0 < x_1 < 1 \\ P(f) = 0 & \text{»} & x_1 = 0, 1, -1 \end{array}$$

Si verifica allora immediatamente che il massimo di $P(f)$ in Γ_1 è assunto solamente sulla funzione di coordinate $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_s = 0$ $(s = 2, 3, \dots)$ e il minimo solamente sulla funzione di coordinate $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_s = 0$ $(s = 2, 3, \dots)$ e queste funzioni sono evidentemente interne a Γ_1, avendo norma integrale uguale a $\frac{1}{3}$.

Nei prossimi numeri attraverso diverse considerazioni di carattere diretto ed indiretto, darò, come risultato di un primo studio, alcune condizioni sufficienti perchè gli estremi di $P(f)$ siano assunti su $F\Gamma_\delta$ e ne farò poi applicazione alle equazioni integrali non lineari. I risultati non dànno certo una sistemazione esauriente del problema, come è già stato fatto per il polinomiale quadratico, il cui studio ha potuto tra l'altro giovarsi della teoria delle equazioni integrali lineari a nucleo simmetrico: ma se si pensa il polinomiale come polinomio in infinite variabili e lo si confronta con i polinomi in un numero finito di variabili, si capisce come nel passaggio da $n = 2$ a $n > 2$ la difficoltà e la varietà dei casi aumentino notevolmente sì da rendere assai complessa e problematica una esauriente sistemazione [5].

1. - Un criterio generale; il caso dei nuclei elementari. -

Teorema I. - *Sia* $\{\psi_r(t)\}$ $(r = 1, 2, \ldots)$ *un sistema di funzioni di quadrato sommabile in* A, *il quale* ***non sia completo*** *in* A *(per l'approssimazione lineare in media delle funzioni di* Γ); *allora, se risulta* [6]

$$K_i(t_1, \ldots, t_i) \simeq \sum_{r_1, \ldots, r_i = 1}^{\infty} b_{r_1, \ldots, r_i} \psi_{r_1}(t_1) \ldots \psi_{r_i}(t_i) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

$b_{r_1, \ldots, r_i}$ *essendo coefficienti costanti, il massimo e il minimo di* $P(f)$ *in* Γ_δ *sono assunti su* $F\Gamma_\delta$.

(5) A proposito dell'analogia dei polinomiali con i polinomi in un numero finito di variabili, è opportuno però osservare che occorre andar cauti, in quanto il passaggio dal finito all'infinito può presentare fatti non immediatamente intuibili (v. il già citato risultato di Fichera sull'estremo superiore o inferiore di $P(f)$ in $F\Gamma_\delta$ e l'osservazione finale di pag. 159 del lavoro di M. Picone citato in (3)).

(6) Il simbolo $\simeq$ significa, ora e nel seguito, uguaglianza nella metrica di Hilbert e quindi, in questo caso, convergenza in media della serie a secondo membro verso K_i.

Infatti, per un noto teorema, possiamo scrivere:

$$(3)\quad P_i(f) = \sum_{r_1,\dots r_i=1}^{\infty} b_{r_1,\dots,r_i} \int_{A^{(i)}} \psi_{r_1}(t_1)\dots\psi_{r_i}(t_i)\, f(t_1)\dots f(t_i)\, dt_1\dots dt_i =$$

$$= \sum_{r_1\dots r_i=1}^{\infty} b_{r_1,\dots,r_i} \int_A f(t_1)\, \psi_{r_1}(t_1)\, dt_1 \dots \int_A f(t_i)\, \psi_{r_i}(t_i)\, dt_i .$$

Sia ora $f_0(t)$ una massimante di $P(f)$ in Γ_δ e si supponga che essa sia interna a Γ_δ, cioè $\int_A f_0^2(t)\, dt < \delta^2$. Poichè il sistema $\{\psi_r(t)\}$ non è completo, esisterà una funzione $f^*(t)$ di Γ a norma integrale non nulla, che sia ortogonale a tutte le $\psi_r(t)$.

Se si tengono presenti le (3) si ha allora che per ogni valore reale della costante q risulta

$$P(f_0 + q f^*) = P(f_0) .$$

D'altra parte è

$$\int_A [f_0(t) + q f^*(t)]^2\, dt = \int_A f_0^2(t)\, dt + 2q \int_A f_0(t) f^*(t)\, dt + q^2 \int_A f^{*2}(t)\, dt$$

e poichè $\int_A f^{*2}(t)\, dt$ è > 0, si potrà sempre trovare un valore q per cui sia $\int_A [f_0(t) + q f^*(t)]^2\, dt = \delta^2$; sicchè il massimo è assunto anche su $F\Gamma_\delta$. Analogamente per il minimo.

Osservazione I.: Si osservi che la dimostrazione data permette in sostanza di dire che, nelle ipotesi poste, *$P(f)$ assume su $F\Gamma_\delta$ ogni valore che assume in Γ_δ.*

Corollario: *Le ipotesi del teorema I sono soddisfatte se i nuclei K_i sono* ***elementari,*** *cioè del tipo*

$$K_i(t_1, t_2, \dots, t_i) = \sum_{r=1}^{r_i} H_{r,1}^{(i)}(t_1)\, H_{r,2}^{(i)}(t_2) \dots H_{r,i}^{(i)}(t_i) \quad (i = 1\ \dots, n) .$$

Infatti le $H_{rj}^{(i)}(t)$ $(i = 1, \ldots n;\ r = 1, \ldots, r_i;\ j = 1, \ldots, i)$ formano un sistema non completo in A, essendo in numero finito.

Vedremo successivamente in quali casi si possa assicurare per i nuclei elementari che le estremanti sono *soltanto* su $F\Gamma_\delta$.

Osservazione II.: Si osservi che il corollario ora enunciato permetterebbe facilmente, mediante un evidente ragionamento di approssimazione dei nuclei, di riottenere per altra via, relativamente ai polinomiali qualunque, il teorema di G. Fichera citato nell'introduzione (l'estremo superiore e inferiore di $P(f)$ su $F\Gamma_\delta$ coincidono col massimo e il minimo di $P(f)$ in Γ_δ).

Il ragionamento ora fatto ci permette di arrivare a un altro risultato abbastanza significativo.

