RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE COLOMBO

Sopra l'equazione integrale, a nucleo dipendente dal parametro, delle vibrazioni normali di una sfera immersa in un fluido

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 17 (1948), p. 29-38

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1948__17__29_0>

SOPRA L'EQUAZIONE INTEGRALE, A NUCLEO DIPENDENTE DAL PARAMETRO, DELLE VIBRAZIONI NORMALI DI UNA SFERA IMMERSA IN UN FLUIDO

Nota (*) *di Giuseppe Colombo* (*a Padova*)

Il problema delle vibrazioni normali di una sfera vibrante in un fluido è stata oggetto di uno studio interessante del Prof. Laura (1); dalle equazioni generali di elasticità e sfruttando l'ipotesi della continuità delle tensioni e della velocità normale, attraverso la superficie del vibratore si riduce il problema all'integrazione dell'equazioue

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} u + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{r} \right) \qquad r \leq R$$

con le condizioni al contorno

$$\rho \left(a^2 \frac{\partial u}{\partial 2} + (a^2 - 2\, b^2) \frac{2\, u}{r} \right) = - \frac{\rho_1}{R} F'(t) \qquad r = R$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{R^2} F(t) + \frac{1}{c R} F'(t) \qquad r = R$$

$$F(0) = 0$$

dove $u(r, t)$ è lo spostamento radiale della sfera; il potenziale di velocità nel fluido è $\Phi = \frac{1}{r} F\left(t - \frac{r - R}{c}\right)$; a e b sono le velocità di propagazione delle onde longitudinali e trasversali nella sfera, c è la velocità di propagazione delle onde longitudinali nel fluido; ρ e ρ_1 sono le densità della sfera e del fluido; R raggio della sfera. Per la ricerca delle soluzioni caratteristiche porremo

(*) Pervenuta in Redazione il 31 maggio 1947.

(1) E. Laura, *Sopra le vibrazioni normali di una sfera vibrante in un fluido* [« Rendiconti Accademia dei Lincei », Serie V, vol. XXI, I e II sem.].

$$u(r,t) = u(r)\ \mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \qquad F(t) = \mu\ \mathrm{e}^{\lambda_1 t}.$$

Facendo le posizioni semplificative

$$b = \frac{2}{a^2}(a^2 - 2\,b^2) \qquad \alpha = \frac{\rho_1}{\rho} \qquad n = \frac{a}{c} \qquad R = 1 \qquad \lambda = \frac{\lambda_1}{a}$$

ed eliminando le μ il problema si riconduce alla ricerca di una $u(r)$ soddisfacente all'equazione

$$1) \qquad u'' + \frac{2}{r}u' - \frac{2}{r^2}u = \lambda^2 u \qquad\qquad 0 \leq r \leq 1$$

con le condizioni al contorno

$$2) \qquad u'(1) + \left(h + \frac{\alpha\,\lambda^2}{1 + n\,\lambda}\right) u(1) = 0$$

$$3) \qquad u(0) = 0\,.$$

L'ultima condizione discende dalla continuità dello spostamento nella sfera. Ci riserveremo di soddisfare la $F(0) = 0$ con una combinazione lineare delle $u_n(r)$, che soddisfano alle 1), 2), 3).

Riprendendo questo problema dal punto di vista analitico faremo vedere come la soluzione del problema dipenda dalla soluzione di una equazione integrale a nucleo funzione razionale del parametro; questa equazione diventa di tipo ordinario nei casi limiti della densità del fluido nulla o infinita. Faremo vedere come dall'equazione discenda rapidamente che gli auto-valori siano a parte reale negativa sul caso generale e diventino immaginari puri nei casi limiti. Lo studio di detti autovalori sarà fatto più agevolmente sull'equazione alle frequenze ed agli smorzamenti in un lavoro successivo, approssimando la sudetta equazione con equazioni razionali intere di un certo tipo. Questo ultimo studio permetterà di determinare relazioni interessanti tra le caratteristiche del moto, frequenze e smorzamenti, e le caratteristiche del sistema.

