

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE COLOMBO

**Sull'equazione differenziale non lineare del terzo
ordine di un circuito oscillante triodico**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 19 (1950), p. 114-140

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1950__19__114_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1950__19__114_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1950, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SULL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE NON LINEARE DEL TERZO ORDINE DI UN CIRCUITO OSCILLANTE TRIODICO

Memoria () di GIUSEPPE COLOMBO (a Padova).*

Premessa. – In una conferenza tenuta alla Brown University ⁽¹⁾ il signor LEVINSON tratteggiava sommariamente un metodo di discussione dell'equazione a cui conduce lo studio di un circuito oscillante triodico che si incontra nella tecnica. Poichè nessun altro scritto ho potuto rintracciare, posteriore alla conferenza citata, su questo argomento ⁽²⁾, mi sono provato di sistemare la questione che era stata appena toccata nelle linee generali dal LEVINSON stesso, il quale poi aveva lasciato di discutere, per ragioni di brevità, dei particolari essenziali. Ho ottenuto così i risultati che espongo in questo lavoro, ^(**) risultati che se non sono del tutto completi, sono almeno rigorosi e mi sembrano interessanti oltre che per quanto riguarda l'applicazione anche per il metodo con il quale sono stati conseguiti, metodo che differisce sostanzialmente da quello usato da LEVINSON, nella sua conferenza, pur ricollegandosi come quello al metodo di POINCARÉ - BIRKHOFF ⁽³⁾.

Equazioni del terzo ordine del tipo di quella qui studiata, o più in generale sistemi del terzo ordine non lineari, si incontrano oltre che in radiotecnica anche in meccanica, quando si

(*) Pervenuta in Redazione il 18 ottobre 1949.

(**) Questo argomento ed altri, sempre di meccanica non-lineare, sono stati oggetto di alcune conferenze tenute nel maggio scorso presso il Sem. Mat. della Università di Padova.

⁽¹⁾ *Non-linear mechanics* by K. O. FRIEDRICHS, L. LE CORBELLIER, N. LEVINSON, I. I. STOKER [Brown University. Advanced instr. and res. in Mechanics. Vinter semester, 1942-43. Providence R. I.] p. 3.

⁽²⁾ Neppure un lavoro di O. K. FRIEDRICHS che il signor LEVINSON cita nella conferenza stessa, senza darne le indicazioni bibliografiche.

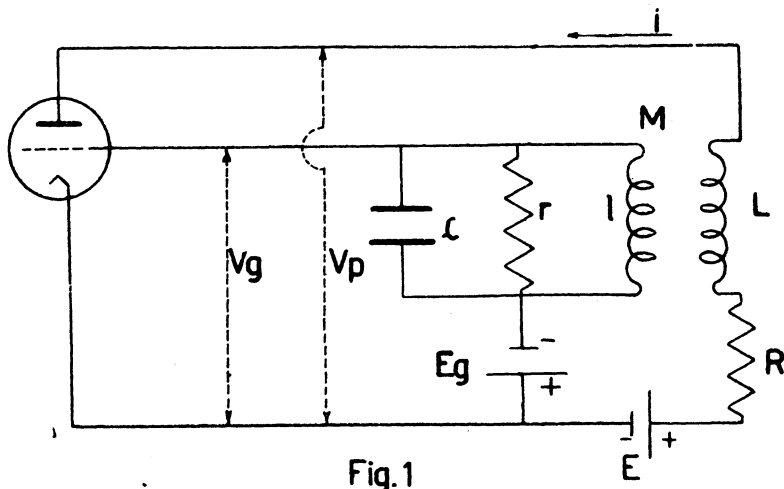
⁽³⁾ POINCARÉ H., *Oeuvres*, t. 1, p. 167. BIRKHOFF G., *Dynamical Systems* [Am. Math. Soc. Coll. Publi. Vol. IX], chap. VIII, p. 209.

considerino sistemi Hamiltoniani in due gradi di libertà oppure sistemi dissipativi con due gradi di libertà e con sollecitazioni indipendenti dal tempo aventi una coordinata che potremo dire ciclica, nel senso che essa non compare nel sistema, ma vi entrano solo le sue derivate prima e seconda (4). Una questione fondamentale in tutti questi problemi, come in quello che qui tratteremo, è la ricerca di soluzioni periodiche e lo studio del loro carattere in relazione alla stabilità.

La discussione che qui faccio, come ripeto, non è completa; mi limiterò infatti a dimostrare l'esistenza della soluzione periodica ed a dedurne qualche caratteristica. Mi riservo di completare prossimamente questo studio sotto il punto di vista della unicità e della stabilità.

1. - Posizione del problema.

L'oscillatore rappresentato in fig. 1 ha il circuito oscillante inserito nel circuito di griglia. L'unico elemento non lineare è



il triodo. Se denotiamo con i l'intensità della corrente di placca con v_p e rispettivamente v_g i potenziali di placca e di griglia, con μ il fattore di amplificazione, si ha

(4) FRANK PH. MISES R., *Die Differentialgleichungen und Integralgleichungen der Mech. und Physik*. Braunschweig 1930, II T., p. 149.

$$i = \varphi (v_p + \mu v_g) .$$

La funzione φ , che è la caratteristica del triodo, ha un andamento rappresentato in fig. 2; la sua inversa la denoteremo con g , onde potremo scrivere

$$(1) \quad v_p + \mu v_g = g(i)$$

Se denotiamo, ora, con E_g e rispettivamente con E le forze elettromotrici di griglia e di placca, con c , l , r la capacità, l'induttanza, la resistenza del circuito di griglia, con L , R l'induttanza

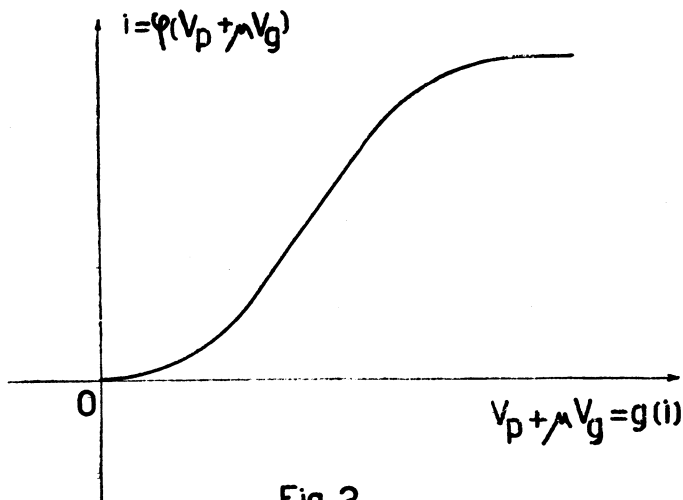


Fig. 2

e la resistenza di quello di placca, con i_1 , i_2 l'intensità delle correnti che attraversano la resistenza e l'induttanza di griglia ed infine con M la induttanza mutua dei due circuiti, si stabiliscono senz'altro, trascurando la debole corrente raddrizzata che circola nel circuito di griglia, le equazioni seguenti

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_g = E_g - r i_1 = E_g - l \frac{d i_2}{d t} - M \frac{d i}{d t} \\ C \frac{d v_g}{d t} = i_1 + i_2 \\ v_r = -M \frac{d i_2}{d t} - L \frac{d i}{d t} + E - r i \end{array} \right.$$