Teorema II. – *Si supponga che i nuclei K_i per $i = 1, 3, 4, \ldots, n$ soddisfino ancora all'ipotesi del teorema I, mentre il nucleo K_2 sia simmetrico* (7) *e **definito positivo** [**negativo**]; allora il massimo [minimo] di $P(f)$ in Γ_δ è assunto su $F\Gamma_\delta$ e solo su $F\Gamma_\delta$.*

Infatti $f_0(t)$ e $f^*(t)$ abbiano lo stesso significato di prima. Risulta ora

$$P(f_0 + qf^*) = P(f_0) - \int_{A^{(2)}} K_2(t_1, t_2)\, f_0(t_1)\, f_0(t_2)\, dt_1\, dt_2 +$$

$$+ \int_{A^{(2)}} K_2(t_1, t_2)\, [f_0(t_1) + qf^*(t_1)]\, [f_0(t_2) + qf^*(t_2)]\, dt_1\, dt_2 =$$

$$= P(f_0) + 2q \int_{A^{(2)}} K_2(t_1, t_2)\, f_0(t_1)\, f^*(t_2)\, dt_1\, dt_2 +$$

$$+ q^2 \int_{A^{(2)}} K_2(t_1, t_2)\, f^*(t_1)\, f^*(t_2)\, dt_1\, dt_2\,,$$

(7) Il supporre in generale i nuclei simmetrici non toglie generalità al problema (Ved. Picone: *Lezioni* ..... n. 130).

e allora, essendo $\int\limits_{Q_2} K_2(t_1, t_2)\, f^*(t_1)\, f^*(t_2)\, dt_1\, dt_2 > 0$, se q è sufficientemente piccolo e di segno opportuno si ottiene

$$P(f_0 + q f^*) > P(f_0) \quad \text{e} \quad \int\limits_A [f_0(t) + q f^*(t)]^2\, dt \leq \delta^2 .$$

Sicchè è assurdo supporre $f_0(t)$ interno a Γ_δ; analogamente per il caso che K_2 sia definito negativo.

Osservazione III: Si osservi che nel caso particolare che i K_i $(i = 1, 3, 4, \ldots, n)$ siano *elementari* si può sostituire all'ipotesi che K_2 sia definito positivo [negativo] quella che sia *semi-definito* positivo [negativo]; ma allora non si esclude che il massimo [minimo] sia assunto anche all'interno di Γ_δ. Infatti in questo caso si può imporre alla $f^*(t)$ l'ulteriore condizione di essere ortogonale anche a $f_0(t)$; allora risulta

$$\int\limits_A [f_0(t) + q f^*(t)]^2\, dt = \int\limits_A f_0^2(t)\, dt + q^2 \int\limits_A f^{*2}(t)\, dt$$

ed è quindi possibile trovare un valore di q, di segno opportuno, tale che sia

$$P(f_0 + q f^*) \geq P(f_0) \quad [P(f_0 + q f^*) \leq P(f_0)]$$

e $\int\limits_A [f_0(t) + q f^*(t)]^2\, dt = \delta^2$.

2. - Nuove condizioni sufficienti. – Mediante un diverso tipo di considerazioni dirette è possibile arrivare a nuovi risultati. Dimostriamo anzitutto il seguente

Lemma: *Se $f_0(t)$ è una estremante per $P(f)$ in Γ_δ e verifica la*

3 *

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{n} i\, P_i(f_0) \neq 0$$

allora $f_0(t)$ *si trova su* $F\Gamma_\delta$.

Infatti sia ad es. $f_0(t)$ massimante di Γ_δ e supponiamo per assurdo che sia interna a Γ_δ; per la (4), il polinomio nella variabile c

$$\gamma(c) = \sum_{i=1}^{n} P_i(f_0)\, c^i$$

ha derivata prima $\neq 0$ per $c = 1$, sicchè, per c sufficientemente vicino a 1 e > 1 o < 1 a seconda del segno di $\sum_{i=1}^{n} i\, P_i(f_0)$, sarà

$$\gamma(c) = P(cf_0) > \gamma(1) = P(f_0)\,.$$

Ma per c sufficientemente vicino a 1, $cf_0(t)$ appartiene ancora a Γ_δ, sicchè è assurdo supporre $f_0(t)$ interna a Γ_δ.

Osservazione: Si osservi che in sostanza il ragionamento si basa sul fatto che $\gamma(c)$ è nel punto $c = 1$ crescente o decrescente, sicchè la (4) può essere sostituita appunto con l'ipotesi più generale che $\gamma(c)$ *sia per* $c = 1$ *crescente o decrescente*.

Segue dal lemma precedente il

Teorema III.: *Supponiamo che si possa scomporre l'insieme* A *in due famiglie disgiunte di sottoinsiemi a due a due disgiunti,* $\{A_+\}$ *e* $\{A_-\}$, *in modo che quasi dappertutto nella porzione di* $A^{i)}$ *ottenuta come prodotto topologico di un numero* i *di sottoinsiemi appartenenti alle famiglie* $\{A_+\}$ e $\{A_-\}$, $K_i(t_1, \dots, t_i)$ $(i = 1, \dots, n)$ *sia* ≥ 0 *oppure* < 0 *secondo che il numero degli* A_- *che concorrono nel detto prodotto topologico è pari* (8) *o dispari; supponiamo inoltre che uno almeno dei* K_i *non sia* $\doteq 0$ *in* $A^{(i)}$; *allora il massimo di* $P(f)$ *in* Γ_δ *è assunto su* $F\Gamma_\delta$ *e solo su* $F\Gamma_\delta$.

(8) Intenderemo pari anche lo zero.