1. - Consideriamo l'equazione con 2° membro:

$$A) \qquad x^2\,u'' + 2\,x\,u' - 2\,u = f(x)$$

due integrali indipendenti dall'equazione omogenea corrispondente sono

$$u_1 = \frac{1}{x^2} \qquad u_2 = -\frac{x}{3}$$

applicando il metodo della variazione delle costanti si ricava che l'equazione A) ha come integrale particolare il seguente

$$u(x) = -\frac{1}{3}\int_0^x \left(\frac{s}{x^2} - \frac{x}{s^2}\right) f(s)\, ds$$

l'integrale generale di A) sarà dunque

$$\text{B)} \qquad u(x) = -\frac{C}{3}x + \frac{C_2}{x^2} - \frac{1}{3}\int_0^x \left(\frac{s}{x^2} - \frac{x}{s^2}\right) f(s)\, ds\,.$$

L'equazione 1), ponendo in essa x al posto di r, diventa

$$x^2 u'' + 2\,x\,u' - 2\,u = \lambda^2 x^2 u\,,$$

la sua soluzione soddisfa all'equazione

$$u(x) = -\frac{C_1}{3}x + \frac{C_2}{x^2} - \frac{\lambda^2}{3}\int_0^x \left(\frac{s}{x^2} - \frac{x}{s^2}\right) s^2\, u(s)\, ds\,;$$

la condizione $u(0) = 0$ comporta $C_2 = 0$ in modo che l'equazione su scritta diventa

$$u(x) = -\frac{C_1}{3}x - \frac{\lambda^2}{3}\int_0^x \left(\frac{s}{x^2} - \frac{x}{s^2}\right) s^2\, u(s)\, ds\,.$$

Qui determiniamo C_1 in modo che la $u(x)$ soddisfi alla 2), si ha, fuori del punto zero

$$\text{C)} \qquad u'(x) = -\frac{C_1}{3} - \frac{\lambda^2}{3}\int_0^x \left(-\frac{2\,s}{x^3} - \frac{1}{s^2}\right) s^2\, u(s)\, ds$$

e quindi

$$u(1) = -\frac{C_1}{3} - \frac{\lambda^2}{3}\int_0^1 \left(s - \frac{1}{s^2}\right) s^2\, u(s)\, ds$$

$$u'(1) = -\frac{C_1}{3} + \frac{\lambda^2}{3}\int_0^1 \frac{2s^3+1}{s^2}\, s^2\, u(s)\, ds\,;$$

la condizione 2) ponendo $k = h + \dfrac{\alpha\lambda^2}{1+u\lambda}$ diventa

$$u'(1) + k\, u(1) = 0$$

e sostituendo

$$\frac{C_1}{3} + \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{2s^3+1}{s^3}\lambda^2 s^2\, u(s)\, ds + k\left\{-\frac{C_1}{3} - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{s^3-1}{s^3}\lambda^2 s^2\, u(s)\, ds\right\} = 0$$

$$-\frac{C_1}{3}(1+k) + \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{2s^3+1-ks^3+k}{s^2}\lambda^2 s^2\, u(s)\, ds = 0$$

e quindi

$$C_1 = \int_0^1 \frac{\frac{2-k}{k+1}s^3+1}{s^2}\lambda^2 s^2\, u(s)\, ds\,.$$

Se facciamo la posizione $K = \dfrac{2-k}{1+k}$ si ha

$$C_1 = \int_0^1 \frac{Ks^3+1}{s^2}\lambda^2 s^2\, u(s)\, ds$$

e la B) diventa

$$u(x) = -\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{Ks^3+1}{s^2}\cdot x \cdot \lambda^2 s^2\, u(s)\, ds -$$

$$-\frac{1}{3}\int_0^x \left(\frac{s}{x^2} - \frac{x}{s^2}\right)\lambda^2 s^2\, u(s)\, ds$$

cioè

$$u(x) = -\frac{1}{3}\lambda^2 \left[\int_0^x \left(Kx + \frac{1}{x^2}\right) s \cdot s^2 u(s)\, ds + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 \left(Ks + \frac{1}{s^2}\right) x \cdot s^2 u(s)\, ds\right].$$