Se eliminiamo tra le (2) e la (1), i_1, i_2, v_r, v_g si perviene alla

$$(3) \quad \begin{aligned} & \left(L - \frac{M^2}{l} \right) \frac{d^3 i}{d t^3} + \left[R + g'(i) + \frac{1}{rc} \left(L - \frac{M^2}{l} \right) \right] \frac{d^2 i}{d t^2} + \\ & + g''(i) \left(\frac{d i}{d t} \right)^2 + \left[\frac{R + g'(i)}{rc} + \frac{1}{lc} (L - \mu M) \right] \frac{d i}{d t} + \\ & + \frac{1}{lc} \left[R i + g(i) \right] - \frac{E - \mu E_g}{lc} = 0. \end{aligned}$$

Se si pone $E - \mu E_g > 0$ e si considera l'equazione

$$R i + g(i) = E - \mu E_g,$$

questa ammette una soluzione unica i_0 perchè $g(i)$ è monotona crescente e nulla per $i = 0$ ed R è essenzialmente positiva.

Da ciò si deduce che la (3) ammette una soluzione costante $i = i_0$. Se si opera allora con la seguente sostituzione:

$$x = i - i_0, \quad f(x) = (x + i_0) R + g(x + i_0) - R i_0 - g i_0$$

sulla (3) stessa, questa si riduce alla

$$(4) \quad \begin{aligned} & \left(L - \frac{M^2}{l} \right) \ddot{x} + \left[f'(x) + \frac{1}{rc} \left(L - \frac{M^2}{l} \right) \right] \dot{x} + f''(x) x^2 + \\ & + \left[\frac{1}{rc} f'(x) - \frac{1}{lc} (\mu M - L) \right] \dot{x} + \frac{1}{lc} f(x) = 0, \end{aligned}$$

ove la $f(x)$, che è definita per $-i_0 < x < I_0$ ($i_0 > 0, I_0 > 0$) ed ha derivate infinite agli estremi, ha un andamento rappresentato in fig. 3. Essa non è, in generale, *simmetrica* rispetto all'origine, però noi la supporremo tale perchè questa ipotesi ci permetterà di semplificare le nostre considerazioni. Facciamo presente che questa ed altre ipotesi che faremo sulla $f(x)$ non tolgono niente dell'interesse che la questione può avere, perchè esse non sono essenziali ma solamente semplificative.

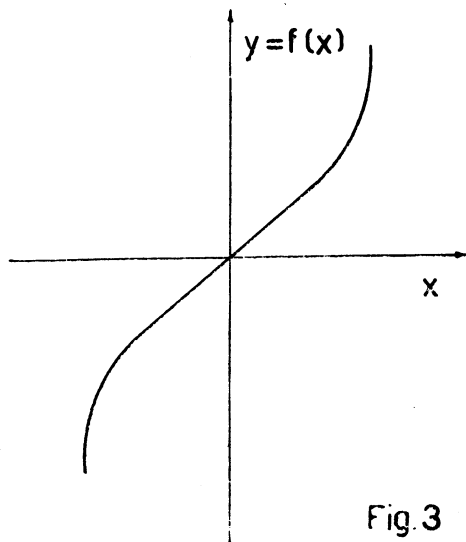


Fig. 3

Studiare il circuito rappresentato in fig. 1 significa stabilire le condizioni sotto le quali il circuito oscilla e studiarne le oscillazioni. Analiticamente questo problema equivale a stabilire le condizioni atte ad assicurare l'esistenza di soluzioni periodiche stabili nella equazione (4). Nei prossimi numeri risolveremo in parte questo problema.

2. - Considerazioni generali.

L'equazione (4) si può scrivere nella forma

$$(5) \quad \ddot{x} + (af'(x) + b)\dot{x} + af''(x)x_2 + a[bf'(x) - \alpha]\dot{x} + \beta f(x) = 0.$$

Infatti, basta osservare che il coefficiente $k = L - \frac{M^2}{l}$, che caratterizza l'accoppiamento dei due circuiti, è necessariamente maggiore di zero, e basta porre

$$(6) \quad a = \frac{1}{k}, b = \frac{1}{rc}, \alpha = \frac{\mu M - L}{cl}, \beta = \frac{1}{ckl}.$$

Notiamo che la quantità a, b, β sono essenzialmente positive; niente si può dire in generale di α il cui segno dipende dal grado dell'accoppiamento dei due circuiti e dal fattore di amplificazione del triodo, *ma noi qui lo supporremo pure positivo* per motivi di semplicità, facendo con ciò implicitamente l'ipotesi che l'accoppiamento tra i due circuiti sia sufficientemente stretto in maniera che risulti

$$\mu M - L > 0.$$

Come abbiamo accennato nel numero precedente faremo sulla $f(x)$ le seguenti ipotesi, di cui alcune semplificative:

I^a) $f(x)$ è una funzione definita continua e derivabile due volte per ogni valore della x e la derivata seconda è continua:

$$(7) \quad \text{II}^a) \quad f(0) = 0 \quad f'(x) > 0, \quad x f''(x) \geq 0;$$

$$\text{III}^a) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty.$$

Inoltre supporremo che per i coefficienti della (5) siano soddisfatte le seguenti disuguaglianze

$$(8) \quad \begin{aligned} \text{I}^a) \quad & a(a f'(0) + b)(b f'(0) - \alpha) - \beta f'(0) < 0 \\ \text{II}^a) \quad & ab^2 - 4\beta \neq 0. \end{aligned}$$

In queste ipotesi dimostreremo che l'equazione (5) ammette almeno una soluzione periodica.

Si facciano le posizioni

$$y = \dot{x} + a f(x), \quad z = \dot{y};$$

l'equazione (5) equivale allora al sistema

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - af(x) \\ \frac{dy}{dt} = x \\ \frac{dz}{dt} = -bx + \alpha ay - (\alpha a^2 + \beta)f(x) \end{cases}$$

Atteso il teorema di esistenza e unicità, assegnati i valori x_0, y_0, z_0, t_0 , ove x_0, y_0, z_0 non sono tutti e tre nulli, esistono tre sole funzioni $x = x(t, t_0)$, $y = y(t, t_0)$, $z = z(t, t_0)$ che per $t = t_0$ assumono rispettivamente i valori x_0, y_0, z_0 . Queste tre funzioni definiscono nello spazio x, y, z una curva che intenderemo orientata nel senso delle t crescenti. Questa curva non dipende dal valore scelto t_0 poichè nelle (9) non compare esplicitamente la variabile t . Resta così definito uno spazio di traiettorie per il quale l'origine è l'unico punto singolare; infatti solo nell'origine si annullano contemporaneamente i secondi membri delle (9). Ricercare una soluzione periodica per l'equazione equivale a ricercare traiettorie chiuse nello spazio di traiettorie considerato più sopra. La dimostrazione dell'esistenza di questa traiettoria chiusa sarà fatta nei prossimi numeri secondo lo schema seguente: nel n. 3 studieremo il comportamento dello spazio di traiettorie nell'intorno dell'origine; lo studio "in grande,, di questo spazio sarà fatto nel n. 4; nel n. 5 si darà un criterio di stabilità per le soluzioni di (5); nel n. 6 trarremo le conclusioni dell'esistenza di una soluzione periodica.