Infatti si osservi che a ogni funzione $f(t)$ di Γ si può associare la funzione $f^*(t)$ definita come segue

$$f^*(t) = |f(t)| \qquad \text{sugli insiemi} \quad A_+$$
$$f^*(t) = -|f(t)| \qquad \text{»} \qquad \text{»} \quad A_- .$$

Per le ipotesi fatte sui K_i risulta quasi-dappertutto in $A^{(i)}$

(5) $$K_i(t_1, \dots, t_i)\, f^*(t_1) \dots f^*(t_i) \geq 0$$
$$K_i(t_1, \dots, t_i)\, f^*(t_1) \dots f^*(t_i) \geq K_i(t_1, \dots, t_i)\, f(t_1) \dots f(t_i)$$
$$(i = 1, \dots, n) ,$$

sicchè è $P(f^*) \geq P(f)$. Sia allora $f_0(t)$ una massimante di $P(f)$ in Γ_δ: anche la funzione associata $f_0^*(t)$ è massimante e per le (5), in virtù anche del fatto che uno almeno dei K_i non è $\simeq 0$, risulta verificata su di essa la (4); perciò $f_0^*(t)$ appartiene a $F\Gamma_\delta$; ma allora vi appartiene anche $f_0(t)$, poichè

$$\int_A f_0^2(t)\, dt = \int_A f_0^{*2}(t)\, dt .$$

Si osservi, come esempio notevole, che le ipotesi sul segno dei K_i sono certo verificate se risulta

$$K_i(t_1, \dots, t_i) = \varphi(t_1) \dots \varphi(t_i) \quad H_i(t_1, \dots, t_i) \ (i = 1, \dots, n) ,$$

dove $\varphi(t)$ è una funzione definita in A e le H_i sono funzioni definite e non negative in $A^{(i)}$.

Il teorema III si enuncia per il *minimo* anzichè per il massimo quando i *nuclei* $K_i (i = 1, \dots, n)$ *si ottengono dai precedenti moltiplicandoli per* -1.

TEOREMA IV. - *Se i nuclei* $K_i (i = 1, \dots, n)$ *si ottengono da quelli considerati nel teorema* III *moltiplicandoli rispettivamente per* $(-1)^i$, *allora il massimo di* $P(f)$ *è assunto ancora su* $F\Gamma_\delta$ *e solo su* $F\Gamma_\delta$.

Basta infatti nella dimostrazione del teorema III definire come segue la funzione $f^*(t)$:

$$f^*(t) = |f(t)| \qquad \text{sugli insiemi} \quad A_-$$
$$f^*(t) = -|f(t)| \qquad » \quad » \quad A_+ .$$

Anche ora *un teorema analogo si enuncia per il minimo.*
Un' altra conseguenza del lemma iniziale è il

TEOREMA V. - *Se i nuclei K_i per i dispari sono nulli e per i pari sono semidefiniti positivi [negativi]* (9) *e non tutti $\simeq 0$, allora il massimo [minimo] di $P(f)$ è assunto su $F\Gamma_\delta$ e solo su $F\Gamma_\delta$.*

Infatti si osservi che $P(f)$ è sempre ≥ 0 $[\leq 0]$ e che, essendo escluso il caso banale che ogni K_i sia $\simeq 0$, il massimo di $P(f)$ in Γ_δ è certo > 0 $[< 0]$ (10). Ne segue che se $f_0(t)$ è massimante [minimante], uno almeno dei $P_i(f_0)$ è > 0 $[< 0]$ e gli altri ≥ 0 $[\leq 0]$ sicchè è pure > 0 $[< 0]$ la somma $\sum_{i=1}^{n} i\, P_i(f_0)$.

3. - Le equazioni di Eulero. - Giungeremo ora a nuovi criteri mediante considerazioni indirette, che ricorrono all'equazione di Eulero di $P(f)$.

Supporremo d'ora innanzi che i nuclei K_i siano *simmetrici* ciò che, com'è noto (11), non toglie generalità al problema; allora è pure noto (12) che *ogni estremante di $P(f)$ in Γ_δ verifica quasidappertutto in A l'equazione integrale*

$$(6) \qquad K_1(t) + \sum_{i=2}^{n} i \int_{A^{(i-1)}} K_i(t, t_2, \ldots, t_i)\, f(t_2) \ldots f(t_i)\, dt_2 \ldots dt_i = \mu\, f(t)$$

dove μ denota un'opportuna costante che è certamente nulla se l'estremante $f(t)$ è interna a Γ_δ.

(9) Ciò significa che $P_i(f)$ è sempre ≥ 0 $[\leq]$ per ogni $f(t)$ di Γ.

(10) Ved. PICONE: *Lezioni* ...., n. 132.

(11) Ved. PICONE: *Lezioni* ...., n. 130.

(12) Ved. PICONE: *Lezioni* ...., n 135.

È opportuno studiare le condizioni di esistenza e di unicità dell'equazione di prima specie

$$(7) \qquad K_1(t) + \sum_{i=2}^{n} i \int_{A^{(i-1)}} K_i(t, t_2, \dots, t_i)\, f(t_2) \dots f(t_i)\, dt_2 \dots dt_i = 0 .$$

Nel caso $n = 2$ (l'equazione è allora lineare) esse sono date dal classico teorema di E. PICARD e dai lavori di G. LAURICELLA [13]. Ma per $n > 2$ non mi risulta l'esistenza di studi in proposito, se si eccettuano due lavori di N. SMIRNOFF [14], in cui vengono studiati mediante l'integrale di FOURIER casi assai particolari.

Prenderò qui in considerazione dapprima il caso dei *nuclei elementari*:

$$(8) \qquad K_i(t_1, t_2, \dots, t_i) = \sum_{r=1}^{r_i} H_{r,1}^{(i)}(t_1)\, H_{r,2}^{(i)}(t_2) \dots H_{r,i}^{(i)}(t_i) \qquad (i = 1, \dots, n)$$

dove potremo supporre, senza ledere evidentemente la generalità, che le funzioni $H_{rj}^{(i)}(t)$ $(i = 2, 3, \dots, n\,;\ r = 1, \dots, r_i\,;\ j = 2, 3, \dots, i)$ siano linearmente indipendenti in A [15] e costituiscano un sistema ortonormale.

(13) E. PICARD: *Sur un théorème général relatif aux équationes intégrales de première espèce et sur quelques problèmes de phisique-mathématique* [Rend. Circolo Mat., Palermo 29 - 1910 - 1° sem.]; G. LAURICELLA: *Sull' equazione integrale di prima specie* [Rend. Acc. Lincei (4) - vol. XVIII - 1909, 2° sem. - pp. 71–77].

