

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE GRIOLI

L'opera scientifica di Ernesto Laura

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 19 (1950), p. 443-449

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1950__19__443_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1950__19__443_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1950, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

L'OPERA SCIENTIFICA DI ERNESTO LAURA

di GIUSEPPE GRIOLI (*a Padova*).

Non ho avuto la fortuna di stare a contatto con Lui; solo due conversazioni: una durante il recente congresso di Pisa, l'altra nello scorso dicembre in quella clinica di Padova ove lo aveva costretto un male crudele.

Eppure ciò è bastato a produrre in me quella stima e quel senso di affetto che ovunque accompagnano la Sua notorietà e, purtroppo, il Suo ricordo. Ho avuto subito la percezione della Sua bontà e alta dirittura morale soltanto riflettendo sull'impressione che ai primi contatti produceva in uno che ancora non lo conosceva personalmente.

Quando sono stato a trovarlo in clinica mi ha comunicato che aveva intenzione di dire due parole di presentazione alla mia prima lezione. Questo Suo affettuoso proponimento mi dava la certezza che venendo a Padova per assumere il posto che Egli lasciava per limite di età avrei trovato un'amicizia preziosa e certamente ricca di consigli.

La sorte non lo permise e sembri naturale la mia commozione mentre mi accingo modestamente a ricordare l'operosità scientifica di un Uomo col cui destino s'incontrò il mio nel momento più crudele per tutti quelli che lo avevano caro.

* * *

Non è facile riuscire entro ristretti limiti di spazio a dare un'idea della notevole mole di lavoro di ERNESTO LAURA e del Suo contributo alla sistemazione e allo sviluppo di importanti capitoli di Fisica - Matematica. Seguirò per grandi linee la Sua produzione scientifica, sorvolando su molte preziosità delle dimostrazioni.

Uno dei campi che più lo attirarono fu quello dello studio dei moti vibratorii dei corpi elastici di cui Egli si occupò in un gruppo di Memorie, considerando sia il problema delle vibrazioni di un corpo elastico omogeneo ed isotropo, sia quello della propagazione di vibrazioni all'esterno di una superficie chiusa convessa in un mezzo elastico indefinito, omogeneo ed isotropo. Per evitare la complessità degli sviluppi analitici – che fatalmente si presenta in simili questioni – Egli spesso si servì dell'algoritmo di complesso che gli permise rapidità ed eleganza.

Nel primo dei due problemi il LAURA, collegandosi ai lavori di TEDONE, LOVE, SOMIGLIANA, si pone la ricerca della forma più generale degli integrali dei moti vibratorii semplici e smorzati e osserva che la distribuzione del movimento nello spazio dipende non da un solo vettore, come nel caso delle vibrazioni armoniche semplici, bensì da due le cui componenti soddisfano ad un sistema di sei equazioni alle derivate parziali non scindibile in due sistemi in tre funzioni incognite.

Dimostra che a differenza delle vibrazioni armoniche quelle smorzate perchè possano aver luogo presuppongono una sollecitazione esterna, e stabilisce il teorema di unicità mostrando che ogni vibrazione smorzata risulta dalla sovrapposizione di due semplici con differenza di fase uguale a $\frac{\pi}{2}$.

Onde avere le espressioni delle componenti dello spostamento, della rotazione e quella della dilatazione il LAURA determina le *soluzioni caratteristiche* [cioè, aventi una determinata singolarità in un punto; *nuclei di deformazione* nel caso statico] corrispondenti a perturbazioni dovute ad una *forza concentrata* o ad un *centro di compressione* o di *dilatazione* o ad una *coppia di forze con momento* o di *rotazione attorno ad un asse*. Interessanti alcuni teoremi di media che Egli applica al caso di uno spazio indefinito, dando le condizioni di convergenza all'infinito e la precisazione del principio di HUYGHENS in relazione alla classe dei moti considerati. Considerando poi moti più generali di quelli vibratorii semplici e smorzati, il LAURA ricerca e determina la classe più generale di vibrazioni rappresentate da vettori somma di prodotti di funzioni del tempo per funzioni di posizione.

Successivamente Egli si occupa del problema di propaga-

zione all'esterno di una superficie σ chiusa e osserva che la dimostrazione della formula di KIRCHHOFF relativa all'equazione delle onde, fondandosi sull'ipotesi fisicamente inaccettabile che il moto vibratorio duri da tempo infinitamente remoto, deve ritenersi difettosa e ne dà una nuova dimostrazione supponendo invece che nell'istante attuale lo stato vibratorio interessi solamente lo spazio compreso tra σ e una certa superficie σ_1 .