3. - Analisi del punto singolare.

Il comportamento delle traiettorie nell'intorno dell'origine si fa studiando il sistema lineare della prima approssimazione, corrispondente al sistema (9); sistema lineare che assume la forma:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = y - \alpha x f'(0) \\ \frac{dy}{dt} = z \\ \frac{dz}{dt} = -bx + \alpha ay - (\alpha\alpha^2 + \beta) x f'(0) . \end{array} \right.$$

All'origine delle coordinate, unico punto singolare, corrisponde evidentemente per il nostro sistema uno stato di equilibrio; affinchè possano sussistere soluzioni periodiche, cioè affinchè il sistema, che è dissipativo, oscilli periodicamente intorno a questo stato, sarà necessario assumere l'ipotesi che l'origine sia per il sistema (10) un punto singolare instabile. Noi supporremo perciò che l'equazione di terzo grado in λ

$$(11) \quad \lambda^3 + (a f'(0) + b) \lambda^2 + a (b f'(0) - \alpha) \lambda + \beta f'(0) = 0$$

abbia, oltre alla radice reale negativa, due radici reali positive oppure due radici complesse coniugate con parte reale positiva. Per questo basta che sia soddisfatta la condizione I^a) (8); basta infatti ricordare un noto criterio di HURWITZ ⁽⁵⁾ che assegna come condizioni necessarie e sufficienti affinchè l'equazione

$$(12) \quad a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$

abbia radici tutte con parte reale negativa, le condizioni

$$(13) \quad a_1 > 0, \quad a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \quad a_3 > 0.$$

La prima e la terza delle condizioni (13) sono sicuramente soddisfatte per l'equazione (11) e ciò risulta dalla natura dei coefficienti e dalle ipotesi fatte sulla $f(x)$. Imponendo che sia

⁽⁵⁾ A. HURWITZ, *On the conditions under which an Equation has only roots with negative real part.* [Math. Ann. Vol. 46 (1875)], p. 273.

verificata la prima delle (8) noi imponiamo che le tre radici non abbiano parte reale negativa poichè quest'ultima condizione equivale a negare la seconda delle (13), onde l'equazione (11) oltre ad una radice reale negativa avrà sicuramente, nelle condizioni in cui ci siamo posti, o due radici complesse con parte reale positiva, oppure due radici reali positive, non potendo averne due di negative giacchè il prodotto delle 3 radici è negativo ed essendo escluso che abbia due radici immaginarie pure, sempre per la stessa condizione posta.

Premesso questo, esaminiamo separatamente, nei due casi suddetti, il comportamento nell'origine, delle traiettorie del sistema approssimante (10).

Io caso. - Le tre radici sono $-\lambda < 0$, $\mu > 0$, $\nu > 0$. L'origine è allora secondo la nomenclatura di POINCARÉ ⁽⁶⁾ un *colle*. Chiameremo singolari le traiettorie che tendono per $t \rightarrow +\infty$ o a $-\infty$ all'origine 0. Le soluzioni

$$(14) \quad \begin{aligned} x &= K e^{-\lambda t}, \quad y = -\lambda K e^{-\lambda t} + K a e^{-\lambda t} f'(0), \\ z &= K \lambda^2 e^{-\lambda t} - \lambda K e^{-\lambda t} f'(0) \end{aligned}$$

tendono all'origine per $t \rightarrow +\infty$. Eliminando t si ottengono le equazioni cartesiane della traiettoria singolare γ

$$(15) \quad y = (a f'(0) - \lambda) x, \quad z = \lambda x.$$

La semplice infinità di traiettorie, corrispondenti alle soluzioni

$$(16) \quad \begin{aligned} x &= K_1 e^{\mu t} + K_2 e^{\nu t}, \quad y = \mu K_1 e^{\mu t} + \nu K_1 e^{\nu t} + a f'(0), \\ z &= K_1 \mu^2 e^{\mu t} + K_2 \nu^2 e^{\nu t} + a f'(0) (y - a x f'(0)) \end{aligned}$$

tende dall'origine per t tendente a $-\infty$ e giace nel piano π di equazione

(⁵) Vedi memoria citata in (³).

$$(17) \quad \begin{aligned} & x \{ \mu \nu + e f' (0) (\mu + \nu + a f' (0)) \} - \\ & - (\mu + \nu + e f' (0)) y + z = 0 . \end{aligned}$$

In questo piano il comportamento delle traiettorie è nodale (nodo instabile).

Per esaminare l'andamento delle altre traiettorie del sistema lineare nell'intorno dell'origine conviene operare nel sistema (10) con una trasformazione reale affine. Nell'ipotesi in cui ci siamo posti al riguardo delle radici della equazione caratteristica del sistema (10), il trasformato assumerà la forma

$$(10') \quad \frac{dx}{dt} = \mu x, \quad \frac{dy}{dt} = \nu y, \quad \frac{dz}{dt} = -\lambda z.$$

Il suo integrale generale è ovviamente:

$$x = l e^{\mu t}, \quad y = m e^{\nu t}, \quad z = n e^{-\lambda t}$$

La traiettoria singolare che tende all'origine per $t \rightarrow +\infty$ è l'asse z , ($l = 0$, $m = 0$); le altre traiettorie singolari che tendono all'origine per $t \rightarrow -\infty$ sono le traiettorie, giacenti nel piano xy , ($n = 0$), di equazione

$$\left(\frac{x}{l} \right)^{\nu} = \left(\frac{y}{m} \right)^{\mu}.$$

Le traiettorie non singolari sono infine di equazione

$$x^{\lambda} x^{\mu} = h, \quad y^{\lambda} x^{\nu} = k.$$

Consideriamo ora la regione cilindrica dello spazio

$$x^2 + y^2 \leq r^2, \quad z^2 \leq h^2;$$

si ha senz'altro che le traiettorie che «penetrano al crescere di t » in essa sono quelle che passano pei punti interni alle basi del cilindro, quelle che da essa «escono al crescere di t » sono quelle

che passano dalla superficie laterale, sempre intendendo esclusi i bordi. Si ha infatti, dalle (10'), che seguendo una traiettoria qualunque è

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = 2(\mu^2 + \nu y^2) > 0, \quad \frac{d}{dt}z^2 = -2\lambda z^2 < 0.$$

Esaminato, come abbiamo ora fatto, il comportamento delle traiettorie del sistema (10) vediamo cosa si può dire in generale per il sistema (9). Anzitutto esiste una traiettoria singolare γ che tende all'origine per $t \rightarrow +\infty$, essa ha nell'origine per tangente la retta di equazione (15); come per il sistema (10) si hanno poi infinite traiettorie che tendono all'origine per $t \rightarrow -\infty$ ed esse sono nell'origine tutte tangenti al piano π di equazione (17). Con la stessa trasformazione affine con la quale si riduce il sistema (10) alla forma (10') si ridurrà il sistema (9) alla forma:

$$(9') \quad \frac{dx}{dt} = \mu x + \varepsilon_1, \quad \frac{dy}{dt} = \nu y + \varepsilon_2, \quad \frac{dz}{dt} = -\lambda z + \varepsilon_3,$$

ove $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ sono funzioni di x, y, z infinitesime, per x, y, z che tendono a zero, di ordine superiore o uguale a quello della funzione $x^2 + y^2 + z^2$. Considerato ora che si ha:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x^2 + y^2) &= 2(\mu x^2 + \nu y^2) + 2(x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2) \\ \frac{d}{dt}z^2 &= -2\lambda z^2 + 2z\varepsilon_3, \end{aligned}$$

si potrà sempre scegliere un $r > 0$ tale che per ogni punto P soddisfacente alla $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$ sia

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) > 0, \quad \frac{d}{dt}z^2 < 0.$$

Si riconosce quindi che ogni regione cilindrica definita dalle disuguaglianze

$$(9'') \quad x^2 + y^2 \leq \bar{r}^2 < \frac{r^2}{4}, \quad x^2 \leq h^2 \leq \frac{r^2}{4}$$

gode della stessa proprietà di cui godeva la regione cilindrica considerata più sopra, rispetto al sistema (10).