(14) N. SMIRNOFF: 1) *Sur l'application de l'intégrale de Fourier aux équations intégrales non linéaires* [Comptes Rendus Acad. Sci. U. R. S. S. - 19 - 1938 - pp. 3–7]; 2) *Sur l'application des séries de Fourier à la résolution des équations intégrales et intégro différentielles* [Bull. Acad. Sci. U. R. S. S., Ser. Math. - 1939 - pp. 413–416]. Dai risultati di SMIRNOFF potrebbero trarsi alcune immediate considerazioni, che ritengo sufficiente aver sòlo segnalato, anche per il problema dell'ubicazione delle estremanti di $P(f)$ in Γ_δ.

(15) Intenderemo qui e nel seguito l'indipendenza e la dipendenza lineare nel senso della metrica di HILBERT, cioe indipendenza o dipendenza lineare globale o in media.

In questo caso si dimostra facilmente che *condizione necessaria e sufficiente perchè la* (7) *ammetta soluzioni di quadrato sommabile in A è che la funzione $K_1(t)$ sia combinazione lineare in A delle funzioni $H^{(i)}_{r,1}(t)$ $(i = 2, 3, \ldots, n;$ $r = 1, \ldots, r_i)$.*

Infatti se la (7) è verificata dalla funzione $f(t)$ si ha quasidappertutto in A:

$$(9) \qquad K_1(t) + 2\sum_{r=1}^{r_2} H^{(2)}_{r,1}(t)\int_A H^{(2)}_{r,2}(t_2)\, f(t_2)\, dt_2 + \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + n\sum_{r=1}^{r_n} H^{(n)}_{r,1}(t)\int_A H^{(n)}_{r,2}(t_2)\, f(t_2)\, dt_2 \ldots \int_A H^{(n)}_{r,n}(t_n)\, f(t_n)\, dt_n = 0$$

e dunque $K_1(t)$ è combinazione lineare in A delle suddette funzioni.

Viceversa se $K_1(t)$ è combinazione lineare in A delle suddette funzioni, esistono delle costanti $c^{(i)}_r$ $(i = 2, \ldots, n;\ r = 1, \ldots, r_i)$ per cui risulta quasidappertutto in A

$$K_1(t) + 2\sum_{r=1}^{r_2} c^{(2)}_r H^{(2)}_{r,1}(t) + \ldots + n\sum_{r=1}^{r_n} c^{(n)}_r H^{(2)}_{r,1}(t) = 0\,.$$

E allora la (9), cioè la (7), è risolta se esiste una funzione di quadrato sommabile in A soluzione del sistema di equazioni integrali

$$\left\{ c^{(i)}_r = \int_A H^{(i)}_{r,2}(t_2)\, f(t_2)\, dt_2 \cdot \int_A H^{(i)}_{r,3}(t_3)\, f(t_3)\, dt_3 \ldots \int_A H^{(i)}_{r,i}(t_i)\, f(t_i)\, dt_i \right.$$

$$(i = 2, 3, \ldots, n;\ r = 1, 2, \ldots, r_i)\,.$$

A questo sistema possiamo sostituire il sistema

$$
(10)\left\{\begin{aligned}
&\pm \sqrt[i]{|c_r^{(i)}|} = \int_A H_{r,2}^{(i)}(t)\, f(t)\, dt\,;\ \pm \sqrt[i]{|c_r^{(i)}|} = \\
&= \int_A H_{r,3}^{(i)}(t)\, f(t)\, dt\,; \ldots\ldots; \pm \sqrt[i]{|c_r^{(i)}|} = \int_A H_{r,i}^{(i)}(t)\, f(t)\, dt \\
&\qquad (i = 2, 3, \ldots, n\,;\ r = 1, 2, \ldots, r_i)
\end{aligned}\right.
$$

dove i radicali vanno presi con segno positivo o negativo in modo che per ogni i $(i = 2, \ldots, n)$ e r $(r = 1, \ldots, r_i)$ il prodotto dei radicali corrispondenti sia uguale a $c_r^{(i)}$.

Ora il sistema è certo risolubile in Γ, in virtù del teorema di Fischer-Riesz. Ne segue che anche la (9) è risolubile in Γ.

Si può anzi dire di più che essa ammetterà infinite soluzioni perchè. se $f_0(t)$ è soluzione, lo è pure $f_0(t) + f^*(t)$, dove $f^*(t)$ è una qualunque funzione ortogonale alle funzioni $H_{r,j}^{(i)}(t)$ $(i = 2, 3, \ldots, n\,;\ r = 1, 2, \ldots, r_i\,;\ j = 2, 3, \ldots, i)$.

Da questa condizione necessaria e sufficiente ricaviamo subito un criterio per stabilire quando le estremanti di $P(f)$ in Γ_δ si trovino, nel caso dei nuclei elementari, esclusivamente su $F\Gamma_\delta$. Precisamente :

Teorema VI. - *Se i nuclei K_i $(i = 1, \ldots, n)$ sono dati dalle* (8) *e $K_1(t)$ è linearmente indipendente in A dalle funzioni $K_{r,1}^{(i)}(t)$ $(i = 2, \ldots, n\,;\ r = 1, \ldots, r_i)$ allora il massimo e il minimo di $P(f)$ in Γ_δ sono assunti su $F\Gamma_\delta$ e solo su $F\Gamma_\delta$.*

Un altro criterio particolare può ottenersi ricorrendo ancora alla (7).