Nel 1914 il LAURA inizia lo studio sistematico del problema esterno della Dinamica dei corpi elastici. Ammettendo con il LOVE la continuità dello spostamento attraverso i bordi d'onda, Egli precisa il meccanismo di propagazione all'esterno di una superficie, in un mezzo indefinito elastico, omogeneo ed isotropo, supponendo l'onda a due bordi col pensare scissa la vibrazione più generale in una longitudinale ed una trasversale e stabilendone le equazioni. Ad avvalorare lo schema proposto dimostra il teorema di unicità e fa vedere che il moto prodotto in un mezzo elastico indefinito da un centro di forza, debitamente interpretato, è in accordo con la supposta propagazione all'esterno di una superficie chiusa. Ponendosi nel caso di una superficie, σ , sferica esamina la questione di compatibilità delle condizioni imposte su σ e sui due bordi dell'onda e dimostra la possibilità dello sviluppo in serie di funzioni sferiche dello spostamento dovuto a date tensioni o velocità superficiali. Data l'importanza della questione, il LAURA ritiene opportuno ritrovare con considerazioni puramente energetiche le condizioni valide sul bordo di un'onda propagantesi in un mezzo indefinito, già ottenute [LOVE] per via cinematica. E sfruttando il teorema delle forze vive dà forma rigorosa al problema della riflessione di un treno d'onde su un ostacolo fisso. Da ricordare pure lo studio delle vibrazioni normali di una piastra immersa in un fluido indefinito. Nello studio dei problemi di propagazione il LAURA è portato a considerare particolari moti che Egli chiama *quasi liberi* i quali danno luogo, come quelli *liberi*, a spostamenti o tensioni nulle sopra σ senza, però, soddisfare alla condizione di continuità dello spostamento attraverso al bordo dell'onda. Questi moti sono periodici di tipo smorzato.

Basta questa rapida scorsa per mettere in luce come il problema vibratorio, sia quello interno come pure quello esterno, trova nella trattazione del LAURA una messa a punto completa

che apre la via ad ulteriori ricerche, specialmente sui problemi d'integrazione. Si può certamente affermare, come Egli medesimo osserva, che la posizione stessa del problema di propagazione costituisce uno dei risultati più interessanti, dato che essa costituiva uno dei punti più dubbi della teoria delle vibrazioni. Uno schema analogo regola la propagazione delle onde elettromagnetiche nel vuoto, problema di cui il LAURA si occupa nel 1936 e a proposito del quale Egli segnala l'esistenza di *vibrazioni quasi libere*. Completa un risultato del LOVE riguardante il teorema di unicità, dimostrando che ogni coppia di vettori $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ soddisfacenti alle equazioni di MAXWELL - HERTZ e alle condizioni di LOVE $[\mathbf{E} - \mathbf{H} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{H} + \mathbf{E} \wedge \mathbf{n} = 0]$ è di vettori a divergenza nulla. Studia quindi la propagazione all'esterno di una sfera.

* * *

Risultati si devono al LAURA in questioni di elasticità tridimensionale, riguardanti il problema dell'equilibrio elastico dei solidi limitati da una superficie di rotazione, Σ , e da due sezioni meridiane, σ_1 e σ_2 . Egli determina quelle distribuzioni di sforzi che danno tensioni nulle su Σ e dipendono dalla longitudine per mezzo di funzioni lineari di $\sin \vartheta$, $\cos \vartheta$. A tal proposito mostra che le corrispondenti deformazioni coincidono con quelle ottenute per distorsione da VOLTERRA e dimostra che la determinazione delle deformazioni per distorsione dei solidi di rivoluzione dipende dall'integrazione di sistemi differenziali in due variabili indipendenti di cui assegna la forma generale. Il procedimento esposto combinato con il principio di DE SAINT - VENANT ben si presta alla determinazione delle deformazioni del solido quando Σ è libera da forze e σ_1 , σ_2 sono soggette a vari tipi di sollecitazioni.

Più tardi (1933) il LAURA si occupa ancora di elasticità tridimensionale mostrando come gli elementi fondamentali [coefficiente di dilatazione cubica, rotazione locale, caratteristiche di deformazione, laplaciano, equazioni indefinite] si ottengono rapidamente in coordinate curvilinee applicando la teoria del triedro mobile nella forma che essa assume usando l'algoritmo di matrice. A tal fine dimostra che un sistema di coordinate curvilinee dello

spazio ordinario è rappresentabile a mezzo di tre vettori le cui componenti verificano un ben determinato sistema differenziale [equazioni di compatibilità] e dà le formule per il trasporto di un vettore e di un tensore.

* * *

In un gruppo di lavori il LAURA si occupa dello studio del moto di n vortici rettilinei perpendicolari ad un piano e deduce dal corrispondente sistema differenziale in forma HAMILTONIANA un nuovo sistema il quale benchè non in forma HAMILTONIANA riesce utile nella discussione di quei casi particolari di moti di n vortici in cui gli integrali noti permettono di ridurre alle quadrature il problema d'integrazione. In particolare determina il moto di quattro vortici due a due simmetrici rispetto ad un punto, quando il loro momento d'inerzia rispetto al punto è nullo. Inoltre caratterizza i quadrangoli più generali i cui vertici si possono considerare come tracce di filetti vorticosi perpendicolari al piano del quadrangolo e muovendosi rigidamente. In relazione a tale problema dimostra che lo studio della stabilità si può ricondurre a quello della discussione delle radici di un'equazione di 2° grado. In riguardo alla stabilità del moto nel caso di n filamenti vorticosi perpendicolari ad un piano invece dimostra un teorema non esaurientemente dimostrato prima dal THOMSON in base al quale il moto risulta stabile solo per $n < 7$.