Ritornando ora al sistema (9) resta assodata la possibilità di determinare un intorno R dell'origine delle coordinate, di forma cilindrica, con le generatrici parallele alle rette di equazioni (15) e le cui facce opposte sono parallele al piano di equazioni (17), che gode della seguente proprietà: le traiettorie che penetrano in R sono quelle che passano dai punti interni alle facce piane, quelle invece che escono da R sono le traiettorie che passano dai punti della superficie laterale di R stessa esclusi i punti del suo contorno. Detta regione sarà la trasformata della regione definita dalla (9'') nella trasformazione inversa a quella che porta dalla (9) alla (9').

II° caso. — Le tre radici sono $-\lambda$, $\mu + i\nu$, $\mu - i\nu$. L'analogia col primo caso ci dispensa dal ripetere le considerazioni svolte. Ci limitiamo ad osservare che il comportamento delle traiettorie differisce solamente per quanto riguarda le traiettorie singolari uscenti dall'origine che hanno, in questo caso, nell'origine stessa un *fuoco*. Il punto singolare si dice in questo caso *colle-fuoco*.

4. — Analisi del comportamento in grande delle traiettorie.

Premettiamo alcune notazioni che renderanno più agevoli le argomentazioni che seguiranno. Se si considerano le tre superficie di equazioni

$$y - af(x) = 0, \quad z = 0, \quad bx + \alpha ay - (\alpha a^2 + \beta)f(x) = 0,$$

superficie che denoteremo rispettivamente con s_1 , s_2 , s_3 , si riconosce senz'altro che s_1 è una superficie cilindrica a generatrici parallele all'asse z e di direttrice la curva del piano xy di equazione $y = af(x)$ e che s_3 è ancora un cilindro, a generatrici parallele alla retta del piano yz di equazione $z = \frac{\alpha a}{b}y$, che ha per di-

rettrice la curva, del piano $z = 0$, di equazione $z = \left(a + \frac{\beta}{\alpha a}\right) f(x)$. Denoteremo con γ_1 , γ_2 , γ_3 rispettivamente le tre curve.

$$\gamma_1 \equiv \begin{cases} z = 0 \\ y = \left(a + \frac{\beta}{\alpha a}\right) f(x) . \end{cases}$$

$$\gamma_2 \equiv \begin{cases} y = a f(x) \\ -bz + \alpha a y - (\alpha z^2 + \beta) f(x) = 0 , \end{cases} \quad \gamma_3 \equiv \begin{cases} z = 0 \\ y = a f(x) . \end{cases}$$

È facile riconoscere l'andamento di queste curve illimitate passanti per l'origine e simmetriche rispetto all'origine stessa; ricordando le ipotesi fatte sulla $f(x)$, si deduce allora subito che esse sono a due a due prive di punti comuni fuori dell'origine.

Indicheremo con $\gamma_i^{(1)}$, $\gamma_i^{(2)}$ rispettivamente i rami della curva γ_i , corrispondenti ai valori di x maggiori o minori di zero, in cui la curva γ_i stessa viene divisa dall'origine O ; inoltre indicheremo con $(\gamma_i^{(r)}, \gamma_j^{(s)})$ $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$; $r = 1, 2$; $s = 1, 2$, regione infinita di quella delle tre superficie s_1 , s_2 , s_3 cui appartengono γ_i e γ_j , delimitata dai rami $\gamma_i^{(r)}$, $\gamma_j^{(s)}$ e che non contiene nessuno degli altri rami di curva; infine con $(\gamma_i^{(r)}, \gamma_j^{(s)}, \gamma_k^{(t)})$ la regione infinita di spazio delimitata dalle regioni superficiali $(\gamma_i^{(r)}, \gamma_j^{(s)})$, $(\gamma_j^{(s)}, \gamma_k^{(t)})$, $(\gamma_k^{(t)}, \gamma_i^{(r)})$, che non contiene nessun altro ramo di curva. In fig. 4 sono rappresentate assonometricamente le superfici e le curve definite più sopra.

Premesse queste notazioni, cominciamo col far vedere che le traiettorie che passano dai punti (esclusa l'origine) della superficie delimitante la regione $S' \equiv (\gamma_1^{(1)}, \gamma_2^{(2)}, \gamma_3^{(1)})$, escano al crescere di t da S' stessa. Si consideri infatti un punto P di $(\gamma_3^{(1)}, \gamma_1^{(2)})$ non appartenente a $\gamma_1^{(2)}$; in questo punto risulta, come si vede subito,

$$\frac{dz}{dt} = -bz + \alpha a y - (\alpha a^2 + e) f(x) < 0 ,$$

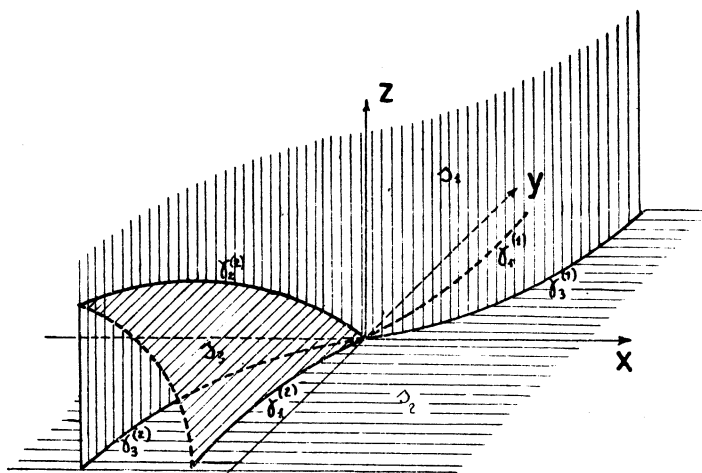


Fig. 4

onde al crescere di t la curva che passa per P attraversa $(\gamma_3^{(1)}, \gamma_1^{(2)})$ cioè il piano xy da sopra e sotto, e quindi uscendo da S' .