Prendiamo in considerazione l'equazione

$$
(11)\quad K_1(t) + n \int_{A^{(n-1)}} K_n(t, t_2, \ldots, t_n)\, f(t_2) \ldots f(t_n)\, dt_2 \ldots dt_n = 0
$$

e cerchiamo condizioni necessarie perchè essa ammetta quasi-dappertutto in A soluzioni di quadrato sommabile in A. Se $\{\varphi_s(t)\}$ $(s = 1, 2, \ldots)$ è un sistema completo di funzioni linearmente indipendenti in A, moltiplicando la (11) per $\varphi_s(t)$ ($s = 1, 2, \dots$) e integrando su A, otteniamo

$$(12) \quad n \int_{A^{(n)}} K_n(t, t_2, \dots, t_n)\, \varphi_s(t)\, f(t_2) \dots, f_n(t_n)\, dt\, dt_2 \dots dt_n = = -\int_A K_1(t)\, \varphi_s(t)\, (dt) = a_s$$

cioè, posto

$$u_s(t_2, \dots, t_n) = n \int_A K_n(t, t_2, \dots, t_n)\, \varphi_s(t)\, dt ,$$

$$(13) \quad \int_{A^{(n-1)}} u_s(t_2, \dots, t_n)\, f(t_2) \dots f(t_n)\, dt_2 \dots dt_2 = a_s \quad (s = 1, 2, \dots) .$$

Se le funzioni $u_s(t_2, \dots, t_n)$ ($s = 1, 2, \dots$) non sono linearmente indipendenti in $A^{(n-1)}$, otteniamo subito delle condizioni necessarie per l'esistenza di soluzioni di quadrato sommabile in A della (11); precisamente, se $u_1, \dots, u_{\nu-1}$ sono linearmente indipendenti in $A^{(n-1)}$, mentre $u_1, \dots, u_{\nu-1}, u_\nu$ sono linearmente dipendenti in $A^{(n-1)}$, allora vale in $A^{(n-1)}$ una relazione del tipo

$$\sum_{k=1}^{\nu} \gamma_k u_k(t_2, \dots, t_n) \simeq 0$$

con le γ_k costanti non tutte nulle e quindi dovrà pure essere con le stesse γ_k

$$(\alpha) \quad \sum_{k=1}^{\nu} \gamma_k a_k = 0 .$$

Si ottengono così delle relazioni come la (α), il cui complesso indicheremo come *condizione necessaria* $[\alpha]$.

Soddisfatta questa condizione e soppresse dalla successione $\{u_s\}$ quelle funzioni che, come la u_ν, dipendono linearmente in $A^{(n-1)}$ dalle precedenti, potremo ortonormalizzare il sistema delle $\{u_s\}$ applicando il ben noto procedimento. Otterremo così un sistema ortonormale di funzioni $\{v_s(t_2,\ldots, t_n)\}$ linearmente indipendenti in $A^{(n-1)}$, che si esprimeranno mediante le u_s:

$$v_1 = \alpha_1 u_1 \,,\; v_2 = \alpha_2 u_1 + \alpha_3 u_2 \,,\; v_3 = \alpha_4 u_1 + \alpha_5 u_2 + \alpha_6 u_3 ,\ldots$$

Le (13) ci permettono perciò di scrivere

$$\int_{A^{(n-1)}} v_1(t_2,\ldots, t_n) f(t_2)\ldots f(t_n)\, dt_2,\ldots dt_n = \alpha_1 a_1 = c_1$$

$$\int_{A^{(n-1)}} v_2(t_2,\ldots, t_n) f(t_2)\ldots f(t_n)\, dt_2\ldots dt_n = \alpha_2 a_1 + \alpha_3 a_2 = c_2$$

. . . .

e le $c_1, c_2,\ldots$ risultano evidentemente, attese le (12), costanti *note* attraverso K_1, K_n e il sistema $\{\varphi_s\}$; esse sono i coefficienti di Fourier della funzione $f(t_2)\ldots f(t_n)$, che è di quadrato sommabile in $A^{(n-1)}$ rispetto al sistema ortonormale $\{v_s\}$; sicchè otteniamo una *nuova condizione necessaria*, e precisamente: *se la* (11) *ammette soluzioni di quadrato sommabile in* A, *deve essere convergente la serie* $\sum_{s=1}^{\infty} c_s^2$.

Il ragionamento ora fatto ci dice poi anche che, se è verificata la condizione [α], se la serie $\sum_{s=1}^{\infty} c_s^2$ converge e se il sistema delle $\{v_s\}$ è completo in $A^{(n-1)}$ *la* (11) *ha al più una sola soluzione di quadrato sommabile in* A.

Infatti due eventuali soluzioni $f(t)$ e $f^*(t)$ sarebbero tali che le due funzioni $f(t_2) f(t_3)\ldots f(t_n)$ e $f^*(t_2) f^*(t_3)\ldots f^*(t_n)$ avrebbero gli stessi coefficienti di Fourier rispetto al sistema completo $\{v_s\}$ e perciò sarebbe in $A^{(n-1)}$ $f(t_2) f(t_3)\ldots f(t_n) \simeq \simeq f^*(t_2) f^*(t_3)\ldots f^*(t_n)$, da cui necessariamente $f(t) \simeq f^*(t)$ in A.

Possiamo ora ricavare da queste considerazioni il seguente:

Teorema VII. - *Se risulta* $P(f) = P_1(f) + P_n(f)$ *e se, costruite le funzioni* u_s *e* v_s *e le costanti* c_s $(s = 1, 2, \ldots.)$ *col procedimento surriferito, non è soddisfatta la condizione* [α] *oppure è divergente la serie* $\sum_{s=1}^{\infty} c_s^2$, *allora le estremanti di* $P(f)$ *in* Γ_δ *si trovano tutte su* $F\,\Gamma_\delta$. *Se invece è soddisfatta la condizione* [α] *e la serie* $\sum_{s=1}^{\infty} c_s^2$ *converge, ma il sistema delle funzioni* $\{v_s\}$ *è completo in* $A^{(n-1)}$, *allora al più un'estremante di* $P(f)$ *in* Γ_δ *è interna a* Γ_δ.

Daremo ora un ultimo teorema sull'ubicazione delle estremanti di $P(f)$ in Γ_δ, la cui dimostrazione fa pure ricorso all'equazione di Eulero (7), sfruttando però con iderazioni diverse da quelle dei teoremi precedenti.