Ponendo ora

$$\varphi(x,s) = \begin{cases} \left(Kx + \frac{1}{x^2}\right) s & s \geq x \\ \left(Kx + \frac{1}{s^2}\right) x & x \geq s \end{cases}$$

la $u(x)$ viene a soddisfare l'equazione integrale lineare

$$\text{D)} \qquad u(x) = -\frac{1}{3}\lambda^2 \int_0^1 \varphi(x,s)\, s^2 u(s)\, ds$$

il nucleo dell'equazione è della forma che il VIVANTI chiama polare, esso è facilmente simmetrizzabile; basta all'uopo porre $x\, u(x) = v(x)$ e $\psi(x,s) = \varphi(xs)\, x \cdot s$, l'equazione D) diventa allora

$$\text{D}^1) \qquad v(x) = -\frac{1}{3}\lambda^2 \int_0^1 \psi(x,s)\, v(s)\, ds.$$

Il nucleo $\psi(x,s)$ è simmetrico e dipende dal parametro, infatti esso vale

$$Kx^2 s^2 + \frac{s^2}{x} \text{ per } s > x \qquad\qquad Kx^2 s^2 + \frac{x^2}{s} \text{ per } x > s$$

ove ricordando le posizioni fatte

$$K = \frac{2 - h + n\lambda(2 - h) - \alpha\lambda^2}{1 + h + n\lambda(1 + h) + \alpha\lambda^2};$$

esso nucleo risulta la somma di un nucleo semplice dipendente da λ tramite il coefficente K, e di un nucleo simmetrico che, come vediamo facilmente subito, è definito positivo; la dipendenza del nucleo dal parametro non rientra in quella già studiata da Iglisch, Miranda (²).

2. – Che il nucleo

$$\varphi(x,s) = \begin{cases} \dfrac{s^2}{x} & \text{per } s > x \\ \dfrac{x^2}{s} & \text{per } x > s \end{cases}$$

sia definito positivo si vede applicando un criterio dato da M. Mercer in una interessante memoria (³) che dice:

« Affichè un nucleo $K(x,s)$ sia positivo è necessario e sufficente che tutti i determinanti di Fredholm $K\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \ldots\ldots & x_n \\ x_1 & x_2 \ldots\ldots & x_n \end{pmatrix}$ « siano ≥ 0 per tutti i sistemi di valori di $x_1\ x_2 \ldots x_n$ dell'intervallo ».

I determinanti di Fredholm del nostro nucleo sono della forma

$$K\begin{pmatrix} x_1 & & x_n \\ x_1 & & x_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{x_1^2}{x_1} & \dfrac{x_1^2}{x_2} & \dfrac{x_1^2}{x_2} & & \dfrac{x_1^2}{x_n} \\ \dfrac{x_1^2}{x_2} & \dfrac{x_2^2}{x_2} & \dfrac{x_2^2}{x_3} & & \dfrac{x_2^2}{x_n} \\ \dfrac{x_1^3}{x_3} & \dfrac{x_2^2}{x_2} & \dfrac{x_3^2}{x_3} & & \dfrac{x_3^2}{x_n} \\ & & & & \\ \dfrac{x_1^2}{x_n} & \dfrac{x_1^2}{x_n} & \dfrac{x_4^2}{x_n} & & \dfrac{x_n^2}{x_n} \end{vmatrix}$$

raccogliendo x_1^2 della prima riga e della prima colonna, x_2^2 dalla seconda riga e dalla seconda colonna e così via si ha

(²) R. Iglisch, *Lineare Integralgheichungen mit von Parameter abhängigem Kern.*, Math. Ann. 1939. — C. Miranda, *Nuovi contributi*, ecc. [Mem. R. Accad. delle Scienze di Torino, 1940.