Analogamente si consideri un punto qualunque di $(\gamma_1^{(2)}, \gamma_2^{(2)})$ non appartenente a $\gamma_2^{(2)}$, la traiettoria che passa per esso è tale che in quel punto risulta

$$\frac{dx}{dt} = y - af(x) < 0, \quad \frac{dy}{dt} = z \geq 0, \quad \frac{dz}{dt} = 0;$$

e quindi mentre x decresce, y non decresce onde basta esaminare la configurazione di $(\gamma_1^{(2)}, \gamma_2^{(2)})$, nei confronti della tangente alla traiettoria nel punto considerato, per riconoscere che la traiettoria la attraversa, al crescere di t , uscendo da S' . Resta da ultimo da considerare la regione $(\gamma_2^{(2)}, \gamma_3^{(1)})$ nei punti non appartenenti a $\gamma_3^{(1)}$. In questo punto si ha

$$\frac{dx}{dt} = y - af(x) < 0, \quad \frac{dy}{dt} = z > 0, \quad \frac{dz}{dt} \leq 0$$

e quindi si riconosce ancora che le traiettorie passando dai punti di $(\gamma_2^{(2)}, \gamma_3^{(1)})$ escono, sempre al crescere, di t da S .

Ricordando ora la simmetria dello spazio di traiettorie, si può concludere che attraverso le superficie delimitanti le regioni spaziali $(\gamma_1^{(2)}, \gamma_2^{(2)}, \gamma_3^{(2)})$, che abbiamo denotato con S' , e la simmetrica rispetto all'origine $(\gamma_1^{(1)}, \gamma_2^{(1)}, \gamma_3^{(1)})$, che denotiamo con S'' , le traiettorie escono da queste regioni per entrare nello spazio complementare che denoteremo con S .

Ricordiamo ora dal numero precedente che le due traiettorie singolari simmetriche che per $t \rightarrow +\infty$ tendono all'origine, hanno ivi per tangente la retta di equazioni (5). Ora si riconosce agevolmente che è $af'(0) - \lambda < 0$. Infatti si ha, rispettivamente nei due casi di radici tutte reali, oppure no,

$$-(af'(0) + b) = -\lambda + \mu + \nu, \quad -(af'(0) + b) = -\lambda + 2\mu,$$

e quindi, ancora rispettivamente nei due casi, è

$$af'(0) - \lambda = -b - \mu - \nu < 0, \quad af'(0) - \lambda = -b - 2\mu < 0,$$

come si era detto. Quindi la tangente di equazione (15) è contenuta in S' ed S'' , e le traiettorie singolari del sistema (9) che tendono all'origine per $t \rightarrow +\infty$ provengono da S' ed S'' e quindi giacciono tutte in queste regioni.

Si prenda ora nelle disuguaglianze (9'') un $\bar{r}$ così piccolo, che diremo r^* , in rapporto ad h , per modo che la regione R^* che resta definita in conseguenza abbia le facce piane opposte appartenenti completamente ad S' e ad S'' . La possibilità di una tale determinazione discende immediatamente dal considerare che l'asse della regione R^* è la retta (15) e che questa giace in S' ed S'' . Ripetiamo per maggior chiarezza che così si è determinato un intorno R^* dell'origine che gode delle seguenti proprietà: *le traiettorie che passano per i punti interni alle facce piane opposte penetrano nella regione R^* quelle che passano dai punti della superficie laterale esclusi i punti del suo contorno escono da R^** . Osserviamo inoltre che nessuna traiettoria chiusa può essere contenuta in R^* giacchè della proprietà di cui gode questo intorno godono tutti gli intorni omotetici interni ad esso, rispetto all'origine O .

Se denotiamo ora con S^* la regione di S che si ottiene togliendo ad S i punti interni ad R^* , si traggono da queste prime

considerazioni le seguenti proprietà caratteristiche per lo spazio di traiettorie definito dal sistema (9):

I^a) *Se di una traiettoria γ fa parte un punto P di S^* fa parte di S^* anche tutta la semitraziettoria $\gamma^+(P)$ di γ .*

II^a) *Gli eventuali cicli sono contenuti in S^* .*

La I^a proprietà è subito dedotta dal fatto che nessuna trazittroria esce, al crescere di t , da S^* . La II^a proprietà discende dall'osservare che in S' (S'') la x e la z si mantengono monotone non crescenti (non decrescenti) e la y non decrescente (non crescente), e che le trazittrorie che hanno punti in R^* finiscono, al crescere di t , per uscire da R^* stessa.

5. - Teorema di stabilità per le soluzioni del sistema (9).

In questo numero daremo un criterio di stabilità per le soluzioni del sistema (9).

Il sistema (9) si può scrivere nella seguente forma

$$(18) \quad \begin{cases} \ddot{y} + b\dot{y} + \frac{\beta}{a}y = K\dot{x} \\ \dot{x} = y - af(x) \end{cases} \quad \left(K = \alpha a + \frac{\beta}{a} \right)$$

Ricordando la ipotesi seconda delle (8), supponiamo dapprima che sia $ab^2 - 4\beta > 0$ e siano $-\lambda_1, -\lambda_2$ ($\lambda_1 > \lambda_2$) le soluzioni dell'equazione in λ

$$(19) \quad \lambda^2 + b\lambda + \frac{\beta}{a} = 0.$$

Dalle prime delle (18) si trae allora la conseguenza

$$y = A e^{-\lambda_1 t} + B e^{-\lambda_2 t} + \frac{K}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[-e^{-\lambda_1 t} \int_0^t \dot{x} e^{\lambda_1 t} dt + \right. \\ \left. + e^{-\lambda_2 t} \int_0^t \dot{x} e^{\lambda_2 t} dt \right]$$

e da queste, se si pone uguale ad x_0 il valore di x per $t = 0$, si hanno successivamente le

$$(20) \quad y = A e^{-\lambda_1 t} + B e^{-\lambda_2 t} + \frac{K x_0}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) + \\ + \frac{K}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} \int_0^t x e^{\lambda_1 t} dt - \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \int_0^t x e^{\lambda_2 t} dt \right],$$

$$(21) \quad \dot{y} = -\lambda_1 A e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 B e^{-\lambda_2 t} + \\ + \frac{K x_0}{\lambda_1 - \lambda_2} (-\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}) + K x - \\ - \frac{K}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[-\lambda_1^2 e^{-\lambda_1 t} \int_0^t x e^{\lambda_1 t} dt + \lambda_2^2 e^{-\lambda_2 t} \int_0^t x e^{\lambda_2 t} dt \right].$$

Consideriamo ora la soluzione del sistema (9) oppure (18), soddisfacente alle condizioni iniziali

$$z(0) = \dot{y}(0) = 0, \quad y(0) = y_0;$$

dovremo allora assumere relativamente ad una tale soluzione quali valori delle costanti A e B i valori

$$A = \frac{-\lambda_2 y_0}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad B = \frac{\lambda_1 y_0}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Si consideri l'intervallo $0 \leq t$ della variabile t e sia $\bar{x}(t)$ il massimo di $|x(t)|$ in detto intervallo.