Teorema VIII. - *Si indichino con* $t_1^{(1)}, \ldots, t_1^{(n)}$ *le coordinate del punto variabile in* A *e si supponga che* A *sia di misura finita e che esista in* A *un sottoinsieme* ω *aperto tale che la derivata* $\frac{\partial K_1}{\partial t_1^{(1)}}$ *esista in* ω *e le derivate* $\frac{\partial K_i}{\partial t_1^{(1)}}$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$ *esistano e siano limitate rispettivamente negli insiemi* $\omega \times A^{(i-1)}$ $(i = 2, \ldots n)$, *in modo che detto* M_i *l'estremo superiore di* $\left|\frac{\partial K_i}{\partial t_1^{(1)}}\right|$ *nell'insieme* $\omega \times A^{(i-1)}$ $(i = 2, \ldots, n)$, *risulti in* ω:

$$(14) \qquad \left|\frac{\partial K_1}{\partial t_1^{(1)}}\right| - \sum_{i=2}^{n} i\, M_i (\delta \sqrt{mis\, A})^i > 0\,;$$

allora il massimo e il minimo da $P(f)$ *in* Γ_δ *sono assunti su* $F\,\Gamma_\delta$ *e solo su* $F\,\Gamma_\delta$.

Infatti l'equazione (7) non ha in questo caso soluzioni appartenenti a Γ_δ, perchè in caso contrario, detto P^* un punto, certo esistente, di ω in cui essa è verificata, potremmo derivare rispetto a $t_1^{(1)}$ il suo primo membro nel punto P^*, in virtù dell'ipotesi fatte, e, per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale, otterremmo nel detto punto

$$\frac{\partial K_1}{\partial t_1^{(1)}} + \sum_{i=2}^{n} i \int_{A^{(i-1)}} \frac{\partial K_i}{\partial t_1^{(1)}} f(t_2) \ldots . f(t_i)\, dt_2 \ldots . dt_i = 0 \, .$$

D'altra parte nel punto P^*, per la (14), risulta se è $\frac{\partial K_1}{\partial t_1^{(1)}} > 0$:

$$\frac{\partial K_1}{\partial t_1^{(1)}} + \sum_{i=2}^{n} i \int_{A^{(i-1)}} \frac{\partial K_i}{\partial t_1^{(1)}} f(t_2) \ldots . f(t_i)\, dt_2 \ldots . dt_i \geq$$

$$\geq \frac{\partial K_1}{\partial t_1^{(1)}} - \sum_{i=2}^{n} i \int_{A^{(i-1)}} M_i \,|\, f(t_2) \,| \ldots . |\, (f(t_i) \,|\, dt_2 \ldots \; dt_i \geq$$

$$\geq \frac{\partial K_1}{\partial t_1^{(1)}} - \sum_{i=2}^{n} i \, M_i (\delta \sqrt{mis\, A})^i > 0 \, ,$$

poichè per la disuguaglianza di Schwarz, è

$$\int_A | f(t) \,|\, dt \leq \left\{ \int_A f^2 (t)\, dt \cdot mis\, A \right\}^{1/2} \leq \delta \sqrt{mis\, A} \, ;$$

analogamente se è $\frac{\partial K_1}{\partial t_1^{(1)}} < 0$ in P^*, risulta

$$\frac{\partial K_1}{\partial t_1^{(1)}} + \sum_{i=2}^{n} i \int_{A^{(i-1)}} \frac{\partial K_i}{\partial t_1^{(1)}} f(t_2) \ldots . f(t_i)\, dt_2 \ldots . dt_i \leq$$

$$\leq \frac{\partial K_i}{\partial t_1^{(1)}} + \sum_{i=2}^{n} i \, M_i (\delta \sqrt{mis\, A})^i < 0 \, .$$

Di qui l'assurdo, per la (14).

4. - La legge di reciprocità. - Il problema principale di cui ci siamo finora occupati è stato in sostanza, in virtù del teorema di FICHERA citato nell' introduzione sugli estremi superiore e inferiore di $P(f)$ in $F\Gamma_\delta$, quello di dimostrare, quando è possibile, l' esistenza del massimo o del minimo del funzionale $P(f)$ tra tutte le funzioni di Γ che danno a un altro funzionale, $Nf = \int_A f^2(t), dt$, un valore costante δ^2.

Introdotta in Γ la metrica di FRÉCHET, $P(f)$ risulta, come si è già ricordato, un funzionale continuo in Γ_δ. Che si può dire dell'altro funzionale Nf? È facile dimostrare che *Nf è semi-continuo inferiormente (nella metrica di Fréchet) su ogni elemento di* Γ.

Sia infatti $f^*(t)$ una funzione fissata di Γ le cui coordinate, riferite al solito sistema ortonormale e completo in A $\{\varphi_s(t)\}$, siano $x_1^*, x_2^*, \ldots.$

Si sa che è $Nf^* = \sum_{s=1}^{\infty} x_s^{*2}$. Preso dunque $\varepsilon > 0$ ad arbitrio esiste un m tale che $\sum_{s=m+1}^{\infty} x_s^{*2} < \frac{\varepsilon}{2}$. Si determini allora $\rho > 0$ in modo che, se $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sono numeri reali soddisfacenti alle $|x_1 - x_1^*| \leq \rho ; \ldots, |x_m - x_m^*| \leq \rho$, sia $\left| \sum_{s=1}^{m} (x_s^2 - x_s^{*2}) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Allora per tutte le funzioni $f(t) \equiv \{x_s\}$ di Γ le cui prime m coordinate soddisfano alle $|x_1 - x_1^*| \leq \rho, \ldots |x_m - x_m^*| \leq \rho$, risulta

$$Nf - Nf^* = \sum_{s=1}^{\infty} x_s^2 - \sum_{s=1}^{\infty} x_s^{*2} = \sum_{s=1}^{m} (x_s^2 - x_s^{*2}) + \sum_{s=m+1}^{\infty} x_s^2 -$$

$$- \sum_{s=m+1}^{\infty} x_s^{*2} \geq \sum_{s=1}^{m} (x_s^2 - x_s^{*2}) - \sum_{s=m+1}^{\infty} x_s^{*2} > - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = - \varepsilon .$$

In particolare dunque per tutte le funzioni $f(t)$ di Γ che distano (con la metrica di Fréchet) da $f^*(t)$ per meno di $\frac{1}{m!}\frac{\rho}{1+\rho}$ [16] è soddisfatta la $Nf - Nf^* > -\varepsilon$. Dunque Nf è semicontinuo inferiormente su $f^*(t)$ [17].