* * *

Un gruppo di cinque lavori - tra gli ultimi - riguarda la teoria delle superficie flessibili ed inestendibili. Di questi, due si riferiscono al caso statico. In essi il LAURA osserva che la principale difficoltà che si presenta nel problema dell'equilibrio di una superficie pesante, flessibile ed inestendibile consiste nell'eliminazione dei moltiplicatori lagrangiani [tensioni] dal sistema delle tre equazioni di equilibrio e delle tre che assicurano l'inestendibilità e mostra come essa si può superare nel caso delle superficie sviluppabili. Tratta completamente il caso in cui si possa ritenere che la configurazione di equilibrio sia cilindrica,

oppure conica e nell'ipotesi di una superficie conica applicabile ad un settore circolare dimostra la riducibilità alle quadrature.

Gli altri tre lavori riguardano invece questioni dinamiche. Riprendendo un concetto di BELTRAMI il LAURA precisa il significato di equilibrio stabile e studia le piccole oscillazioni intorno ad una configurazione di equilibrio stabile [presupposto, cioè, con forze interne aventi il carattere di trazione]. In particolare, mediante il metodo del triedro mobile, studia il moto di una superficie conica inestendibile pesante. Riprendendo in generale il problema della Dinamica delle superficie flessibili ed inestendibili e adoperando il metodo del triedro mobile lo traduce in un sistema alle derivate parziali nei moltiplicatori lagrangiani e nella funzione caratteristica di WEINGARTEN BIANCHI e ritrova l'equazione a cui quest'ultima soddisfa.

* * *

Risultano già chiaramente dai gruppi organici di ricerche a cui sopra ho accennato la mole e l'interesse del lavoro scientifico di ERNESTO LAURA ma devo anche ricordare un cospicuo numero di altre note e memorie che mostrano come Egli abbia penetrato i più svariati campi della Matematica. Dimostra che note le componenti della velocità angolare nel moto di un corpo rigido con un punto fisso, la determinazione del moto si riporta ad un'equazione di RICCATI nello spazio tridimensionale, a due in quello quadridimensionale. In riguardo alla generazione dei moti alla POINCARÉ riprende una questione già studiata dal SIACCI e ricerca la più generale trasformazione che muta due superficie S e T , di cui S girevole intorno ad un punto fisso e tangente a T , in due altre che godono della stessa proprietà, osservando che il problema si può studiare seguendo i classici procedimenti di LIE.

Dà un elegante teorema concernente l'equilibrio di quattro forze applicate, stabilisce disuguaglianze relative alla parte reale degli autovalori di un'equazione integrale di seconda specie a nucleo non simmetrico o alle soluzioni, funzioni della sola di-

stanza, dell'equazione $\sum_{i=1}^n \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} ; u = 0$, dimostra varie formule

riguardanti i potenziali generalizzati di HELMHOLTZ, stabilisce le con-

dizioni di monodromia dell'integrale a destra secondo VOLTERRA di una sostituzione funzione di una variabile e indica un metodo d'integrazione del sistema che lo definisce. Considera la relazione differenziale non illimitatamente integrabile a cui soddisfano le componenti dello spostamento infinitesimo di una varietà anolonomica con due gradi di mobilità e mostra come ridurla a forma canonica. In più dimostra che la ricerca delle traiettorie spontanee dipende dall'integrazione di un'equazione differenziale del terzo ordine.

Riprendendo un problema posto da SIBIRANI determina le condizioni cui devono soddisfare le linee di una data famiglia affinché esista una superficie che le ammetta come geodetiche o asintotiche. Successivamente si pone il problema di determinare le superficie che ammettono una famiglia di geodetiche giacenti sopra cilindri circolari coassiali e riporta il corrispondente problema analitico alla risoluzione di un'equazione del secondo ordine analoga a quella della teoria del calore. Con il metodo dell' n -edro mobile applicato alla teoria delle varietà riemanniane dà la rappresentazione cinematica di una V_n e fa lo studio degli elementi del primo ordine delle linee su essa tracciate. Ancora ricorderò che in altre note il LAURA si occupa di questioni riguardanti la determinazione della gravità alla superficie della Terra, della sua velocità angolare, lo studio delle funzioni toroidali, il tiro di caduta da areoplano, le radici caratteristiche di una matrice a coefficienti reali o immaginari, la ricerca delle relazioni necessarie tra i coefficienti di un ds^2 affinché esso risulti di classe h .

Finirò col ricordare il chiaro libro di Meccanica nazionale che Egli scrisse per i Suoi allievi che sempre tanto attaccamento dimostrarono per un Maestro che li trattava con l'affetto di un Padre.