Tenendo conto che valgono le seguenti disuguaglianze

$$\left| \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right| < 1, \quad \left| \frac{e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right| < \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

si deduce dalla (20) con facili calcoli:

$$(22) \quad |y| < |y_0| + \frac{K|x|}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{2K\bar{x}}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

e quindi, poichè $\bar{x} \geq |x_0|$, si ha

$$(23) \quad |y| < |y_0| + \frac{3K\bar{x}}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Sia ora $\xi(\nu)$ la soluzione dell'equazione in x

$$(24) \quad \nu + \frac{3Kx}{\lambda_1 - \lambda_2} = a f(x)$$

contenente il parametro $\nu > 0$. Questa equazione ammette certamente una ed una sola soluzione reale per ogni valore di ν maggiore di zero, come si riconosce subito se si ricordano le ipotesi fatte sulla $f(x)$. *Inoltre abbiamo che questa soluzione soddisfa alla relazione*

$$(25) \quad \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \frac{\xi(\nu)}{\nu} = 0.$$

Infatti, tenendo conto che $\xi(\nu)$ soddisfa l'equazione (24) per ipotesi, si ha successivamente

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \frac{\xi(\nu)}{\nu} = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \frac{1}{a f'(\xi) - \frac{3K}{\lambda_1 - \lambda_2}} = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{1}{a f'(\xi) - \frac{3K}{\lambda_1 - \lambda_2}} = 0.$$

essendo $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \xi(\nu) = +\infty$, $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \nu = +\infty$ ed inoltre

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} f'(\xi) = +\infty.$$

Per la (25) si potrà sempre scegliere un $\bar{\nu}$ tale che

$$(26) \quad \frac{2K\xi(\bar{\nu})}{\lambda_1 - \lambda_2} = \tau_1 < \bar{\nu}.$$

Si consideri ora una qualunque soluzione del sistema (9) o (18) soddisfacente alle condizioni iniziali

$$(27) \quad |x_0| < \xi(\bar{v}), \quad y_0 \leq \bar{v}, \quad z_0 = 0;$$

una tale soluzione soddisfa, come ora vedremo, per ogni valore di $t > 0$ alle relazioni

$$(28) \quad |x| < \xi(\bar{v}), \quad |z| < M,$$

ove M è un certo numero positivo finito, ed inoltre si ha

$$(28') \quad \max \lim |y| \leq \eta < \bar{v}.$$

Infatti, procedendo per assurdo, supponiamo dapprima che $|x|$ possa superare $\xi(\bar{v})$ e, ricordato che la x è funzione continua di t e che $x(0) < \xi(\bar{v})$, sia $\bar{t}$ il più piccolo valore positivo di t in cui x assume il valore $\xi(\bar{v})$. In questo istante $\bar{t}$ dovrebbe necessariamente essere $\dot{x}(\bar{t}) \geq 0$, poichè è $x < \xi(\bar{v})$ per ogni $0 \leq t < \bar{t}$, invece si ha, ove si tengano presenti la seconda equazione delle (10) e la disuguaglianza (23)

$$\dot{x}(t) = y(\bar{t}) - af(x(\bar{t})) < \bar{v} + \frac{3K\xi(\bar{v})}{\lambda_1 - \lambda_2} - af'(\xi(\bar{v})),$$

e da questa si trae subito, essendo nullo l'ultimo membro della disuguaglianza in quanto $\bar{v}$ e $\xi(\bar{v})$ risolvono le (24), che $\dot{x}(\bar{t}) < 0$; il che è assurdo.

Analogamente, se $\bar{t}$ è il primo istante in cui x assume il valore $-\xi(\bar{v})$, poichè allora è, per ogni $0 \leq t < \bar{t}$, $x > -\xi(\bar{v})$, dovrebbe essere necessariamente $\dot{x}(\bar{t}) \leq 0$; al contrario, essendo $f(-\xi(\bar{v})) = -f(\xi(\bar{v}))$, sarà anche

$$\dot{x}(\bar{t}) = y(\bar{t}) - af(x(\bar{t})) > -\bar{v} - \frac{3K\xi(\bar{v})}{\lambda_1 - \lambda_2} + af(\xi(\bar{v})),$$

sempre tenendo presenti la seconda di (18) e la (23); e quindi,

risultando nullo l'ultimo membro dalla disuguaglianza, si ha $|x(\bar{t})| > 0$; il che è ancora assurdo.

Si può allora concludere intanto che $|x(t)|$ si mantiene costantemente inferiore a $\xi(v)$ e che $|y|$ si mantiene inferiore a $\bar{v} + \frac{3K\xi(\bar{v})}{\lambda_1 - \lambda_2}$; ma di più, se si tien conto che

$$|y| < |A e^{-\lambda_1 t} + B e^{-\lambda_2 t}| + \frac{Kx_0}{\lambda_1 - \lambda_2} |e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}| + \frac{2K\xi(\bar{v})}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

si ha subito, ricordando le (26), che

$$\max_{t \rightarrow +\infty} |y| \leq \frac{2K\xi(\bar{v})}{\lambda_1 - \lambda_2} \leq \eta < \bar{v}.$$

Infine dalle (21) si deduce con facili calcoli

$$|z| = |\dot{y}| < K\xi(\bar{v}) \frac{3\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

e se si assume M eguale al secondo membro di questa ultima disuguaglianza risulta senz'altro dimostrato l'asserto.

Si supponga ora $ab^2 - 4\beta < 0$ e siano $-\lambda \pm i\mu$ le due radici della equazione (19). Si avrà allora come conseguenza la

$$y = A e^{-\lambda t} \cos \mu t + B e^{-\lambda t} \sin \mu t - \\ - \frac{K e^{-\lambda t}}{\mu} \cos \mu t \int_0^t x e^{\lambda t} \sin \mu t dt + \frac{K}{\mu} e^{-\lambda t} \sin \mu t \int_0^t x e^{\lambda t} \cos \mu t dt,$$

e da queste si ottiene, con una integrazione per parti, la analoga della (20).

$$(20') \quad y = A e^{-\lambda t} \cos \mu t + B e^{-\lambda t} \sin \mu t + K x_0 e^{-\lambda t} \frac{\sin \mu t}{\mu} + \\ + K e^{-\lambda t} \left[\frac{\sin \mu t}{\mu} \int_0^t x (e^{\lambda t} \cos \mu t)' dt - \cos \mu t \int_0^t x (e^{\lambda t} \sin \mu t)' dt \right];$$

da questa poi e da quella che si scrive derivando la stessa (analogamente alla (21')) si ottiene, ponendo $t = 0$,

$$y(0) = A \quad y'(0) = z(0) = -\lambda A + \mu B.$$

Consideriamo ora una soluzione soddisfacente alle condizioni $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $z(0) = 0$ e denotiamo con $\bar{x}$ il massimo in $0 \leq t$ di $|x(t)|$ abbiamo

$$|y| \leq |y_0| e^{-\lambda t} |\cos \mu t| + \frac{\lambda}{\mu} |\sin \mu t| + K \frac{|x_0|}{\mu} e^{-\lambda t} + \\ + \frac{2 K \bar{x}}{\mu} |\sin \mu t \cos \mu t| + \frac{K \bar{x}}{\mu} e^{-\lambda t} |\sin \mu t|$$

e quindi a maggior ragione

$$|y| \leq y_0 \frac{\lambda + \mu}{\mu} + 4 \frac{K \bar{x}}{\mu}.$$

Sia ora $\xi(v)$ la unica soluzione reale dell'equazione, nella incognita x e contenente il parametro v ,

$$(24') \quad v \frac{\lambda + \mu}{\mu} + \frac{4 K x}{\mu} = a f(x),$$

e si scelga $\bar{v}$, come è sempre possibile fare, poichè anche in questo caso è $\lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{\xi(v)}{v} = 0$, in maniera che risulti

$$\frac{2 K \xi(\bar{v})}{\mu} = \eta < \bar{v};$$

allora una qualunque soluzione del sistema dato, soddisfacente alle condizioni (27), soddisfa ancora alle condizioni (28).