Ne scende per un noto teorema di Fréchet che *Nf ammette minimo su ogni insieme chiuso e compatto di Γ.*

Questa semplice osservazione permette di porre in relazione il nostro problema di partenza con un nuovo problema di minimo isoperimetrico, mediante la «legge di reciprocità» (ben nota per i problemi isoperimetrici) che mi sembra opportuno metter in rilievo esplicitamente nel nostro caso.

Si osservi anzitutto che per la continuità di $P(f)$, il sottoinsieme di Γ_δ in cui $P(f)$ assume un dato valore P^* è chiuso. Sicchè se K è un insieme chiuso e compatto di Γ_δ il sottoinsieme K_{P^*} di K in cui $P(f)$ assume il valore P^* è chiuso e compatto e quindi in esso $N(f)$ ammette minimo.

*La **legge di reciprocità** si può allora enunciare dicendo che se questo minimo è funzione sempre crescente (oppure sempre decrescente) di P^*, allora ogni funzione $f_0(t)$ minimante per Nf in K_{P^*} è massimante (oppure minimante) per $P(f)$ nel sottoinsieme di K in cui Nf assume il valore Nf_0.*

Infatti supposto per es. il detto minimo funzione crescente di P^*, allora, se $f_1(t)$ è una funzione di K per cui $P(f_1) > P^*$, risulterà certo $Nf_1 > Nf_0$, poichè il minimo di Nf nel sottoinsieme di K per cui è $P(f) = P(f_1)$ è, per l'ipotesi fatta, maggiore di Nf_0. Sicchè per ogni funzione di K per cui è $Nf = Nf_0$, deve essere $P(f) \leq P(f_0)$.

Come si vede, la legge di reciprocità può servire per ripor-

(16) Infatti risulta $\frac{1}{s!}\frac{|x_s - x_s^*|}{1+|x_s - x_s^*|} \leq \sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s!}\frac{|x_s - x_s^*|}{1+|x_s - x_s^*|} \leq \frac{1}{m!}\frac{\rho}{1+\rho}$ e quindi per $s = 1, \ldots m$, $|x_s - x_s^*| \leq \rho$.

(17) Si osservi che dalla dimostrazione stessa risulta che Nf è semicontinuo inferiormente anche se in Γ si introduce la metrica di Hilbert o di Lagrange.

tare il problema iniziale ad un nuovo problema di minimo. E in alcuni casi la sua applicazione può risultare semplice. Vediamone a puro titolo d'esempio [18] il seguente caso.

Con il solito significato del simboli sia

$$P(f) = \sum_{i=1}^{n} P_i(f) \quad \text{e} \quad P_i(f) = \sum_{r=1}^{\infty} a_r^{(i)} x_r^{(i)}$$

con gli $a_r^{(i)}$ *positivi* e tali che converga la serie $\sum_{r=1}^{\infty} (a_r^{(i)})^2$.

È chiaro che volendo studiare l'ubicazione del massimo di $P(f)$ in Γ_δ basterà limitarsi a considerare il sottoinsieme $K(\delta)$ di Γ_δ delle funzioni le cui coordinate $\{x_s\}$ sono tutte ≥ 0. Questo sottoinsieme è ovviamente (colla metrica di FRÉCHET) chiuso e compatto.

Si consideri ora l'intervallo H dei valori P che $P(f)$ assume al variare di $f(t)$ in $K(\delta)$; siano P' e P'' due valori di H con $P' < P''$; a siano $K_{P'}(\delta)$ e $K_{P''}(\delta)$ i sottoinsiemi di $K(\delta)$ in cui $P(f)$ assume rispettivamente i valori P' e P''; indichiamo con N' e N'' il minimo di Nf in $K_{P'}(\delta)$ e $K_{P''}(\delta)$.

Per applicare la legge di reciprocità facciamo vedere che è $N'' > N'$; e infatti, se $f_2(t) \equiv \{x_{2,s}\}$ è una funzione minimante per Nf in $K_{P''}(\delta)$, si può ottenere da $f_2(t)$ una funzione $f_1(t)$ di $K_{P'}(\delta)$, diminuendo opportunamente alcune delle sue coordinate, cosicchè risulterà $Nf_1 < N''$; e a maggior ragione dunque $N' < N''$. Ed è anche immediato dimostrare che se P'' tende a P' anche N'' tende a N' (e se P' tende a P'', N' tende a N''), cosicchè il minimo di Nf in $K_p(\delta)$, è funzione continua e crescente di P in H.

Possiamo dunque concludere che $P(f)$ per ogni $\delta_1 \leq \delta$ (e quindi per ogni δ_1, essendo δ qualunque) ammette in $F\Gamma_{\delta_1}$ il massimo, il quale è pure il massimo di $P(f)$ in Γ_{δ_1}.

[18] Difatti questo caso si studia in modo ovvio e rapido anche direttamente.

5. - I polinomiali come funzionali di linea. - Soffermiamoci ora sul caso in cui l'insieme A sia un intervallo (a, b). Allora poichè $f(t)$ è sommabile in A possiamo porre $y(t) = \int_a^t f(z)\,dz$; $P(f)$ diventa dunque un funzionale di linea, che indicheremo con $I(y)$. Il problema di cui ci siamo occupati si esprime ora come ricerca degli eventuali massimi e minimi di $I(y)$ della classe $F\Gamma_\delta$ delle curve $y = y(t)$ $(a \leq t \leq b)$ con $y(t)$ assolutamente continua in (a, b), per cui $y(a) = 0$ e che dànno al funzionale $J(y) = \int_a^b y'^2(t)\,dt$ il valore δ^2. Esso è dunque un problema isoperimetrico del Calcolo delle Variazioni per i *funzionali di linea.*

Sotto questo punto di vista, nel caso del polinomiale quadratico, esso è stato appunto trattato dal Tonelli, mediante il suo « metodo diretto ».

Introdotta la metrica lagrangiana di ordine zero ([19]) nello spazio $y(t)$, si dimostra facilmente, seguendo il ragionamento fatto dal Tonelli per $n = 2$, che ogni polimoniale $I(y)$ è, anche con questa metrica, uniformemente continuo nella sfera di Hilbert Γ_δ, cioè nell'insieme delle funzioni $y(t)$ assolutamente continue in (a, b) tali che $y(a) = 0$ e $J(y) \leq \delta^2$.