(³) *Philosofical Transactions*, London, t. 209 A, 1909, p. 415.

$$K\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} = x_1^4 x_2^4 \dots x_n^4 \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1^3} & \frac{1}{x_2^3} & \frac{1}{x_3^3} & \dots & \frac{1}{x_n^3} \\ \frac{1}{x_2^3} & \frac{1}{x_2^3} & \frac{1}{x_3^3} & \dots & \frac{1}{x_n^3} \\ \frac{1}{x_3^3} & \frac{1}{x_3^3} & \frac{1}{x_3^3} & \dots & \frac{1}{x_n^3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{x_n^3} & \frac{1}{x_n^3} & \frac{1}{x_n^3} & & \frac{1}{x_n^3} \end{vmatrix}$$

e sottraendo dalla I. colonna la seconda, dalla II. la terza, e così via, si ottiene un determinante che ha gli elementi al disotto della diagonale principale tutti nulli e che perciò vale

$$K\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} =$$

$$= x_1^4 x_1^4 \dots x_n^4 \left(\frac{1}{x_1^3} - \frac{1}{x_2^3}\right)\left(\frac{1}{x_2^3} - \frac{1}{x_3^3}\right) \dots \left(\frac{1}{x_{n-1}^3} - \frac{1}{x_n^3}\right)\frac{1}{x_n^3}$$

che è essenzialmente positivo perchè $0 < x_1 < x_2 \dots < x_n$.

3. - Nel caso $\alpha = 0$ il problema si riduce ad un problema di Sturm-Lionville, le condizioni al contorno 2) 3) diventano

$$2') \qquad u'(1) + h\,u(1) = 0$$

$$3') \qquad u(0) = 0$$

il nucleo dell'equazione integrale diventa

$$\psi(x s) = \begin{cases} \dfrac{2-h}{1+h} x^2 s^2 + \dfrac{s^2}{x} & \text{per } s > x \\[2ex] \dfrac{2-h}{1+h} x^2 s^2 + \dfrac{x^2}{s} & \text{per } x > s \end{cases}$$

ed essendo $\dfrac{2-h}{1+h} > 0$ esso come somma di 2 nuclei positivi è ancora positivo; gli autovalori corrispondenti saranno tutti positivi, se μ è uno di questi avremo

$$-\frac{1}{3}\lambda^2 = \mu$$

dalla quale risulta λ immaginario puro: il sistema vibra liberamente e le sue oscillazioni sono non smorzate.

4. - Sia invece $\alpha = \infty$: il problema è ancora un problema di Sturm-Lionville, le 2) e 3) diventano ora

$$2'') \quad u(1) = 0 \qquad\qquad 3'') \quad u(0) = 0 .$$

Il nucleo, che ora vale

$$\psi(x,s) = \begin{cases} \dfrac{s^2}{x} - x^2 s^2 & \text{per } s \leq x \\ \dfrac{x^2}{s} - x^2 s^2 & \text{per } x \geq s \end{cases}$$

è ancora definito positivo, infatti con lo stesso procedimento di più sopra si trova

$$K\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \dots x_n \\ x_1 & x_2 \dots x_n \end{pmatrix} = x_1^4\, x_2^4 \dots x_n^4 \begin{vmatrix} \dfrac{1}{x_1^3} - 1 & \dfrac{1}{x_2^3} - 1 \dots & \dfrac{1}{x_n^3} - 1 \\ \dfrac{1}{x_2^3} - 1 & \dfrac{1}{x_2^3} - 1 \dots & \dfrac{1}{x_n^3} - 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{1}{x_n^3} - 1 & \dfrac{1}{x_n^3} - 1 & \dfrac{1}{x_n^3} - 1 \end{vmatrix}$$