Si può quindi concludere che anche nel caso che sia $ab^2 - 4\beta < 0$ si ha un teorema di stabilità analogo a quello che si ha nel caso $ab^2 - 4\beta > 0$. C'è infine da osservare che quando $ab^2 - 4\beta$ tende a zero tanto $\bar{v}$ che $\xi(\bar{v})$ tendono all'infinito.

Concludendo, si riepiloga quanto sopra esposto nel seguente teorema di stabilità:

Se per i coefficienti a, b, β del sistema (18), e quindi anche del sistema (9), è soddisfatta la II^a delle (8), esistono un $\bar{v}$ ed un M tale che ogni soluzione, soddisfacente alle condizioni iniziali (27) soddisfa anche alle (28), ove si prenda per $\xi(\bar{v})$ la unica soluzione reale rispettivamente della equazione (24) o (24') a seconda che $ab^2 - 4\beta \geq 0$, considerata per $\bar{v} = v$.

OSSERVAZIONE. - Scende immediatamente che le soluzioni del sistema (18) sono stabili anche in senso ordinario, cioè nel senso che, fissati i valori iniziali per la soluzione generica, è sempre possibile determinare un $\varepsilon > 0$ tale che $x^2 + y^2 + z^2 \leq \varepsilon$.

6. - Esistenza di almeno una soluzione periodica.

Ritorniamo ora a ragionare nello spazio di traiettorie, di cui abbiamo studiato il comportamento nell'origine nel n. 3 ed il comportamento in grande nel n. 4.

Denotate rispettivamente con $x = \varphi_1(y)$, $x = \varphi_2(y)$ le funzioni inverse delle funzioni $y = af(x)$, $y = a + \frac{\beta}{\alpha a}f(x)$, si consideri la regione σ_1 del piano xy definita dalle disuguaglianze:

$$y \leq 0, \quad \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y), \quad z = 0$$

e si indichi con σ'_1 la regione di σ_1 che fa parte di S^* (vedi fig. 5), ed infine con σ_1^* il luogo dei punti di σ'_1 per cui è $0 < y \leq \bar{v}$.

Le regioni simmetriche di σ_1 , σ'_1 , σ_1^* rispetto all'origine saranno inoltre denotate con σ_2 , σ'_2 , σ_2^* . Abbiamo evidentemente $\sigma_1 \supset \sigma'_1 \supset \sigma_1^*$.

Sia ora P un punto qualunque di σ_1^* , la traiettoria $\gamma(P)$ che esce da P all'istante $t = 0$ penetra attraverso il piano $z = 0$, al crescere di t , nella regione S_+^* di S^* appartenente al semispazio $z > 0$. Per la semitraiettoria $\gamma^+(P)$ possiamo dire che essa appartiene tutta a S^* per quanto è stato detto nel n. 4 e quindi può avvenire che essa o appartenga tutta a S_+^* oppure che ad un certo istante t' essa penetri in S_-^* (regione di S^* appartenente al semispazio $z \leq 0$) attraverso un punto del piano $z = 0$ che sarà necessariamente di σ_2^* giacchè solamente nei punti di σ_2^* è $\frac{dz}{dt} \leq 0$.

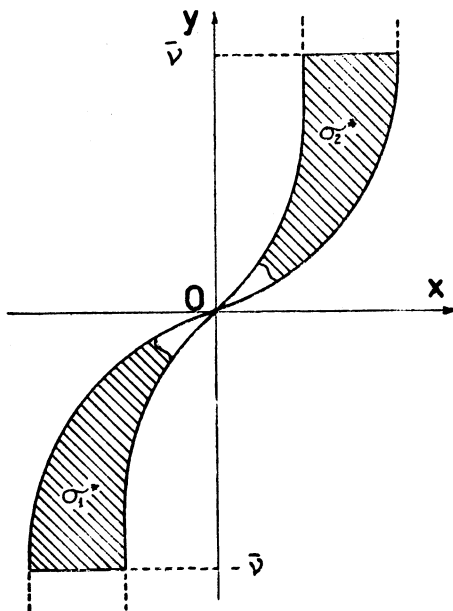


Fig. 5

Dimostriamo ora che la prima eventualità ($\gamma^+(P)$ appartiene tutta ad S_+^*) non può verificarsi. Infatti se fosse $z > 0$, per ogni $t > 0$, y sarebbe crescente per ogni valore di t , come risulta dalla seconda equazione del sistema (9), onde esisterebbe il limite di y per $t \rightarrow +\infty$ e detto limite l sarebbe certamente finito, atteso il teorema del n. precedente l'insieme limite positivo di γ , $\Lambda^+(\gamma)$ (⁷), apparterebbe ad un piano $y = \rho$ e sarebbe limitato in questo piano giacchè restano limitati anche $|y|$ e $|z|$. L'insieme $\Lambda^+(\gamma)$ d'altronde non può ridursi ad un punto unico, giacchè questo sarebbe un punto singolare e quindi, poichè il sistema (9) non ha punti singolari fuori dell'origine, esso dovrebbe coincidere con l'origine stessa. Ora poichè l'unica soluzione che tende assintoticamente per $t \rightarrow \infty$ all'origine è una soluzione che non

(⁷) Vedi LERSCHETZ S., *Lectures on differential equations* [Annales of Math. Studies, n. 14], p. 162.

proviene da S^* , la traiettoria considerata più sopra non può tendere verso l'origine. Escluso così che $\Lambda^+(\gamma)$ si riduca ad un punto singolare, supponiamo che di $\Lambda^*(\gamma)$ faccia parte un punto ordinario. Se P è un punto ordinario di $\Lambda(\gamma)$ si sa che tutta la traiettoria $\bar{\gamma}$ passante per P appartiene a $\Lambda^+(\gamma)$ onde necessariamente $\bar{\gamma}$ giace tutta nel piano $y = \rho$, cioè essa è piana. Basta esaminare il sistema (9) per essere portati ad escludere l'eventualità dell'esistenza di una soluzione del sistema che comporti $y = \text{costante}$. Si conclude allora che è assurdo supporre che $\gamma^+(P)$ appartenga tutto ad S_+^* . La semitraiettoria $\gamma^+(P)$ attraverserà quindi il piano $z = 0$ una prima volta in un certo istante $t' > 0$, in un punto P' della regione σ'_2 . Con ragionamento perfettamente analogo si riconosce ancora che in un certo istante $t^* > t'$ la $\gamma^+(P')$ attraverserà per la seconda volta il piano $z = 0$, non potendo appartenere tutta ad S_+^* , in un punto P^* di σ'_1 .

Si consideri la trasformazione di σ_1^* , che si ottiene associando ad ogni punto P di σ'_1 il punto P^* in cui $\gamma_+(P)$ riincontra per la prima volta σ'_1 . Denoteremo così $P^* = \mathcal{T}(P)$ detta trasformazione topologica⁽⁸⁾.