Il metodo del Tonelli consiste allora, come è noto ([20]), nel considerare ([21]) una successione di funzioni massimante [minimante] per $I(y)$ in $F\Gamma_\delta$ e da essa estrarre, come è possibile in virtù del fatto che le funzioni soddisfano alla relazione $J(y) = \delta^2$ ([20]), una successione $\{y_r(t)\}$ $(r = 1, 2, \ldots)$ che con-

([19]) La distanza di due funzioni $y(t)$ e $y^*(t)$ è data dal $\max\limits_{(a,b)} |y(t) - y^*(t)|$.

([20]) Si veda per es. il luogo citato in ([3]) n. 4; oppure i *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni.* - Bologna 1921-23 del Tonelli, vol II, pagine 553-555.

([21]) Si riconosce anzitutto subito in questo caso, usando della disuguaglianza di Schwarz, che gli estremi inferiore o superiore di $I(y)$ in $F\Gamma_\delta$ sono finiti.

verga uniformemente in (a, b) a una funzione limite $y_0(t)$ assolutamente continua.

Per la continuità di $I(y)$ si ha allora $\lim_{r \to \infty} I(y_r) = I(y_0)$; d'altra parte l'uniforme convergenza della $\{ y_r(t) \}$ e le relazioni $J(y_r) = \delta^2$ non assicurano che sia pure $J(y_0) = \delta^2$, ma solo, in virtù della semicontinuità inferiore di $J(y)$, che è $J(y_0) \leq \delta^2$. Si tratta quindi anche ora di vedere in quali casi si può essere certi che $y_0(t)$ appartenga a $F\Gamma_\delta$; e per ciò si possono applicare i ragionamenti dei numeri precedenti e anche *ragionamenti di carattere più particolare, legati al fatto che l'insieme A è ora un intervallo di retta* (così per es. il teorema VIII si può ottenere direttamente con semplici integrazioni per parti, senza ricorrere alla equazione di EULERO).

6. - Applicazioni alle equazioni integrali non lineari. - Dai risultati ottenuti possiamo ricavare alcune applicazioni alle equazioni integrali non lineari. Si è già ricordato che ogni estremante di $P(f)$ in Γ_δ soddisfa all'equazione integrale (6), dove μ è una costante opportuna che è certo nulla se l'estremante è interna a Γ_δ, mentre se essa è su $F\Gamma_\delta$ può essere $= 0$ oppure $\neq 0$.

Già si sono visti nel n. 3 alcune considerazioni e risultati sul problema dell'esistenza e dell'unicità delle soluzioni di quadrato sommabile della equazione di prima specie (7), cioè nel caso $\mu = 0$.

Ma interessa anche sapere in quali casi si può essere certi che μ è $\neq 0$, così da ricavarne l'esistenza di almeno un autovalore λ (e di una rispettiva autosoluzione di quadrato sommabile) per l'equazione integrale di seconda specie

$$(15) \qquad \lambda K_1(t) + \\ + \lambda \sum_{i=2}^{n} i \int_{A^{(i-1)}} K_i(t, t_2, \ldots, t_i) f(t_2) \ldots\ldots f(t_i)\, dt_2 \ldots\, dt_i = f(t)$$

la quale è non lineare se n è > 2.

L'esistenza di almeno un autovalore per la (15) è immediata nel caso del polinomiale omogeneo [22] e del polinomiale

[22] Ved M. PICONE: *Lezioni .....*, n. 139.

quadratico [23], se si esclude il caso banale che il polinomiale si riduca alla costante nulla.

Essa si può stabilire anche in altri casi, sfruttando appunto i risultati e le considerazioni dei nn. precedenti.

Così, se l'estremante $f_0(t)$ soddisfa alle ipotesi del lemma del n. 2, essa non può soddisfare alla (7), perchè altrimenti se fosse in A

$$K_1(t) + \sum_{i=2}^{n} i \int_{A^{(i-1)}} K_i(t, t_2, \ldots, t_i) f_0(t_2) \ldots, f_0(t_i)\, dt_2 \ldots dt_i = 0\,,$$

moltiplicando ambo i membri per $f_0(t)$ e integrando su A, si otterebbe $\sum_{i=1}^{n} i\, P_i(f_0) = 0$, in contraddizione con la (4).

Dunque, se *i nuclei soddisfano alle ipotesi di uno dei teoremi* III, IV, V, *esiste almeno un autovalore per la* (15).

L'esistenza di un autovalore per la (15) è anche certa ogni volta che la (7) non ammette soluzioni o ne ammette al più una appartenente a Γ_δ; *questi casi si verificano per es. nelle ipotesi dei teoremi* VI, VII e VIII.

[23] Basta pensare che se $f_0(t)$ e $f(t)$ sono due soluzioni della (7), nel caso $n = 2$, cioè dell'equazione

$$(16) \qquad K_1(t) + 2\int K_2(t, t_2) f(t_2)\, dt_2 = 0\,,$$

risulta $P(f)$ $\quad P(f_0) = \int_{A^{(2)}} K_2(t_1, t_2)\left[f(t_1) - f_0(t_1)\right]\left[f(t_2) - f_0(t_2)\right] dt_1\, dt_2 =$

$= \int_{A^{(2)}} K_2(t_1, t_2)\left[f_0(t_1) - f(t_1)\right] \cdot \left[f_0(t_2) - f(t_2)\right] dt_1\, dt_2 = P(f_0) - P(f)$ e quindi $P(f) = P(f_0)$; sicchè, escluso il caso banale che $P(f)$ sia $\equiv 0$, o solo le minimanti o solo le massimanti possono soddisfare alla (16). Questa osservazione dà dunque una nuova dimostrazione del fatto ben noto che ogni equazione integrale lineare di seconda specie a nucleo simmetrico possiede autovalori; a proposito della (6), nel caso $n = 2$, si veda anche il n. 4 della nota citata in [3] di Fichera.

Varrà la pena di osservare che non appena n è > 2, non è più vero che tutte le soluzioni dell'equazione (7) danno a $P(f)$ lo stesso valore: si pensi all'esempio dell'introduzione in cui le estremanti sono tutte interne a Γ_1 e soddisfano quindi alla (7).