e quindi

$$K\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_n \\ x_1 & x_2 & x_n \end{pmatrix} =$$

$$= x_1^4\, x_1^4 \dots x_n^4 \left(\frac{1}{x_1^3} - \frac{1}{x_2^3}\right)\left(\frac{1}{x_2^3} - \frac{1}{x_3^3}\right) \dots \left(\frac{1}{x_{n-1}^3} - \frac{1}{x_n^3}\right)\left(\frac{1}{x_n^3} - 1\right) > 0 .$$

Gli autovalori del problema sono ancora immaginari puri e le oscillazioni della sfera vibrante immersa in un fluido di densità infinita sono ancora libere.

5. – Dimostriamo ora che nel caso generale gli autovalori sono a parte reale negativa. Siano infatti λ_1 e λ_2 due autovalori complessi coniugati e $v_1(x)$ $v_2(x)$ le corrispondenti autofunzioni, avremo

$$\text{E)}\quad \begin{aligned} v_1(x) &= -\frac{1}{3}\lambda_1^2 K_1 \int_0^1 x^2 s^2 v_1(s)\,d\,s - \frac{1}{3}\lambda_1^2 \int_0^1 \varphi(x,s)\, v_1(s)\,d\,s \\ v_2(x) &= -\frac{1}{3}\lambda_2^2 K_2 \int_0^1 x^2 s^2 v_2(s)\,d\,s - \frac{1}{3}\lambda_2^2 \int_0^1 \varphi(x,s)\, v_2(s)\,d\,s \end{aligned}$$

moltiplicando le prime delle E) per $\lambda_2^2\, u_2(x)$ e la seconda per $\lambda_1^2\, u_1(x)$ e sottraendo membro a membro si ottiene

$$(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \int_0^1 v_1(x)\, v_2(x)\, d\,x =$$

$$= -\frac{1}{3}\lambda_1^2\lambda_2^2 (K_1 - K_2) \int_0^1\!\!\int_0^1 x^2 s^2 u_1(x)\, u_2(s)\, d\,x\, d\,s$$

e quindi

$$\text{F)}\qquad \frac{K_1 - K_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} < 0\ .$$

Se ricordiamo ora le espressioni di K_1 e K_2 ed eliminando i fattori essenzialmente positivi, con facili riduzioni perveniamo dalla F) alla

$$a + n\frac{\lambda_1\,\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} < 0$$

donde risulta

$$\lambda_1 + \lambda_2 < 0$$

che ci dimostra l'asserto.

6. - L'equazione degli autovalori, equazione agli smorzamenti ed alle frequenze si ottiene ponendo

$$\mu(x) = \frac{d}{dx} \frac{sen\,\lambda x}{x} .$$

L'equazione in λ a cui si perviene sostituendo nell'equazione integrale è

$$\frac{Tg\,\lambda\,(1+p\lambda^2)-\lambda}{\lambda - Tg\,\lambda} = -\alpha \frac{p\lambda^2}{1+n\lambda}$$

dove si è posto $p = \dfrac{a^2}{2b^2}$.

Nei due casi limiti $\alpha = 0$ $\alpha = \infty$ l'equazione diventa rispettivamente

$$Tg\,\lambda\,(1+p\lambda^2)-\lambda = 0 \quad , \quad \lambda - Tg\,\lambda = 0$$

che diventano ponendo $\lambda = i\,\mu$

$$tg\,\mu = \frac{\mu}{1-p\mu^2} \quad , \quad \mu = tg\,\mu$$

equazioni a tutte radici reali come è noto; più difficoltosa riesce la discussione stessa nel caso generale, ma i risultati interessanti, cui essa può portare, nello studio delle relazioni tra smorzamenti, frequenze, e caratteristiche fisiche del sistema vibrante sono degni di un lavoro a parte.