Dimostrare l'esistenza di una soluzione della equazione (2) periodica semplice (intendendo con ciò dire che in un periodo la x si annulla con la sua prima derivata solamente due volte) equivale a dimostrare l'esistenza di un punto unito in $\mathcal{T}$. Per questo facciamo anzitutto vedere che la $\mathcal{T}$ gode della seguente proprietà:

Esiste un N tale che per ogni $n > N$ si ha $\mathcal{T}^n(\sigma_1^) \subset \sigma_1^*$.*

Per provare quest'ultimo asserto osserviamo intanto che, per la dipendenza continua dei valori iniziali, per le traiettorie uscenti dai punti di σ_1^* , esiste un T tale che per ogni $t > T$ si ha $|y| < \bar{v}$, e ciò per il teorema di stabilità dimostrato nel n. precedente. D'altro canto il tempo τ trascorso tra due intersezioni consecutive di una traiettoria con σ'_1 è limitato inferiormente. Infatti sono limitate inferiormente le lunghezze degli archi di traiettoria con-

⁽⁸⁾ Che la τ sia biunivoca è conseguenza del teorema di unicità per le soluzioni del sistema (9); e che τ sia continua è conseguenza del teorema di dipendenza continua dai valori iniziali delle soluzioni di (9).

tenuti in S^* , delimitati da due intersezioni consecutive con σ'_1 , ed è limitata superiormente la velocità di P su ogni traiettoria che passa per punti di σ_1^* e che quindi si mantiene limitata. Queste limitazioni sono poi uniformi relativamente a tutte le traiettorie dei punti di σ_1^* , si conclude che esiste un $\bar{\tau}$ tale che per ogni traiettoria uscita da punti di σ_1^* il tempo trascorso tra due intersezioni conclusive con σ'_1 è limitato inferiormente da $\bar{\tau}$.

Associato a T esiste un N uguale alla parte intera di $T/\bar{\tau}$ tale che una qualunque traiettoria uscente da un punto di σ_1^* , dopo N intersezioni col piano $z = 0$, che possono cadere in punti, esterni a σ^* , ma appartenenti a σ'_1 , interseca successivamente il piano $z = 0$ in punti che cadono tutti internamente a σ_1^* , poichè per $t > T$ è $|y| < \nu$. Resta dunque provato l'asserto.

Non rimane per concludere che ricordare un teorema recente di LEVINSON-MASSERA⁽⁹⁾ sulle trasformazioni topologiche piane, teorema che generalizza quello di BRONWER:

Una trasformazione topologica $\mathcal{C}$ del piano in sè, per cui esista una 2-cella K ed un N tale che per ogni $n > N$ risulti $T(K) \subset K$, ammette certamente almeno un punto unito.

Questo risultato applicato al nostro caso⁽¹⁰⁾ ci assicura che esiste in σ_1^* almeno un punto $\bar{P}$ tale che $\mathcal{C}(\bar{P}) = \bar{P}$ onde la traiettoria uscente da $\bar{P}$ è un ciclo, anzi un ciclo semplice nel senso che la traiettoria gira una sola volta in S^* attorno alla regione R^* . Quest'ultima proprietà ci assicura senz'altro che $x(t)$ e $x'(t)$ si annullano solamente una volta in un periodo; infatti il piano yz è attraversato solamente due volte in un periodo da un ciclo siffatto e così la superficie s_1 . Le intersezioni del ciclo con s_1 danno poi con le loro coordinate x_1, x_2 , i valori massimi e minimi di $x(t)$.

OSSERVAZIONE I^a - Non occorre invocare il teorema di

(9) N. LEVINSON: *Transformation Theory of Non-Linear Differential Equations of the Second Order*, Ann. of Math., 45, 1944, pp. 723-737.

I. L. MASSERA: *The Number of Subharmonics Solutions of Non Linear Diff. Equations of the Second Order*, Ann. of Math., 60, 1949, pp. 118-126.

(10) Veramente la τ da noi resta definita solo in σ^* ma è noto che essa può estendersi in tutto il piano. Vedi ad es. V. KERÉKJARTÓ: *Vorlesungen über Topologie*, Berlin 1923, Cap. II, § 2.

LEVINSON - MASSERA per stabilire l'esistenza di una soluzione periodica nella accezione più generale della parola, bastando all'uopo il teorema di BROUWER. Infatti il teorema di BROUWER applicato alla $\mathcal{C}^n$ mi assicura l'esistenza di un punto unito in σ_1^* rispetto a $\mathcal{C}^n$, cioè l'esistenza di un ciclo, che però si chiude dopo n giri attorno ad R e quindi l'esistenza di una soluzione periodica non semplice.

OSSERVAZIONE II^a - Facendo intervenire essenzialmente la ipotesi che la $f(x)$ sia funzione dispari di x , si può dimostrare l'esistenza di una soluzione periodica semplice dispari. Infatti basta considerare la trasformazione $\mathcal{C}^*$ che fa corrispondere ad un punto $\bar{P}$ di σ_1^* , il simmetrico rispetto all'origine $\mathcal{C}^*(\bar{P})$ di quel punto $\bar{P}'$ in cui $\gamma^+(P)$ incontra per la prima volta σ_2^* . Il teorema di LEVINSON - MASSERA assicura l'esistenza di un ciclo semplice simmetrico rispetto all'origine e quindi di una soluzione semplice dispari.

OSSERVAZIONE III^a - La dimostrazione dell'esistenza di almeno una soluzione periodica stabile e più ancora di una unica soluzione di tale tipo comporta a prima vista difficoltà che sembrano insormontabili; soprattutto per la varietà dei casi che si possono presentare. La questione si semplifica se si fanno ipotesi che, se hanno una giustificazione fisica, sono gratuite dal punto di vista matematico. Ci riserviamo di ritornare su questo argomento in un lavoro successivo.

7. - Considerazioni finali sul circuito.

La limitazione trovata, nel teorema di stabilità che abbiamo dato nel n. 4, permette di avere una limitazione superiore per l'ampiezza di oscillazione, cioè per l'intensità massima di corrente che circola nel circuito di placca, solamente se $ab^2 - 4\beta \neq 0$ cioè se

$$(29) \quad \frac{1}{2r} \sqrt{\frac{l}{c}} \neq 1.$$

Con il metodo qui seguito non sono riuscito ad eliminare questa condizione che probabilmente dipenderà solo dalla maniera in cui si è dimostrato il teorema di stabilità. D'altra parte in pratica sarà estremamente improbabile che il sistema non soddisfi ad essa.

Osserviamo in fine che dalla prima ipotesi delle (8), che dà la condizione essenziale affinché il circuito oscilli, si ottiene la seguente limitazione per le caratteristiche del circuito

$$(\rho r c + K) (\rho K c - r(\mu M - L)) - \rho K^2 r^2 < 0,$$

ove si è posto $f'(0) = \rho$ (resistenza interna della valvola).

Affinchè sia verificata, basta, per es., che sia

$$\rho K l - r(\mu M - L) < 0,$$

cioè che l'accoppiamento sia sufficientemente stretto o che r sia sufficientemente grande.